УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. Г. Фотій (Чернів. нац. ун-т)

СТАЛІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ ЗВЕРХУ ДВОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ПРЯМУ ЗОРҐЕНФРЕЯ

By using the Sierpiński continuum theorem, we prove that every upper continuous two-valued mapping of linear connected or even c-connected space (i.e., the space in which every two points can be connected by a continuum) into the Sorgenfrey line is necessarily constant.

С помощью теоремы Серпинского о континууме доказано, что каждое непрерывное сверху двузначное отображение линейно связного или даже c-связного пространства (пространства, любые две точки которого связываются континуумом) в прямую Зоргенфрея обязательно постоянно.

1. У цій статті ми продовжуємо дослідження багатозначних відображень у пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$, які були розпочаті у працях [1 – 3], що з'явилися внаслідок бажання авторів розповсюдити деякі результати П. Кендерова [4] і Ґ. Дебса [5] на неметризовний випадок. Зокрема, в [3] доведено, що у кожного n-значного неперервного зверху відображення $F: X \to \mathbb{L}$ берівського простору X з другою аксіомою зліченності множина $S(F)$ точок його локальної сталості є відкритою і скрізь щільною в X. Але в [1] було встановлено, що кожне n-значне неперервне знизу відображення $F: X \to \mathbb{L}$ зв'язного простору X є сталим. Тому постало питання: чи кожне n-значне неперервне зверху відображення, наприклад, числової прямої $\mathbb{R}$ в пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$ є сталим? Воно виявилося набагато важчим, ніж відповідне питання для неперервних знизу відображень. Тут ми даємо ствердну відповідь на нього у випадку $n = 2$. Для цього вводимо спеціальну топологічну структуру на півплощині $\mathbb{Y} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > y_2\}$ і показуємо, що неперервні зверху двозначні відображення $F: X \to \mathbb{L}$ і неперервні відображення $F: X \to \mathbb{Y}$ знаходяться у природній взаємно однозначній відповідності, яка зберігає сталість. Далі з'ясовуємо, що у введеному топологічному просторі $\mathbb{Y}$ кожна одноточкова множина замкнена і кожна компактна підмножина не більш ніж зліченна. І, нарешті, використовуючи теорему Серпінського про континууми [6, с. 526], доводимо, що кожне двозначне неперервне зверху відображення $F: \mathbb{R} \to \mathbb{L}$ є сталим. Цей результат ми розширюємо на випадок відображень $F: X \to \mathbb{L}$, заданих на *c-зв'язному* просторі X, який характеризується умовою: для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з X існує такий континуум C в X, що $x_i \in C$, $i = 1, 2$. Поширення цих міркувань на випадок довільного n буде здійснено в наступній праці авторів. Зауважимо, що попередній варіант основного результату цієї статті було анонсовано в [7].

2. Нагадаємо, що *пряма Зорґенфрея* $\mathbb{L}$ — це топологічний простір, точками якого є дійсні числа, а базу околів точки x утворюють напіввідкриті справа проміжки $[x, x+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$.

Розглянемо відкриту півплощину $\mathbb{Y} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > y_2\}$ координатної площини $\mathbb{R}^2$ і введемо на ній топологічну структуру, яка тісно пов'язана з топологічною структурою прямої Зоргенфрея $\mathbb{L}$. Для точки $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Y}$ і додатного числа ε покладемо

$$V_\varepsilon(y) = \big(([y_1, y_1+\varepsilon) \times [y_2, y_2+\varepsilon)) \cup [y_1, y_1+\varepsilon)^2 \cup [y_2, y_2+\varepsilon)^2\big) \cap \mathbb{Y}.$$

