УДК 517.5

Р. Р. Салимов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ВЛОЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ЕВКЛИДОВО

The boundary behavior of the so-called Q-homeomorphisms with respect to a measure in some metric spaces is investigated. A series of conditions on the function $Q(x)$ and on the boundary of a domain are formulated under which every Q-homeomorphism with respect to a measure admits a continuous extension to a boundary point.

Досліджується гранична поведінка так званих Q-гомеоморфізмів відносно міри в деяких метричних просторах. Сформульовано низьку умов на функцію $Q(x)$ і межу області, при яких будь-який Q-гомеоморфізм відносно міри допускає неперервне продовження в точку межі.

1. Введение. В последнее десятилетие в теории отображений интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением (см., например, [1 – 8]). Отображения с конечным искажением длины были введены В. И. Рязановым и исследовались им совместно с О. Мартио, У. Сребро и Э. Якубовым в работе [9]. Они представляют собой значительно более широкий класс отображений, чем непостоянные отображения с ограниченным искажением по Решетняку. Например, любой гомеоморфизм $f \in W^{1,n}_{\text{loc}}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{\text{loc}}$ является отображением с конечным искажением длины. В теории квазиконформных отображений и их обобщений большую роль играют различные модульные неравенства.

Следующая концепция была предложена О. Мартио (см., например, [10]). Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q : G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_G Q(x)\rho^n(x)\,dm(x)$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ (пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int_\gamma \rho\, ds = \int_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_G \rho^n(x)\,dm(x),$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблема граничного поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работе [10], а в случае $Q \in$ $\in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работе [11]. Здесь проблема изучается в метрических пространствах для новых классов отображений и функций. Ранее модульная техника для метрических пространств развивалась в работах [12 – 14].

Пусть (X, d, μ) — пространство X с метрикой d и борелевой мерой μ. Напомним, что пространство (X, d, μ) называется *n-регулярным* по Альфорсу, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1}R^n \;\leq\; \mu(B_R) \;\leq\; CR^n$$

для всех шаров B_R в X радиуса $R < \operatorname{diam} X$. Будем говорить, что пространство (X, d, μ) — *n-регулярно сверху*, если

$$\mu(B_R) \;\leq\; CR^n \tag{2}$$

для всех шаров B_R в X радиуса $R < \operatorname{diam} X$. Областью в X будем называть открытое связное множество.

Пусть G — область в пространстве (X, d, μ), G' — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $Q : G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ является *Q-гомеоморфизмом относительно меры* μ, если

$$M(f\Gamma) \;\leq\; \int\limits_G Q(x)\rho^n(x)\,d\mu(x) \tag{3}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ. Мера длины и допустимые функции для семейств кривых в метрических пространствах определяются аналогично (1) (см., например, [14 – 16]).

2. О конечном среднем колебании относительно меры. Пусть G — область в пространстве (X, d, μ). Будем говорить, что функция $\varphi : G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание относительно меры* μ в точке $x_0 \in \overline{G}$ (сокращенно $\varphi \in FMO^{\mu}(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi_\varepsilon}|\,d\mu(x) \;<\; \infty, \tag{4}$$

где

$$\overline{\varphi_\varepsilon} \;=\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x) \;=\; \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x)$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (4) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ в окрестности точки x_0.

Предложение. *Если для некоторого набора чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x) \;<\; \infty,$$

то $\varphi \in FMO^{\mu}(x_0)$.

Доказательство. Действительно, по неравенству треугольника

$$-\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi_\varepsilon}|\,d\mu(x) \;\leq\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x) + \left|\varphi_\varepsilon - \overline{\varphi_\varepsilon}(x_0)\right| \;\leq$$

$$\leq\; 2 \; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x).$$

***Следствие* 1.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,d\mu(x) \;<\; \infty,$$

то $\varphi \in FMO^{\mu}(x_0)$.

Лемма. *Пусть* G — *область в* n-*регулярном сверху пространстве* (X, d, μ), $n \ge 2$, *в точке* $x_0 \in \partial G$ *выполнено условие*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \le \gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{r}\, \mu(G \cap B(x_0, r)) \tag{5}$$

и $\varphi: G \to \mathbb{R}$ — *неотрицательная функция класса* $FMO^{\mu}(x_0)$. *Тогда*

$$\int\limits_{G \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x, x_0) \log \dfrac{1}{d(x, x_0)} \right)^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in G} d(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ такое, что функция φ интегрируема в $G_0 = G \cap B_0$ относительно меры μ, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$,

$$\delta = \sup_{r \in (0, \varepsilon_0)} \;\; ⨍_{G(r)} |\varphi(x) - \overline{\varphi_r}|\, d\mu(x) < \infty,$$

