УДК 512.628.2

Н. В. Григоренко (Нац. аграр. ун-т, Киев)

ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

We show how a solution of an inverse problem of the differential Galois theory can be used to construct isomonodromic deformations.

Показано як можна використати розв'язок оберненої задачі диференціальної теорії Галуа для побудови ізомонодромних деформацій.

В последние годы значительно возрос интерес к изучению линейных дифференциальных уравнений с параметрами методами дифференциальной алгебры (см. [1]). Например, к таким уравнениям сводятся некоторые задачи гамильтоновой динамики. Как показано в [2], дифференциально-алгебраическую технику можно успешно применить для установления неинтегрируемости комплексных аналитических гамильтоновых систем. Подобным образом технику дифференциальной алгебры можно использовать для построения изомонодромных семейств линейных дифференциальных уравнений (определения см. в [3, с. 128]).

В приложениях часто приходится решать линейные дифференциальные уравнения с параметрами и регулярными особыми точками. При этом для каких-то конкретных, фиксированных значений параметров иногда удается получить точные решения этих уравнений. Естественно возникает вопрос: нельзя ли как-то незначительно изменить (деформировать) значения параметров (например, слегка изменив положение особых точек) так, чтобы характер поведения решений в окрестности особых точек уравнения остался прежним? Поскольку характер поведения решений в окрестности особых точек уравнения класса Фукса определяется его группой монодромии (определения см. в [4]), такие деформации параметров уравнения принято называть изомонодромными (т. е. не меняющими группу монодромии уравнения). Изомонодромные деформации коэффициентов уравнения второго порядка изучал еще Фукс [5] в 1907 г. Чуть позднее Шлезингер [6] получил систему линейных дифференциальных уравнений, описывающую изомонодромные деформации. Однако, если число N особых точек уравнения больше трех, исследование полученной системы не проще, чем исследование исходного уравнения. Например, при $N = 4$ после определенных преобразований приходим к уравнениям Пенлеве.

С другой стороны, рассматриваемая задача построения изомонодромных семейств линейных дифференциальных уравнений тесно связана с так называемой обратной задачей теории Галуа дифференциальных полей (см. [7]), а именно, построением по заданной линейной алгебраической группе G линейных дифференциальных уравнений, группа Галуа которых изоморфна G. Дело в том, что для уравнений Фукса группа Галуа уравнения совпадает с замыканием (в топологии Зариского) группы монодромии этого уравнения и при исследовании общих свойств решений такого уравнения не существенно какую из них рассматривать.

В то же время в решении обратной задачи теории Галуа дифференциальных полей уже достигнут значительный прогресс. В частности, Ковачич [8] решил обратную задачу для связных разрешимых линейных алгебраических групп над произвольным дифференциальным полем характеристики нуль. Это означает, например, что если замыкание группы монодромии уравнения — связная разрешимая алгебраическая группа, то можно воспользоваться результатами Ковачича для построения изомонодромного семейства линейных дифференциальных уравнений с такой группой монодромии над произвольной римановой поверхностью. Однако эти результаты мало известны специалистам в области изомонодромных деформаций из-за абстрактной, чисто алгебраической формы их представления.

Цель данной статьи — показать на примере как можно использовать решение обратной задачи для конкретной линейной алгебраической группы, чтобы построить изомонодромные деформации.

Пусть $C(z)$ — дифференциальное поле рациональных функций одной переменной z с комплексными коэффициентами и дифференцированием d/dz. Мы будем использовать понятия и определения из [7]. В частности, будем предполагать, что все расширения дифференциальных полей лежат в некотором фиксированном универсальном дифференциально-полевом расширении U поля $C(z)$. Пусть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не целые и не все рациональны, $m \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ — константы, алгебраически независимые над C, и K — алгебраическое замыкание $C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ в U. Обозначим

$$\varphi(z) = \prod_1^m (z - b_j), \qquad \varphi(z) = \sum_1^n \frac{\lambda_i}{\sqrt{\varphi(a_i)}\,(z - a_i)},$$