Якщо $0 < \varepsilon \leq y_1 - y_2$, то множина $V_\varepsilon(y)$ є диз'юнктним об'єднанням напіввідкритого квадрата $Q_\varepsilon(y) = [y_1, y_1 + \varepsilon) \times [y_2, y_2 + \varepsilon)$ та напіввідкритих прямокутних трикутників $T_\varepsilon(y_1) = [y_1, y_1 + \varepsilon)^2 \bigcap \mathbb{Y}$ і $T_\varepsilon(y_2) = [y_2, y_2 + \varepsilon)^2 \bigcap \mathbb{Y}$, тобто $V_\varepsilon(y) = Q_\varepsilon(y) \sqcup T_\varepsilon(y_1) \sqcup T_\varepsilon(y_2)$. Множину V ми назвемо *околом точки* $y = (y_1, y_2)$ *у просторі* $\mathbb{Y}$, якщо $V \subseteq \mathbb{Y}$ і існує таке $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(y) \subseteq V$. Позначимо символом $\mathcal{V}_y$ множину всіх околів точки y у просторі $\mathbb{Y}$. Легко перевірити, що відповідність $y \mapsto \mathcal{V}_y$ задає топологічну структуру на множині $\mathbb{Y}$.

Встановимо деякі найпростіші властивості простору $\mathbb{Y}$.

Твердження 1. $\mathbb{Y}$ — *негаусдорфовий* T_1-*простір.*

Доведення. Нехай $y' = (y_1', y_2')$ і $y'' = (y_1'', y_2'')$ — довільні точки з $\mathbb{Y}$, для яких $y_2' = y_2'' = y_2$ і $y_1' \neq y_1''$. Оскільки $V_\varepsilon(y') \bigcap V_\varepsilon(y'') \supseteq T_\varepsilon(y_2) \neq \varnothing$, то будь-які околи V' і V'' відповідно точок y' і y'' обов'язково перетинаються, хоча $y' \neq y''$, отже, простір $\mathbb{Y}$ є негаусдорфовим.

Далі, нехай $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Y}$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \mathbb{Y}$ і $y \neq \tilde{y}$. Оскільки $y_1 \neq \tilde{y}_1$ або $y_2 \neq \tilde{y}_2$, то точка y відрізняється від кожної з точок $\tilde{y}$, $q_1 = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_1)$ і $q_2 = (\tilde{y}_2, \tilde{y}_2)$. Нехай $d(p, q)$ — максимум-відстань між точками p і q площини $\mathbb{R}^2$. Покладемо

$$\varepsilon = \min\{d(y, \tilde{y}),\ d(y, q_1),\ d(y, q_2)\}.$$

Зрозуміло, що $\varepsilon > 0$ і $y \notin V_\varepsilon(\tilde{y})$. Це показує, що кожна одноточкова множина $\{y\}$ є замкненою в $\mathbb{Y}$, отже, Y — T_1-простір.

Зауважимо, що коли б ми замість простору $\mathbb{Y}$ розглянули простір $\tilde{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \bigcup \Delta$, в якому до $\mathbb{Y}$ долучено діагональ $\Delta = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, а топологія визначається так само, як і в $\mathbb{Y}$, то цей простір уже не задовольняв би аксіому T_1, бо в ньому замикання будь-якої точки $y = (t, t) \in \Delta$ збігалося б з кутом $P_t = (\{t\} \times (-\infty, t]) \bigcup ([t, +\infty) \times \{t\})$.

На відміну від прямої Зорґенфрея, яка є незв'язним простором, адже її компоненти зв'язності — одноточкові множини, для просторів $\mathbb{Y}$ і $\tilde{\mathbb{Y}}$ має місце наступний результат.

Твердження 2. *Простори* $\mathbb{Y}$ *і* $\tilde{\mathbb{Y}}$ *є зв'язними.*

Доведення. Нехай A — непорожня відкрита і замкнена множина у просторі $\mathbb{Y}$. Тоді існує точка $a = (a_1, a_2) \in A$ така, що $V_\varepsilon(a) \subseteq A$ для деякого $\varepsilon > 0$. Розглянемо, наприклад, трикутник $T_\varepsilon(a_1) = [a_1, a_1 + \varepsilon)^2 \bigcap \mathbb{Y}$. Його замикання у просторі $\mathbb{Y}$ збігається з множиною

$$P = (([a_1, a_1 + \varepsilon) \times \mathbb{R}) \bigcup (\mathbb{R} \times [a_1, a_1 + \varepsilon))) \bigcap \mathbb{Y}.$$

