УДК 519.21

О. Г. Кукуш, М. Я. Полеха (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

КОНЗИСТЕНТНА ОЦІНКА У ВЕКТОРНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ У ЗМІННИХ ПРИ НЕВІДОМІЙ КОВАРІАЦІЙНІЙ СТРУКТУРІ ПОХИБОК

A linear multivariate errors-in-variables model $AX \approx B$ is considered, where the data matrices A and B are observed with errors and a matrix parameter X is to be estimated. In the situation of lack of information about error covariance structure, an estimator is proposed that converges in probability to X as the number of rows in A tends to infinity. Sufficient conditions for such convergence and for the asymptotic normality of the estimator are found.

Рассматривается векторная модель с погрешностями в переменных $AX \approx B$, где матрицы A, B наблюдаются с погрешностями и необходимо оценить матричный параметр X. При условиях, когда нет достаточной информации о ковариационной структуре погрешностей, предложена оценка, сходящаяся по вероятности к X, когда количество строк матрицы A стремится к бесконечности. Установлены достаточные условия такой сходимости, а также достаточные условия асимптотической нормальности оценки.

1. Вступ. Останнім часом інтенсивно розвивається теорія переозначених систем лінійних рівнянь вигляду $AX = B$, де матриці A і B спостерігаються з похибками, X — матричний параметр, який потрібно оцінити. Подібні задачі виникають при обробці результатів хімічних дослідів, сигналів, ідентифікації динамічних систем тощо.

У випадку, коли сукупна коваріаційна структура шуму відома з точністю до сталого множника, в [1, 2] встановлено консистентність оцінки повних найменших квадратів. У роботах [3, 4] розглянуто випадок, коли коваріаційна структура похибок матриці A відома з точністю до одного множника, а подібна структура для матриці B — з точністю до іншого множника. При цьому оцінку побудовано за емпіричними моментами другого порядку на основі ідеї кластеризації. Вперше цю ідею було застосовано у [5] для лінійної скалярної моделі з похибками у змінних, причому оцінка ґрунтувалась на моментах першого порядку. Ми також будемо використовувати ідею кластерізації та емпіричні моменти першого порядку.

Введемо наступні позначення: $\|A\|$ — норма Фробеніуса матриці A, I_p — одинична матриця розміру p, E — символ математичного сподівання, tr — слід матриці, $\lambda_{\min}(V)$ та $\lambda_{\max}(V)$ — найменше та найбільше власні значення матриці V, $O_p(1)$ — послідовність стохастично обмежених випадкових величин.

Опишемо коротко будову статті. У п. 2 розглянуто модель спостережень і побудовано оцінку. У п. 3 доведено її консистентність, коли кількість рядків матриці A прямує до нескінченності. Строгу консистентність та асимптотичну нормальність оцінки встановлено у пп. 4, 5, а п. 6 містить висновки.

2. Модель спостережень і побудова оцінки. Розглянемо модель

$$AX \approx B, \tag{1}$$

де матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ та $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ спостерігаються, а $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ — невідома матриця параметрів. Символічний запис (1) означає, що

$$A = \bar{A} + \tilde{A}, \quad B = \bar{B} + \tilde{B}, \quad \bar{A}X = \bar{B}. \tag{2}$$

Тут $\bar{A}$, $\bar{B}$ — невипадкові матриці, $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ — матриці, складені з похибок спостережень. Наша мета полягає в побудові консистентної оцінки матричного параметра X при $m \to \infty$, якщо немає достатньої інформації про коваріаційну структуру похибок.