$G(r) = G \cap B(r)$, $B(r) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Далее, пусть $\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k < 2^{-k}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in X : \varepsilon_{k+1} \le d(x, x_0) < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(\varepsilon_k)$ и φ_k — среднее значение функции $\varphi(x)$ в $G_k = G \cap B_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, относительно меры μ. Выберем натуральное число N такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$, и обозначим $\alpha(t) = (t \log_2 1/t)^{-n}$. Тогда $G \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0) \subset \Delta(\varepsilon) := \bigcup_{k=0}^{N} \Delta_k$, где $\Delta_k = G \cap A_k$, и

$$\eta(\varepsilon) = \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \varphi(x) \alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x) \le |S_1| + S_2,$$

$$S_1(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Delta_k} (\varphi(x) - \varphi_k) \alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x),$$

$$S_2(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \int\limits_{\Delta_k} d(\varsigma(x, x_0))\, d\mu(x).$$

Поскольку $G_k \subset G(2d(x, x_0))$ для $x \in \Delta_k$, по условию (2)

$$\mu(G_k) \le \mu(G(2d(x, x_0))) \le C \cdot 2^n \cdot d(x, x_0)^n, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{d(x, x_0)^n} \le C \cdot 2^n \frac{1}{\mu(G_k)}.$$

Кроме того, $\dfrac{1}{\left(\log_2 \dfrac{1}{d(x, x_0)} \right)^n} \le \dfrac{1}{k^n}$ для $x \in \Delta_k$ и, таким образом,

$$|S_1| \le \delta C \cdot 2^n \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^n} \le 2\delta C \cdot 2^n,$$

поскольку при $n \ge 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} < \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \leq 1.$$

Далее,

$$\int_{\Delta_k} \alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x) \leq \frac{1}{k^n} \int_{A_k} \frac{d\mu(x)}{d(x, x_0)^n} \leq \frac{C \cdot 2^n}{k^n} \frac{\mu(G_k) - \mu(G_{k+1})}{\mu(G_k)} \leq \frac{C \cdot 2^n}{k^n}.$$

Кроме того, согласно условию (4)

$$\mu(G_{k-1}) = \mu(B(2\varepsilon_k) \cap G) \leq \gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}\, \mu(G_k),$$

а потому

$$|\varphi_k - \varphi_{k-1}| = \frac{1}{\mu(G_k)} \left| \int_{G_k} (\varphi(x) - \varphi_{k-1})\, d\mu(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}}{\mu(G_{k-1})} \int_{G_{k-1}} |(\varphi(x) - \varphi_{k-1})|\, d\mu(x) \leq \delta\gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}$$

и вследствие убывания ε_k

$$\varphi_k = |\varphi_k| \leq \varphi_1 + \sum_{l=1}^{k} |\varphi_l - \varphi_{l-1}| \leq \varphi_1 + k\delta\gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}.$$

Следовательно, при $n \geq 2$

$$S_2 = |S_2| \leq C \cdot 2^n \sum_{k=1}^{N} \frac{|\varphi_k|}{k^n} \leq C \cdot 2^n \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_1 + k\delta\gamma \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}}{k^n} \leq$$

$$\leq C \cdot 2^n \left(2\varphi_1 + \delta\gamma \sum_{k=1}^{N} \frac{(k + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{n-2}}{k^{n-1}} \right) =$$

$$= C \cdot 2^n \left(2\varphi_1 + \delta\gamma \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \frac{(k + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{n-2}}{k^{n-2}} \right) \leq$$

$$\leq C \cdot 2^n \left(2\varphi_1 + \delta\gamma (1 + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{n-2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

и

$$\eta(\varepsilon) \leq 2^{n+1} C(\delta + \varphi_1) + 2^n C\delta\gamma (1 + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{n-2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} < \int_1^{N} \frac{dt}{t} = \log N < \log_2 N$$

и для $\varepsilon_0 \in (0, 2^{-1})$ и $\varepsilon < \varepsilon_N$

$$N < N + \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \log_2\frac{1}{\varepsilon_N} = \log_2\frac{1}{\varepsilon},$$

при $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$ и $\varepsilon \to 0$

$$\eta(\varepsilon) \leq 2^{n+1}C(\delta + \varphi_1) + 2^n C\delta\gamma(1 + \log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}\left(1 + \log_2\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

3. О граничном поведении. В дальнейшем $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ будем рассматривать как метрическое пространство со *сферической* (*хордальной*) метрикой $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π является стереографической проекцией $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \qquad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \qquad x \neq \infty \neq y.$$

Таким образом, по определению $h(x, y) \leq 1$ для всех x и $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Пусть $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — область. ∂D называется *сильно достижимой*, если для невырожденных континуумов E и F в $\overline{D}$

$$M(\Delta(E, F; D)) > 0,$$

и *слабо плоской*, если для невырожденных континуумов E и F в $\overline{D}$ с $E \bigcap \bigcap F \neq \varnothing$

$$M(\Delta(E, F; D)) = \infty,$$

где $\Delta(E, F; D)$ — семейство всех путей, соединяющих E и F в D. Известно, что любая слабо плоская граница является сильно достижимой (см. лемму 5.6 в [10]).