Оскільки $T_\varepsilon(a_1) \subseteq A$ і множина A є замкненою в $\mathbb{Y}$, то $P \subseteq A$, зокрема кожна точка $p_t = (a_1, t)$ при $t < a_1$ і кожна точка $q_t = (t, a_1)$ при $t > a_1$ входить в A. Звідси і з відкритості A легко вивести, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує $\varepsilon_t > 0$ таке, що $T_{\varepsilon_t}(t) \subseteq A$. Тоді, як і раніше, будемо мати, що $(t, s) \in A$ при $s < t$ для довільного $t \in \mathbb{R}$. Це означає, що $A = \mathbb{Y}$, отже, простір $\mathbb{Y}$ є зв'язним.

Зв'язність простору $\tilde{\mathbb{Y}}$ довести ще простіше, оскільки кожна відкрита і замкнена множина, яка містить деяку точку $y = (t, t)$ діагоналі Δ, обов'язково містить кут P_t, з ним всю діагональ Δ, а отже, і весь простір $\tilde{\mathbb{Y}}$. Втім зв'язність $\tilde{\mathbb{Y}}$ випливає і з того, що $\tilde{\mathbb{Y}}$ містить скрізь щільний зв'язний підпростір $\mathbb{Y}$.

3. Нехай X і Y — топологічні простори і $F: X \to Y$ — багатозначне відображення, яке кожній точці x з X ставить у відповідність непорожню підмножину $F(x)$ простору Y. Таке відображення називають *неперервним зверху* (*знизу*) *у точці* x_0 з X, якщо для кожної відкритої множини V у просторі Y такої, що $V \supseteq F(x_0)$ $(V \bigcap F(x_0) \neq \varnothing)$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \bigcap V \neq \varnothing)$, як тільки $x \in U$. Кажуть, що F *неперервне зверху* (*знизу*), якщо воно є таким у кожній точці x з X.

Розглянемо двозначне відображення $F: X \to \mathbb{L}$ топологічного простору X в пряму Зорґенфрея. Оскільки для кожного $x \in X$ множина $F(x)$ складається рівно з двох чисел, то її можна записати у вигляді $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$, де число $f_1(x)$ більше від числа $f_2(x)$. Співставивши кожній точці $x \in X$ пару $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, одержимо однозначне відображення $f: X \to \mathbb{Y}$ зі значеннями у введеному в попередньому пункті просторі $\mathbb{Y}$.

Твердження 3. *Двозначне відображення $F: X \to \mathbb{L}$ буде неперервним зверху в точці $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли відповідне йому однозначне відображення $f: X \to \mathbb{Y}$ є неперервним у точці x_0.*

Доведення. Для множини $\{y_1, y_2\} \subseteq \mathbb{R}$ і числа $\varepsilon > 0$ покладемо

$$V(\{y_1, y_2\}, \varepsilon) = V(y_1, y_2, \varepsilon) = [y_1, y_1 + \varepsilon) \bigcup [y_2, y_2 + \varepsilon).$$

Очевидно, що відображення F буде неперервним зверху в точці x_0 тоді і лише тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0, що $F(x) \subseteq \subseteq V(F(x_0), \varepsilon)$, як тільки $x \in U$. Нехай $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$, де $f_1(x) > f_2(x)$, $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2$, і $y = (y_1, y_2) = f(x)$. Покладемо також $y_i^0 = f_i(x_0)$, $i = = 1, 2$, і $y_0 = (y_1^0, y_2^0) = f(x_0)$. Для кожного $x \in X$ мають місце такі еквівалентності:

$$(F(x) \subseteq V(F(x_0), \varepsilon)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big(\{y_1, y_2\} \subseteq [y_1^0, y_1^0 + \varepsilon) \quad \text{або} \quad y_1 \in [y_1^0, y_1^0 + \varepsilon) \text{ і } y_2 \in [y_2^0, y_2^0 + \varepsilon)$$

$$\text{або} \quad \{y_1, y_2\} \subseteq [y_2^0, y_2^0 + \varepsilon)\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big(y \in T_\varepsilon(y_1^0) \quad \text{або} \quad y \in Q_\varepsilon(y_0) \quad \text{або} \quad y \in T_\varepsilon(y_2^0)\Big) \Leftrightarrow y \in V_\varepsilon(y_0).$$