Припустимо, що задано t, $t \ge n$, незалежних копій моделі (1):

$$A(k)X \approx B(k), \qquad k = \overline{1, t}, \tag{3}$$

де $A(k) \in \mathbb{R}^{m(k)\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{m(k)\times p}$, $m(k)$ — деякі натуральні числа. Модель (3) означає наступне: спостерігаються матриці

$$A(k) = \overline{A}(k) + \tilde{A}(k), \qquad B(k) = \overline{B}(k) + \tilde{B}(k), \qquad 1 \le k \le t,$$

причому для невідомих невипадкових матриць $\overline{A}(k)$, $\overline{B}(k)$ виконується

$$\overline{A}(k)X = \overline{B}(k), \qquad 1 \le k \le t.$$

Нехай $A(k) = [a_1(k), \ldots, a_{m(k)}(k)]^T$, $B(k) = [b_1(k), \ldots, b_{m(k)}(k)]^T$ і так само позначатимемо рядки матриць $\overline{A}(k)$, $\overline{B}(k)$, $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$. Оцінку матриці X будуємо, використовуючи емпіричні моменти спостережень першого порядку. Нехай

$$a_c(k) = \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} a_i(k),$$

$$b_c(k) = \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k),$$

$$A_c = [a_c(1), \ldots, a_c(t)]^T, \qquad B_c = [b_c(1), \ldots, b_c(t)]^T.$$

Для спостережень $a_c(k)$, $b_c(k)$ маємо

$$a_c^T(k)X \approx b_c^T(k), \qquad 1 \le k \le t. \tag{4}$$

Для осередненої моделі (4) оцінку $\hat{X}$ будуємо звичайним методом найменших квадратів, нехтуючи наявністю похибок у спостереженнях $a_c(k)$:

$$\hat{X} := (A_c^T A_c)^{\dagger} A_c^T B_c. \tag{5}$$

Тут $W^{\dagger}$ — обернена матриця Мура – Пенроуза до матриці W [6, с. 79].

3. Консистентність оцінки. Далі кількість рядків $m(k)$ матриці $A(k)$ буде необмежено зростати, тому наступні умови накладаються на рядки $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ з довільним $i \in \mathbb{N}$:

i) $\mathrm{E}\tilde{a}_i(k) = 0$, $\mathrm{E}\tilde{b}_i(k) = 0$ для будь-яких $i \ge 1$, $k = \overline{1, t}$;

ii) існує така стала c, що для довільних $i \ge 1$ та $k = \overline{1, t}$

$$\mathrm{E}\|\tilde{a}_i(k)\|^2 \le c, \qquad \mathrm{E}\left\|\tilde{b}_i(k)\right\|^2 \le c;$$

iii) випадкові вектори $\left\{[\tilde{a}_i^T(k), \tilde{b}_i^T(k)],\ i \ge 1,\ 1 \le k \le t\right\}$ незалежні.

Позначимо $\overline{A}_c = [\overline{a}_c(1), \ldots, \overline{a}_c(t)]^T$, $m_{\min} = \min(m(1), \ldots, m(t))$.

Наступна умова забезпечує асимптотичну ідентифікованість осередненої моделі спостережень (4):

iv) $\lambda_{\min}(\overline{A}_c^T \overline{A}_c)\, m_{\min} \to \infty$ при $m_{\min} \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* i) – iv). *Тоді оцінка* (5) *є слабко консистентною, тобто* $\left\|\hat{X} - X\right\| \xrightarrow{P} 0$ *при* $m_{\min} \to \infty$.

Доведення. 1°. *Невиродженість матриці* $A_c^T A_c$. Аналогічно до матриці

$\overline{A}_c$ будемо використовувати осереднені матриці $\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_c$. Позначимо $V = \overline{A}_c^T \overline{A}_c$. Маємо

$$A_c^T A_c = V + \tilde{A}_c^T \overline{A}_c + \overline{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c.$$

З умови iv) випливає, що $\overline{A}_c^T \overline{A}_c > 0$ при $m_{\min} \geq m_0$. Тут і далі будемо використовувати нерівності для симетричних матриць в сенсі Льовнера [7, с. 467]: $T > W$ означає, що $T - W$ є додатно визначеною, а $T \geq W$ — що $T - W$ є невід'ємно визначеною.