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{1}{4}\frac{\varphi'}{\varphi} + \psi\sqrt{\varphi}, \qquad \frac{u_2'}{u_2} = \frac{1}{4}\frac{\varphi'}{\varphi} - \psi\sqrt{\varphi},$$

$$f_1 = -\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi},$$

$$f_2 = -\psi^2\varphi - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \frac{3}{16}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\psi'}{\psi},$$

$$L(y) \equiv y'' + f_1 y' + f_2 y. \tag{1}$$

Обозначим также через G алгебраическую матричную группу, порожденную матрицами вида $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\mu^{-1} \in C^*$, $i^2 = -1$. Для любой дифференциальной специализации $(a, b) \to (\tilde{a}, \tilde{b})$ над C обозначим через $\tilde{L}(y)$ дифференциальный оператор, который получается из $L(y)$ путем замены в его коэффициентах констант $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ на константы $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m$.

Теорема. *Группа Галуа оператора* (1) *над* $K(z)$ *изоморфна* G, u_1, u_2 — *фундаментальная система нулей этого оператора. Для любой дифференциальной специализации* $(a, b) \to (\tilde{a}, \tilde{b})$ *над* C *такой, что* $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m \in C$ *попарно различны, группа Галуа оператора* $\tilde{L}(y)$ *над полем*

$C(z)$ изоморфна G. Матрицы монодромии для базиса $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ в точках $\tilde{a}_j$ имеют вид $\begin{pmatrix} \exp(2\pi i\lambda_j) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i\lambda_j) \end{pmatrix}$, *а в точках $\tilde{b}_j$ —* $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $i^2 = -1$.

Доказательство. Выбор констант, согласно теореме [9, с. 116], обеспечивает изоморфизм групп Галуа соответствующих операторов на группу G. Тот факт, что u_1, u_2 — фундаментальная система нулей оператора $L(y)$, устанавливается непосредственной проверкой. Нетрудно убедиться, что в окрестности особой точки $\tilde{a}_j$ логарифмические производные фундаментальной системы нулей оператора $\tilde{L}(y)$ имеют вид $\tilde{u}_1'/\tilde{u}_1 \approx \lambda_j/(z-\tilde{a}_j)$, $\tilde{u}_2'/\tilde{u}_2 \approx -\lambda_j/(z-\tilde{a}_j)$. Следовательно, при обходе вокруг точки $\tilde{a}_j$ функции $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ приобретают постоянные множители, т. е. $\tilde{u}_1 \to \exp(2\pi i\lambda_j)\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2 \to \exp(-2\pi i\lambda_j)\tilde{u}_2$, что соответствует матрице монодромии, указанной в формулировке теоремы. Аналогично, в окрестности особой точки $\tilde{b}_j$ имеем следующие представления для логарифмических производных: $\tilde{u}_1'/\tilde{u}_1 \approx 1/4(z-\tilde{b}_j) + f\sqrt{z-\tilde{b}_j}$, $\tilde{u}_2'/\tilde{u}_2 \approx$ $\approx 1/4(z-\tilde{b}_j) - f\sqrt{z-\tilde{b}_j}$, где f — регулярный в $\tilde{b}_j$ множитель. Следовательно, при обходе вокруг этой точки функции $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ преобразуются так: $\tilde{u}_1 \to i\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_2 \to i\tilde{u}_1$, что также соответствует матрице монодромии, указанной в теореме для точки $\tilde{b}_j$.

Теорема доказана.