Область $G \subset X$ называется *локально связной* в точке $x_0 \in \partial G$, если x_0 имеет произвольно малые окрестности U в X такие, что множества $U \bigcap G$ являются связными.

Теорема. *Пусть G — область в n-регулярном сверху пространстве (X, d, μ), $n \geq 2$, G' — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $f : G \to G'$ — Q-гомеоморфизм относительно меры μ. Если область G локально связна в точке $x_0 \in \partial G$ и при $r < \operatorname{diam} G$ удовлетворяет условию (5), $Q \in FMO^{\mu}(x_0)$, а область G' имеет сильно достижимую границу, то гомеоморфизм f продолжим в точку x_0 по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in G\}$ состоит из единственной точки. Заметим, что E — континуум, так как область G локально связна в точке x_0. Действительно,

$$E = \limsup_{m\to\infty} f(G_m),$$

где $G_m = G \cap U_m$ — некоторая монотонно убывающая последовательность областей с окрестностями U_m точки x_0 и $d(G_m) \to 0$ при $m \to \infty$ (см., например, утверждение I (9.12) в [17, с. 15]).

Предположим, что континуум E — невырожденный. Пусть x_1 и $x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$, $d(x_1, x_0) < e^{-e}$, и $\gamma_0 : [0, 1] \to G$ — непрерывная кривая, соединяющая x_1 и x_2 в G. Заметим, что $K = \gamma_0([0, 1])$ — компакт в G, как непрерывный образ компакта $[0, 1]$. Таким образом, $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(x_0, K) > 0$ и $\varepsilon_0 < e^{-e}$. Пусть Γ_ε — семейство всех путей, соединяющих шар $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ и K в G, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d(x, x_0) \log \dfrac{1}{d(x, x_0)} \log\left(\dfrac{\log \varepsilon}{\log \varepsilon_0}\right)}, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in X \setminus G_\varepsilon, \end{cases}$$

где $G_\varepsilon = \{x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, допустима для Γ_ε и, следовательно, в силу (3) и доказанной леммы

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \le \frac{c \log\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log^n\left(\dfrac{\log \varepsilon}{\log \varepsilon_0}\right)},$$

т. е. $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, $M(f\Gamma_\varepsilon) \ge M_0 = M(\Delta(fK, E; G'))$, а согласно сильной достижимости границы $\partial G'$ имеем $M_0 > 0$. Полученное противоречие опровергает предположение.

Комбинируя теорему и следствие 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть G — область в n-регулярном сверху пространстве (X, d, μ) и $f : G \to G' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — Q-гомеоморфизм относительно меры μ с*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{G(x_0, \varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Если область G в точке $x_0 \in \partial G$ локально связна и удовлетворяет условию (5), а область G' имеет сильно достижимую границу, то гомеоморфизм f продолжим в точку x_0 по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Пример. Пусть M — риманово n-мерное многообразие, $n \ge 2$, с метрикой d и μ — n-мерная хаусдорфова мера на M. По классической теореме сравнения Бишопа полное многообразие M с неотрицательной кривизной Риччи является n-регулярным сверху относительно римановой меры μ (см., например, [14, с. 75; 18, 19, с. 123]).

Следствие 3. *Пусть G — область в полном римановом многообразии M с неотрицательной кривизной Риччи и $f : G \to G' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 2$, — Q-гомеоморфизм относительно римановой меры μ. Если область G в точке $x_0 \in \partial G$ локально связна и удовлетворяет условию (5), $Q \in FMO^{\mu}(x_0)$, а область G' имеет сильно достижимую границу, то гомеоморфизм f продолжим в точку x_0 по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

1. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Ann. – 2000. – **317**. – P. 703 – 726.
2. *Gehring F. W., Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1999. – **24**. – P. 253 – 264.

3. *Heinonen J., Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1993. – **125**. – P. 81 – 97.
4. *Holopainen I., Pankka P.* Mappings of finite distortion: global homeomorphism theorem // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2004. – **29**, № 1. – P. 59 – 80.
5. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
6. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity // Invent. math. – 2001. – **144**, № 3. – P. 507 – 531.
7. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – **27**, № 2. – P. 349 – 417.
8. *Manfredi J. J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – **47**, № 3. – P. 1131 – 1145.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
10. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – **30**. – P. 49 – 69.
11. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
12. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – **181**. – P. 1 – 61.
13. *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal mappings // Texts Math. Ser. B. – 2000. – **27**. – P. 1 – 43.
14. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
15. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
16. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **908**. – P. 171 – 219.
17. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
18. *Buser P.* A note on the isoperimetric constant // Ann. Sci. Ecole norm. supér. – 1982. – **4**, № 15. – P. 213 – 230.
19. *Chavel I.* Riemannian geometry — a modern introduction // Cambridge Tracts Math. – 1993. – **108**.

Получено 20.01.2006