При $m_{\min} \geq m_0$ маємо

$$A_c^T A_c \geq V^{1/2}\left(I_n + V^{-1/2}(\overline{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \overline{A}_c) V^{-1/2}\right) V^{1/2}; \tag{6}$$

з умови ii) отримуємо

$$\mathrm{E}\left\| \tilde{A}_c \right\|^2 = \frac{O(1)}{m_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \left\| \tilde{A}_c \right\| = \frac{O_p(1)}{\sqrt{m_{\min}}}.$$

Далі,

$$\left\| V^{-1/2} \overline{A}_c^T \right\| = \sqrt{\mathrm{tr}(V^{-1/2} \overline{A}_c^T \overline{A}_c V^{-1/2})} = \sqrt{n},$$

$$\left\| V^{-1/2} \overline{A}_c^T \tilde{A}_c V^{-1/2} \right\| \leq \left\| V^{-1/2} \overline{A}_c^T \right\| \left\| \tilde{A}_c \right\| \left\| V^{-1/2} \right\| =$$

$$= \frac{O_p(1)}{\sqrt{m_{\min}}} \left\| V^{-1/2} \right\| = \frac{O_p(1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(V)\, m_{\min}}},$$

і за умовою iv) це прямує до 0 за ймовірністю при $m_{\min} \to \infty$. Тоді

$$\left\| V^{-1/2} \tilde{A}_c^T \overline{A}_c V^{-1/2} \right\| = \left\| V^{-1/2} \overline{A}_c^T \tilde{A}_c V^{-1/2} \right\| \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad m_{\min} \to \infty.$$

Отже, з (6) випливає, що матриця $A_c^T A_c$ є невиродженою з імовірністю, яка прямує до 1 при $m_{\min} \to \infty$. Оскільки нас цікавить асимптотична поведінка оцінки (5), можемо вважати, що $A_c^T A_c$ є невиродженою, що приводить до спрощеного виразу для оцінки:

$$\hat{X} := (A_c^T A_c)^{-1} A_c^T B_c. \tag{7}$$

2°. *Перетворення оцінки.* З (7) після елементарних перетворень маємо

$$\hat{X} - X = V^{-1/2}\left(I_n + V^{-1/2}(R_1 + R_2) V^{-1/2}\right)^{-1} V^{-1/2} (R_3 + R_4 - R_1'' X - R_2 X), \tag{8}$$

де $R_1 =: \tilde{A}_c^T \overline{A}_c + \overline{A}_c^T \tilde{A}_c =: R_1' + R_1''$, $R_2 =: \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c$, $R_3 =: \overline{A}_c^T \tilde{B}_c$, $R_4 =: \tilde{A}_c^T \tilde{B}_c$.

3°. *Збіжність залишків.* Як ми бачили в п. 1°,

$$\left\| V^{-1/2} R_1 V^{-1/2} \right\| \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad m_{\min} \to \infty.$$

Далі, $\| R_2 \| \leq \left\| \tilde{A}_c \right\|^2 = \dfrac{O_p(1)}{m_{\min}}$, тому

$$\left\| V^{-1/2} R_2 V^{-1/2} \right\| = \frac{O_p(1)}{\lambda_{\min}(V)\, m_{\min}} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad m_{\min} \to \infty.$$

Отже, при $m_{\min} \to \infty$

$$\left(I_n + V^{-1/2}(R_1 + R_2)V^{-1/2}\right)^{-1} \xrightarrow{\;p\;} I_n.$$

Аналогічно

$$\left\|V^{-1/2}\right\|\left\|V^{-1/2}R_3\right\| \xrightarrow{\;p\;} 0, \qquad \left\|V^{-1/2}\right\|\left\|V^{-1/2}R_4\right\| \xrightarrow{\;p\;} 0.$$

Шукана збіжність $\left\|\hat{X} - X\right\| \xrightarrow{\;p\;} 0$ при $m_{\min} \to \infty$ випливає тепер із розкладу (8) та встановлених збіжностей залишків.

Зауваження **1.** Основною умовою є умова iv), але вона є досить м'якою.