Заметим, что оператор (1) представляет собой не что иное, как изомонодромную деформацию, если рассматривать константы $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ как параметры оператора и эти параметры не связаны с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Пример. В качестве примера приведенного выше оператора рассмотрим случай, когда $m = 1$ и $n = 2$. Тогда

$$\varphi(z) = z - b, \qquad \psi(z) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1 - b}\,(z - a_1)} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2 - b}\,(z - a_2)},$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = (z-b)^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{\psi'}{\psi} = (z-\theta)^{-1} + (z-a_1)^{-1} + (z-a_2)^{-1},$$

где

$$\theta = \frac{\lambda_1\sqrt{a_2-b}\,a_2 + \lambda_2\sqrt{a_1-b}\,a_1}{\lambda_1\sqrt{a_2-b} + \lambda_2\sqrt{a_1-b}}.$$

Выполним теперь некоторые промежуточные подсчеты:

$$\psi^2 = \frac{\lambda_1^2}{(a_1-b)(z-a_1)^2} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(a_1-b)(a_2-b)}\,(z-a_1)(z-a_2)} + \frac{\lambda_2^2}{(a_2-b)(z-a_2)^2},$$

$$\psi^2\varphi = \frac{\lambda_1^2}{a_1-b}\left[\frac{a_1-b}{(z-a_1)^2} + (z-a_1)^{-1}\right] + \frac{\lambda_2^2}{a_2-b}\left[\frac{a_2-b}{(z-a_2)^2} + (z-a_2)^{-1}\right] +$$

$$+ \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(a_1-b)(a_2-b)}}\left[\frac{a_1-b}{(a_1-a_2)(z-a_1)} + \frac{a_2-b}{(a_2-a_1)(z-a_2)}\right].$$

Подставив полученные выше выражения в формулы для коэффициентов оператора (1), после простых, но слегка громоздких, преобразований получим

$$f_1 = (z-a_1)^{-1} + (z-a_2)^{-1} - (z-b)^{-1} - (z-\theta)^{-1},$$

$$f_2 = -\lambda_1^2(z-a_1)^{-2} - \left[\left(\frac{1}{4}+\lambda_1^2\right)(a_1-b)^{-1} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{a_1-a_2}\sqrt{\frac{a_1-b}{a_2-b}}\right](z-a_1)^{-1} +$$

$$+\lambda_2^2(z-a_2)^{-2} - \left[\left(\frac{1}{4}+\lambda_2^2\right)(a_2-b)^{-1} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1}\sqrt{\frac{a_2-b}{a_1-b}}\right](z-a_2)^{-1} +$$

$$+\frac{7}{16}(z-b)^{-2} + \frac{1}{4}\left[(b-\theta)^{-1} - (b-a_1)^{-1} - (b-a_2)^{-1}\right](z-b)^{-1} + \frac{1}{4}(\theta-b)^{-1}(z-\theta)^{-1}.$$

1. *Varadarajan V. S.* Group theoretic aspects of linear meromorphic differential equations // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. – 1999. – **5**, № 1 – 4. – P. 341 – 349.
2. *Churchill R. C.* Differential algebraic techniques in Hamiltonian dynamics // Proc. Int. Workshop Different. Algebra and Relat. Top. (New Brunswick, New York, USA, November 2 – 3, 2000). – Singapore: World Sci., 2002. – P. 219 – 255.
3. *Болибрух А. А.* Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1998. – **221**. – С. 127 – 142.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1950.
5. *Fuchs R.* Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei in Endlisch gelegene wesentlich singulären Stellen // Math. Ann. – 1907. – **63**. – P. 301 – 321.
6. *Schlesinger L.* Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebeger Ordnung mit festen kritischen Punkten // J. reine und angew. Math. – 1912. – **141**. – S. 96 – 145.
7. *Kolchin E. R.* Differential algebra and algebraic groups. – New York; London: Acad. Press, 1973.
8. *Kovacic J.* The inverse problem in the Galois theory of differential fields // Ann. Math. – 1969. – **89**. – P. 583 – 608; 1971. – **93**. – P. 269 – 284.
9. *Григоренко Н. В.* К обратной задаче теории Галуа дифференциальных полей // Мат. заметки. – 1980. – **28**. – С. 113 – 117.

Получено 17.11.2005,
после доработки — 26.04.2007