Але неперервність відображення f у точці x_0 рівносильна умові: для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) \in V_\varepsilon(y_0)$, як тільки $x \in U$. Оскільки

$$(F(x) \subseteq V(F(x_0), \varepsilon)) \Leftrightarrow (f(x) \in V_\varepsilon(y_0)),$$

то доведення завершено.

4. Легко перевірити, що кожна компактна множина на прямій Зорґенфрея обов'язково не більш ніж зліченна. У цьому пункті ми покажемо, що на відміну від незв'язності ця властивість прямої Зоргенфрея переноситься і на простір $\mathbb{Y}$. Як і у випадку прямої Зорґенфрея, доведення спирається на наступний відомий результат: кожна цілком впорядкована частина A числової прямої $\mathbb{R}$ зі звичайним порядком є не більш ніж зліченною. Для його пояснення зауважимо, що така множина A подібна до деякого відтинка $O(\alpha) = \{\xi : \xi < \alpha\}$ у класі порядкових чисел. Отже, існує строго зростаюча трансфінітна послідовність $(a_\xi : \xi < \alpha)$ така, що $A = \{a_\xi : \xi < \alpha\}$. Для кожного $\xi < \alpha$ на інтервалі $(a_\xi, a_{\xi+1})$ виберемо деяке раціональне число r_ξ. При цьому якщо число α є ізольованим, тобто $\alpha = \beta + 1$, де β — деяке порядкове число, то покладемо $a_\alpha = a_\beta + 1$. Оскільки при $\xi < \eta < \alpha$ маємо $a_\xi < a_{\xi+1} \le a_\eta < a_{\eta+1}$, то $(a_\xi, a_{\xi+1}) \cap (a_\eta, a_{\eta+1}) = \varnothing$, а отже, $r_\xi \neq r_\eta$ при $\xi \neq \eta$. Тому відображення $\xi \mapsto r_\xi$ є бієкцією $O(\alpha)$ на деяку частину множини $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, яка, як відомо, є зліченною. Таким чином, відтинок $O(\alpha)$ і подібна до нього множина A будуть не більш ніж зліченними. Оскільки числова пряма $\mathbb{R}$ з оберненим порядком $\ge$ подібна до числової прямої зі звичайним порядком (подібністю буде відображення $x \mapsto -x$), то і будь-яка цілком впорядкована частина лінійно впорядкованої множини $(\mathbb{R}, \ge)$ також не більш ніж зліченна.

Твердження 4. *Кожна компактна підмножина K простору $\mathbb{Y}$ не більш ніж зліченна.*

Доведення. Нехай $\pi_i(y) = y_i$ для $y = (y_1, y_2) \in Y$, $i = 1, 2$. Доведемо, що проекції $A_i = \pi_i(K)$, $i = 1, 2$, множини K мають таку властивість: множина A_i не має строго зростаючої нескінченної послідовності.

Нехай $i = 1$. Припустимо, що множина A_1 має строго зростаючу послідовність чисел a_k, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $A_1 = \pi_1(K)$, то для кожного k існує число b_k таке, що точка $p_k = (a_k, b_k)$ належить до K. Покажемо, що множина $P = \{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ є замкненою у просторі $\mathbb{Y}$.

Нехай $p = (a, b) \in \mathbb{Y} \setminus P$. Можливі три випадки: 1) $a < a_1$; 2) $(\exists k)(a_k \le a < a_{k+1})$; 3) $(\forall k)(a_k < a)$.