Справді, розглянемо одновимірний скалярний випадок $n = p = 1$: $\bar{b}_i = x\bar{a}_i$, $b_i = \bar{b}_i + \tilde{b}_i$, $a_i = \bar{a}_i + \tilde{a}_i$, $i = \overline{1, m}$. Оцінка матиме вигляд

$$\hat{x} = \frac{m^{-1}\sum_{i=1}^{m} b_i}{m^{-1}\sum_{i=1}^{m} a_i} = x + \frac{V_m - xU_m}{1 + U_m},$$

де

$$V_m := \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{b}_i\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i\right)^{-1}, \qquad U_m := \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_i\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i\right)^{-1}.$$

При однакових дисперсіях $\tilde{a}_i$ та однакових дисперсіях $\tilde{b}_i$ $V_m \xrightarrow{\;p\;} 0$ та $U_m \xrightarrow{\;p\;} 0$ тоді і лише тоді, коли $m\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i\right)^2 \to \infty$. Але це якраз і є умова iv) у цьому скалярному випадку при $t = 1$.

Зауваження **2.** Умову ii) можна замінити слабшою:

ii)′ $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le t}}\left(\mathrm{E}\left\|\tilde{a}_i(k)\right\|^2 + \mathrm{E}\left\|\tilde{b}_i(k)\right\|^2\right) \le \text{const}.$

При цьому теорема залишатиметься справедливою.

Зауваження **3.** Умову iii) можна легко послабити таким чином:

iii)′ для кожного $k = \overline{1, t}$ послідовність випадкових векторів $\{[\tilde{a}_i^T(k), \tilde{b}_i^T(k)],\ i \ge 1\}$ є фінітно залежною.

Нагадаємо, що фінітна залежність послідовності випадкових векторів $\{z_i\}$ означає існування такого номера s, що при кожному $j \ge 1$ системи векторів $\{z_i,\ i = \overline{1, j}\}$ та $\{z_i,\ i \ge j + s\}$ є незалежними. Умову iii)′ можна використовувати в моделі зі структурними зв'язками [2] при невідомій коваріаційній матриці структурних параметрів.

Зауваження **4.** Оцінку (5) можна застосовувати на практиці до моделі (2) таким чином. Розбиття матриці A на блоки

$$A = [A^T(1), A^T(2), \ldots, A^T(t)]^T, \qquad t = n, \quad A(k) \in \mathbb{R}^{m(k)\times n}, \quad k = \overline{1, n},$$

слід шукати так, щоб (з огляду на умову iv)) $\Phi\big(m(1), \ldots, m(n)\big) := \lambda_{\min}(A_c^T A_c)$ було максимальним. При цьому $m_{\min} = \min\big(m(1), \ldots, m(n)\big)$ не повинно бути малим; можна вимагати, наприклад, щоб $m_{\min} \ge m/2n$. Звичайно, кількість блоків t можна задавати рівною $n + 1$, $n + 2$ тощо. Зазначимо, що при $t = n$ та невиродженій матриці A_c оцінка (5) спрощується: $\hat{X} = A_c^{-1}B_c$.

4. Строга консистентність. Посилимо умови ii) та iv). Вважатимемо, що числа $m(k)$ змінюються узгоджено:

$$m(k) = f_k(m), \quad 1 \le k \le t, \text{ де } f_k(m) \to \infty \quad \text{при} \quad m \to \infty, \quad k = \overline{1, t}. \tag{9}$$

Тоді будемо вимагати виконання умов:

v) для фіксованого дійсного $r > 1$ існує стала c така, що для всіх $i \ge 1$ та $k = \overline{1, t}$

$$\mathrm{E}\|\tilde{a}_i(k)\|^{2r} \le c, \qquad \mathrm{E}\left\|\tilde{b}_i(k)\right\|^{2r} \le c;$$

vi) для фіксованого $m_0 \ge 1$ та r з умови v) при $m(k) = f_k(m)$, $k = \overline{1, t}$, виконується

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{\lambda_{\max}^r(\overline{A}_c^T \overline{A}_c)}{\lambda_{\min}^{2r}(\overline{A}_c^T \overline{A}_c)\, m_{\min}^r} < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай числа* $m(k)$ *змінюються згідно з* (9) *та виконано умови* i), iii), v) *та* vi). *Тоді оцінка* (5) *є строго консистентною, тобто* $\left\|\hat{X} - X\right\| \to 0$ *при* $m \to \infty$ *майже напевно* (*м.н.*).

Доведення. Будемо розглядати $m \ge m_0$, для яких V — невироджена матриця. Почнемо з матриці

$$A_c^T A_c = V\Big(I_n + V^{-1}(\overline{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \overline{A}_c + \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c)\Big).$$

З моментної нерівності Розенталя [8] та умови v) маємо

$$\mathrm{E}\left\|\tilde{A}_c\right\|^{2r} \le \mathrm{const}\cdot m_{\min}^{-r},$$

$$\mathrm{E}\left\|V^{-1}\overline{A}_c^T \tilde{A}_c\right\|^{2r} \le \left\|V^{-1}\right\|^{2r}\left\|\overline{A}_c\right\|^{2r}\cdot \mathrm{const}\cdot m_{\min}^{-r} \le \mathrm{const}\cdot \frac{\lambda_{\max}^r(V)}{\lambda_{\min}^{2r}(V)\, m_{\min}^r}.$$

Тому за умовою vi)

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \mathrm{E}\left\|V^{-1}\overline{A}_c^T \tilde{A}_c\right\|^{2r} < \infty,$$

і за лемою Бореля – Кантеллі та нерівністю Чебишова $\left\|V^{-1}\overline{A}_c^T \tilde{A}_c\right\| \to 0$ при $m \to \infty$ м.н. Так само $\left\|V^{-1}\tilde{A}_c^T \overline{A}_c\right\| \to 0$ при $m \to \infty$ м.н. Також маємо

$$\mathrm{E}\left\|V^{-1}\tilde{A}_c^T \tilde{A}_c\right\|^{r} \le \left\|V^{-1}\right\|^{r}\mathrm{E}\left\|\tilde{A}_c\right\|^{2r} \le \mathrm{const}\cdot \frac{1}{\lambda_{\min}^r(V)\, m_{\min}^r},$$

і з умови vi) отримуємо

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \mathrm{E}\left\|V^{-1}\tilde{A}_c^T \tilde{A}_c\right\|^{r} < \infty.$$

Тому за лемою Бореля – Кантеллі $\left\|V^{-1}\tilde{A}_c^T \tilde{A}_c\right\| \to 0$ при $m \to \infty$ м.н.

Із встановлених збіжностей випливає, що м.н. при $m \to \infty$

$$A_c^T A_c = V(I_n + o(1)),$$

тому з імовірністю 1 матриця $A_c^T A_c$ є невиродженою, починаючи з деякого випадкового номера $m_1 = m_1(\omega)$, звідки $\hat{X} = (A_c^T A_c)^{-1} A_c^T B_c$.

Покладемо $\hat{\Delta} = \hat{X} - X$. При $m \geq m_1(\omega)$ маємо

$$V^{-1} A_c^T A_c \hat{\Delta} = V^{-1} A_c^T \tilde{B}_c + V^{-1}(-\overline{A}_c^T \tilde{A}_c - \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c) X. \tag{10}$$

У лівій частині отримуємо $V^{-1} A_c^T A_c \to I_n$, $m \to \infty$ м.н., а права частина прямує до нуля при $m \to \infty$ м.н. Це випливає із встановлених вище збіжностей, а також із збіжностей $\left\| V^{-1} \overline{A}_c^T \tilde{B}_c \right\| \to 0$, $\left\| V^{-1} \tilde{A}_c^T \tilde{B}_c \right\| \to 0$, $m \to \infty$, м.н., які доводяться аналогічно. Тому з (10) безпосередньо отримуємо шукане: $\left\| \hat{\Delta} \right\| \to 0$, $m \to \infty$, м.н.