Розглянемо їх.

1. Візьмемо $\varepsilon = a_1 - a$. Оскільки $\varepsilon > 0$, то ми можемо розглянути окіл $V_\varepsilon(p)$ точки p у просторі $\mathbb{Y}$. Для кожної точки $y = (y_1, y_2) \in V_\varepsilon(p)$ і довільного номера k маємо

$$y_1 < a + \varepsilon = a + a_1 - a = a_1 \le a_k,$$

звідки випливає, що $y \neq p_k$ для кожного k, отже, $p_k \notin V_\varepsilon(p)$ для кожного k, тобто $V_\varepsilon(p) \cap P = \varnothing$.

2. Розіб'ємо множину P на дві частини: $P_k = \{p_1, \ldots, p_k\}$ і $Q_k = \{p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots\}$. Оскільки за теоремою 1 $\mathbb{Y}$ — це T_1-простір, то множина P_k є замкненою в $\mathbb{Y}$. Тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $V_\varepsilon(p) \cap P_k = \varnothing$ і $\varepsilon \le a_{k+1} - a$. Але тоді так само, як і вище, легко встановити, що $V_\varepsilon(p) \cap Q_k = \varnothing$. Отже, і $V_\varepsilon(p) \cap P = \varnothing$.

3. Нехай $\alpha = \sup\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$. Якщо $\alpha \le b$, то $V_\varepsilon(p) \cap P = \varnothing$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Справді, всі точки околу $V_\varepsilon(p)$ знаходяться вище прямої $\mathbb{R} \times \{b\}$ або на ній, а точки p_k — нижче цієї прямої, бо $a_k < a_{k+1} \le \alpha \le b$. Припустимо, що $\alpha > b$. Тоді існує номер k такий, що $a_{k+1} > b$. Як і в попередньому випадку, існує таке $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(p) \cap P_k = \varnothing$ і $\varepsilon \le a_{k+1} - b$. Оскільки $b + \varepsilon < a_j$ при $j > k$, то $p_j \notin T_\varepsilon(b)$ при $j > k$. Крім того, $a_j < a$ для кожного j, отже, $p_j \notin Q_\varepsilon(p) \cap T_\varepsilon(a)$. В такому разі $p_j \notin V_\varepsilon(p)$ і при $j > k$. Тому $V_\varepsilon(p) \cap P = \varnothing$.

Таким чином, у кожному з розглянутих випадків ми знайшли такий окіл V точки p в $\mathbb{Y}$, що $V \bigcap P = \varnothing$, а це і показує, що множина P є замкненою в $\mathbb{Y}$.

Оскільки $P \subseteq K$ і множина K є компактною в $\mathbb{Y}$, то і P буде компактною підмножиною простору $\mathbb{Y}$. Покажемо, що це насправді не так.

Для кожного k розглянемо замкнену множину $P_{k-1} = \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$. Оскільки $p_k \notin P_{k-1}$ і $a_{k+1} - a_k > 0$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(p) \bigcap P_{k-1} = \varnothing$ і $\varepsilon \leq a_{k+1} - a_k$. Як і раніше, з останньої нерівності легко випливає, що $p_j \notin V_\varepsilon(p_k)$ при $j > k$. Тому для відкритої множини $G_k = V_\varepsilon(p_k)$ у просторі $\mathbb{Y}$ маємо $G_k \bigcap P = \{y_k\}$. Система $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин утворює покриття множини P, але з неї не можна виділити скінченного підпокриття, бо, вилучивши якусь множину G_k, ми не покриємо точку p_k. Отже, P не є компактною множиною в $\mathbb{Y}$. Отримана суперечність і доводить, що множина A_1 має потрібну властивість.