5. Асимптотична нормальність. У даному пункті також вважатимемо, що $m(k)$ змінюються згідно з (9). Більш того, нехай ці номери зростають регулярно у наступному сенсі:

vii) при кожному $k = \overline{1, t}$ існує додатна і скінченна границя

$$\lambda_k := \lim_{m \to \infty} \frac{m}{f_k(m)}.$$

Також вимагатимемо стабілізації у середньому рядків матриці $\overline{A}_c$:

viii) $\overline{a}_c(k) \to \overline{a}_\infty(k)$ при $m \to \infty$, причому граничні вектори $\overline{a}_\infty(1), \ldots, \overline{a}_\infty(t)$ є лінійно незалежними.

Нехай $\overline{A}_\infty = [\overline{a}_\infty(1), \ldots, \overline{a}_\infty(t)]^T$. Зауважимо, що за умови viii) матриця $V = \overline{A}_c^T \overline{A}_c$ прямуватиме до додатно визначеної матриці $V_\infty = \overline{A}_\infty^T \overline{A}_\infty$. Щодо похибок вимагатимемо незалежності $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ та стабілізації (у середньому) коваріаційної структури:

ix) випадкові вектори $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, i \geq 1, k = \overline{1, t}\}$ є незалежними, причому існують границі

$$S_a(k) := \lim_{m(k) \to \infty} \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} \mathrm{E}\, \tilde{a}_i(k) \tilde{a}_i^T(k),$$

$$S_b(k) := \lim_{m(k) \to \infty} \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} \mathrm{E}\, \tilde{b}_i(k) \tilde{b}_i^T(k),$$

де $S_a(k)$, $S_b(k)$, $k = \overline{1, t}$, — додатно визначені матриці.

Теорема 3. *Нехай числа* $m(k)$ *змінюються згідно з* (9) *та виконано умови* i), v) – ix). *Тоді при* $m \to \infty$

$$\sqrt{m}(\hat{X} - X) \xrightarrow{d} V_\infty^{-1} \sum_{k=1}^{t} \overline{a}_\infty(k) \sqrt{\lambda_k} (\gamma_k^T S_a^{1/2}(k) X + \varepsilon_k^T S_b^{1/2}(k)) \quad при \quad m \to \infty,$$

де $\{\gamma_k, \varepsilon_k, k = \overline{1, t}\}$ — *незалежні випадкові вектори,* $\gamma_k \sim N(0, I_n)$, $\varepsilon_k \sim N(0, I_p)$, $k = \overline{1, t}$.

Доведення. З імовірністю, що прямує до 1 при $m \to \infty$, виконується $A_c^T A_c \hat{X} = A_c^T B_c$, тому

$$(I_n + o_p(1)) \sqrt{m}\, \hat{\Delta} = V^{-1} \sqrt{m} (-R_1'' X - R_2 X + R_3 + R_4), \tag{11}$$

де члени R_i, R_1'' такі самі, як і в (8). Матриця $V^{-1} \to V_\infty^{-1}$, $m \to \infty$;

$$\sqrt{m}\,R_2 = \sqrt{m}\,\tilde{A}_c^T\,\tilde{A}_c = \frac{O_p(1)}{\sqrt{m}} \xrightarrow{p} 0, \quad m \to \infty;$$

аналогічно $\sqrt{m}\,R_4 \xrightarrow{p} 0$, $m \to \infty$. Залишилось дослідити збіжність членів R_1'' та R_3. Маємо

$$\sqrt{m}\,R_1'' = \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_c(k)\sqrt{\frac{m}{m(k)}}\,\frac{1}{\sqrt{m(k)}}\sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{a}_i^T(k).$$

Тут $\dfrac{m}{m(k)} \to \lambda_k$, $m \to \infty$, і за центральною граничною теоремою (ЦГТ) у формі Ляпунова при $k = \overline{1, t}$

$$\frac{1}{\sqrt{m(k)}}\sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{a}_i(k) \xrightarrow{d} N(0, S_a(k)) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тому

$$\sqrt{m}\,R_1'' \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_\infty(k)\sqrt{\lambda_k}\,\gamma_k^T\,S_a^{1/2}(k),$$

де γ_k — випадкові вектори з теореми 3. Нарешті,

$$\sqrt{m}\,R_3 = \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_c(k)\sqrt{\frac{m}{m(k)}}\,\frac{1}{\sqrt{m(k)}}\sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{b}_i^T(k),$$

і знову за ЦГТ у формі Ляпунова при $k = \overline{1, t}$

$$\frac{1}{\sqrt{m(k)}}\sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{b}_i(k) \xrightarrow{d} N(0, S_b(k)) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тому

$$\sqrt{m}\,R_3 \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_\infty(k)\sqrt{\lambda_k}\,\varepsilon_k^T\,S_b^{1/2}(k),$$

де ε_k — випадкові вектори з теореми 3. Оскільки за умовою ix) R_1'' та R_3 незалежні між собою, то з (11) та леми Слуцького отримуємо шукану збіжність послідовності $\sqrt{m}\,\hat{\Delta}$.

Теорему доведено.

З огляду на теорему 3 на базі оцінки $\hat{X}$ можна побудувати асимптотичні довірчі еліпсоїди для векторного параметра vec (X). Для цього потрібно вміти консистентно оцінювати параметри граничного розподілу. Для λ_k наближенням є відношення $\dfrac{m}{m(k)}$ (у теоремі 3 можна в якості m узяти $m_{\min}$); залишилося побудувати наближення для величин $\bar{a}_\infty(k)$, $S_a(k)$ та $S_b(k)$ (наближенням для X є консистентна оцінка $\hat{X}$). Отримуємо

$$\bar{a}_\infty(k) \approx \frac{1}{m(k)}\sum_{i=1}^{m(k)} \bar{a}_i(k) \approx a_c(k).$$

Тут і далі наближені рівності означають, що різниця між правою і лівою частинами є $o_p(1)$ при $m \to \infty$. За методом моментів маємо

$$S_b(k) \approx \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k)\Big(b_i^T(k) - a_i^T(k)\hat{X}\Big),$$

$$S_a(k) \approx \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} a_i(k)a_i^T(k) - (\hat{X}\hat{X}^T)^{\dagger}\hat{X}\frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k)a_i^T(k).$$

Останнє співвідношення отримано при умові, що X — матриця рангу n (зокрема, необхідно, щоб виконувалась нерівність $n \le p$).

6. Висновки. Розглянуто векторну модель з похибками у змінних при відсутності інформації щодо коваріаційної структури похибок. Основним припущенням було те, що спостерігаються незалежні копії моделі. На практиці це означає, що дані спостережень можна розділити на відокремлені групи — кластери.

Проте в практичних задачах наявні певні відомості про структуру похибок. Подальші дослідження будуть спрямовані на те, щоб зменшити кількість кластерів, використовуючи додаткову апріорну інформацію. Іншим напрямом досліджень буде побудова критерію згоди для моделі (2), він буде узагальненням відповідного критерію для поліноміальної моделі з похибками у змінних [9].

1. *Kukush A., Van Huffel S.* Consistency of element-wise weighted total least squares estimator in multivariate errors-in-variables model $AX = B$ // Metrika. – 2004. – **59**, № 1. – P. 75 – 97.
2. *Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S.* Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model // J. Statist. Planning and Inference. – 2005. – **133**, № 2. – P. 315 – 358.
3. *Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S.* Estimation in a linear multivariate measurement error model with clustering in the regressor // Int. Rept 05-170. ESAT-SISTA (Leuven, Belgium, 2005).
4. *Markovsky I., Kukush A., Van Huffel S.* On errors-in-variables estimation with unknown noise variance ratio // 14th IFAC Symp. System Identification (Newcastle, Australia, 2006). – P. 317 – 323.
5. *Wald A.* The fitting of straight lines if both variables are subject to error // Ann. Math. Statist. – 1940. – № 11. – P. 284 – 300.
6. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
7. *Маршал А., Олкин И.* Неравенства: теория и ее приложения. – М.: Мир, 1983. – 572 с.
8. *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, approximation, and statistical applications. – New York: Springer, 1998. – 244 p.
9. *Cheng C.-L., Kukush A.* A goodness-of-fit test in a polinomial errors-in-variables model // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 527 – 543.

Одержано 16.03.2006