Нехай $i = 2$. Припустимо, що в множині A_2 є строго зростаюча послідовність чисел b_k, $k \in \mathbb{N}$. Для кожного k існує точка $p_k = (a_k, b_k) \in K$. Знову з'ясуємо, що множина $P = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ є замкненою в $\mathbb{Y}$. Нехай $p = (a, b) \in \in \mathbb{Y} \setminus P$ і $\beta = \sup\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Можливі такі випадки: 1) $\beta \leq b$; 2) $b < \beta \leq a$; 3) $\beta > a$. Розглянемо їх.

1. У цьому випадку $V_\varepsilon(p) \bigcap P = \varnothing$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, бо окіл $V_\varepsilon(p)$ знаходиться над прямою $\mathbb{R} \times \{b\}$, а точки p_k розташовані строго під нею.

2. З умови $b < \beta \leq a$ випливає, що $b < b_{k+1}$ для деякого k і $b_j < a$ для всіх j. Розглянемо знову множини $P_k = \{p_1, \ldots, p_k\}$ і $Q_k = P \setminus P_k$. Існує таке число $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(p) \bigcap P = \varnothing$ і $\varepsilon \leq b_{k+1} - b$. Оскільки $b + \varepsilon \leq b_{k+1}$, то точки p_j при $j > k$ не входять до множини $T_\varepsilon(b) \bigcup Q_\varepsilon(p)$, бо вона розміщена строго під прямою $\mathbb{R} \times \{b_{k+1}\}$, а точки p_j при $j > k$ знаходяться над нею. Крім того, $p_j \notin T_\varepsilon(a)$ для кожного j, бо $b_j < a$. Отже, $p_j \notin V_\varepsilon(p)$ при $j > k$..

3. Оскільки $\beta > a$, то існує таке k, що $b_{k+1} > a$. Тоді можна знайти таке $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(p) \bigcap P_k = \varnothing$ і $\varepsilon \leq b_{k+1} - a$. З нерівності $a + \varepsilon \leq b_{k+1}$ випливає, що окіл $V_\varepsilon(p)$ лежить строго під прямою $\mathbb{R} \times \{b_{k+1}\}$, а точки p_j при $j > k$ знаходяться над нею. Тому $V_\varepsilon(p) \bigcap P = \varnothing$.

Таким чином, замкненість множини P встановлено. Як і раніше, P буде компактною множиною у просторі $\mathbb{Y}$. Але це не так, тому що існує послідовність відкритих в $\mathbb{Y}$ множин у G_k таких, що $G_k \bigcap P = \{p_k\}$ для кожного k. Справді, зафіксуємо якийсь номер k. Припустимо, що $\beta \leq a_k$. Оскільки $b_{k+1} - - b_k > 0$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $V_\varepsilon(p_k) \bigcap P_{k-1} = \varnothing$ і $\varepsilon \leq b_{k+1} - b_k$. З нерівності $b_k + \varepsilon \leq b_{k+1} \leq b_j$ при $j > k$ випливає, що $p_j \notin T_\varepsilon(b_k) \bigcup Q_\varepsilon(p)$ при $j > k$. Але $b_j < b_{j+1} \leq \beta \leq a_k$ для всіх j, отже, $p_j \notin T_\varepsilon(a_k)$ для всіх j. Таким чином, для відкритої множини $G_k = V_\varepsilon(p_k)$ у цьому випадку матимемо $G_k \bigcap P = = \{p_k\}$. Нехай $\beta > a_k$. Тоді існує номер m такий, що $b_m > a_k$ і $m > k$. В такому разі можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що $V_\varepsilon(p_k) \bigcap (P \setminus \{p_k\}) = \varnothing$ і $\varepsilon \leq b_m - a_k$. З нерівності $a_k + \varepsilon \leq b_m$ випливає, що $p_j \notin V_\varepsilon(p_k)$ при $j \geq m$, бо окіл $V_\varepsilon(p_k)$ лежить строго під прямою $\mathbb{R} \times \{b_m\}$, а точки p_j при $j \geq m$ знаходяться над нею або на ній. Таким чином, покладаючи $G_k = V_\varepsilon(p_k)$, і в цьому випадку маємо $G_k \cap P = \{p_k\}$.

Отримана суперечність показує, що і множина A_2 має потрібну властивість. Оскільки множини A_i, $i = 1, 2$, не містять строго зростаючих нескінченних послідовностей, то вони є цілком впорядкованими підмножинами множини $(\mathbb{R}, \geq)$. Тоді згідно з зауваженням, наведеним перед формулюванням твердження 4, множини A_i не більш ніж зліченні. В такому разі не більш ніж зліченним буде і їх добуток $A_1 \times A_2$. Але $K \subseteq A_1 \times A_2$. Тому і множина K є не більш ніж зліченною.

5. Нагадаємо, що континуум — це зв'язний компакт [6, с. 522]. Оскільки континуум є зв'язним, то його не можна розбити на довільне скінченне число непорожніх замкнених множин, яке більше або дорівнює двом. Більш того, згідно з теоремою Серпінського [6, с. 526], будь-який континуум не можна розбити на зліченну кількість непорожніх замкнених множин. Це твердження ми використаємо в доведенні основного результату. Щоб його сформулювати в належній загальності, введемо одне підсилення поняття зв'язності, яке разом з тим є ослабленням поняття лінійної зв'язності. Топологічний простір X ми назвемо *c-зв'язним*, якщо для будь-яких його точок x_1 і x_2 існує такий континуум C в X, що $\{x_1, x_2\} \subseteq C$.

Теорема. *Нехай X — c-зв'язний топологічний простір і $F: X \to \mathbb{L}$ — неперервне зверху двозначне відображення. Тоді F є сталим.*

Доведення. Співставимо відображенню F неперервну функцію $F: X \to \mathbb{Y}$, як це пояснено в п. 3, і доведемо, що вона є сталою. Нехай x_1 і x_2 — довільні точки з X. Існує такий континуум C в X, що $x_i \in C$, $i = 1, 2$. Множина $K = f(C)$ є континуумом в $\mathbb{Y}$, зокрема вона є компактною підмножиною $\mathbb{Y}$. За твердженням 4 множина K не більш ніж зліченна. Оскільки за твердженням 1 кожна одноточкова множина $\{y\}$ в $\mathbb{Y}$ є замкненою, то для кожного $y \in K$ множини $C_y = C \cap f^{-1}(y)$ замкнені в C. При цьому $C_{y'} \cap C_{y''} = \varnothing$, $y' \neq y''$. Оскільки множина K не більш ніж зліченна, то з теореми Серпінського випливає, що існує таке $y_0 \in K$, що $C_{y_0} = C$. В такому разі $f(x_1) = y_0 = f(x_2)$, отже, $f(x_1) = f(x_2)$. Це показує, що функція f є сталою, а отже, сталим буде і відображення F.

Оскільки $\tilde{\mathbb{Y}}$ вже не T_1-простір, то ці міркування не підходять для неперервних зверху відображень F, які в кожній точці набувають не більше двох значень. Насправді такі відображення можуть взагалі не мати точок локальної сталості (відповідний приклад наведено в [3, 7]).

1. *Кожукар О. Г., Маслюченко В. К.* Навколо теореми Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191 – 192. – С. 61 – 66.
2. *Маслюченко В. К., Фотій О. Г.* Неперервні знизу відображення зі значеннями в прямій Зоргенфрея // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – С. 203 – 206.
3. *Маслюченко В. К., Фотій О. Г.* Неперервні зверху відображення зі значеннями в прямій Зоргенфрея // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 269. – С. 68 – 72.
4. *Кендеров П. С.* Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности // Успехи мат. наук. – 1980. – **35**, № 3. – С. 194 – 196.
5. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, № 1. – P. 167 – 176.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
7. *Маслюченко В. К., Фотій О. Г.* Неперервні зверху відображення зі значеннями в прямій Зоргенфрея // Міжнар. конф. „Аналіз і суміжні питання" (Львів, 17 – 20 листоп., 2005 р.): Тези доп. – Львів, 2005. – С. 67 – 68.

Одержано 08.12.2005