УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

We find asymptotic equalities for upper bounds of approximations by interpolational trigonometric polynomials in the metric L_1 on classes of convolutions of periodic infinitely differentiable functions.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами у метриці L_1 на класах згорток періодичних нескінченно диференційовних функцій.

Позначимо через L_1 простір 2π-періодичних сумовних на $[-\pi, \pi]$ функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1} = \|\varphi\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\,dt;$$

через $C^{\psi}_{\beta,1}$ — введені О. І. Степанцем [1] класи 2π-періодичних неперервних функцій f $(f \in C)$, які допускають зображення у вигляді згортки з фіксованими ядрами $\Psi_\beta(t)$ таким чином:

$$C^{\psi}_{\beta,1} = \left\{ f \in C \colon f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt,\ a_0 \in R,\ \varphi \in U_1^0 \right\},$$

де

$$U_1^0 \overset{\text{df}}{=} \left\{ \varphi \in L_1 \colon \|\varphi\|_1 \le 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0 \right\},$$

а ряд Фур'є функції $\Psi_\beta(t)$ має вигляд

$$S[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \psi(k) > 0, \qquad k \in N, \qquad \beta \in R. \tag{1}$$

Послідовність $\psi(k)$, що визначає ядро $\Psi_\beta(t)$ та клас $C^{\psi}_{\beta,1}$, можна вважати слідом на множині N натуральних чисел деякої неперервної функції $\psi(v)$ неперервного аргументу, заданої на $[1, \infty)$. Множину всіх опуклих донизу функцій $\psi(v)$, $v \in [1, \infty)$, що задовольняють умову

$$\lim_{v \to \infty} \psi(v) = 0,$$

позначимо через $\mathfrak{M}$. Згідно з [1, с. 93] кожній функції ψ із $\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) \overset{\text{df}}{=} \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{2}$$

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) \overset{\text{df}}{=} \frac{t}{\eta(t) - t}, \tag{3}$$

$\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до $\psi(\cdot)$. Через $\mathfrak{M}_\infty$ позначимо підмножину функцій ψ із $\mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(t)$ монотонно зростає до нескінченності

($\mu(t)\uparrow\infty$). Як показано в [1, с. 97], функція ψ із $\mathfrak{M}_\infty$ спадає до нуля швидше довільної степеневої функції, тобто

$$\forall r\in N \quad \lim_{k\to\infty} k^r\psi(k) = 0.$$

Тому ряд Фур'є довільної функції $f\in C^\psi_{\beta,1}$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\beta\in R$, можна диференціювати довільне число разів, і в результаті одержуватимемо рівномірно збіжні ряди. Таким чином, класи $C^\psi_{\beta,1}$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, є класами нескінченно диференційовних функцій.

Для довільної 2π-періодичної неперервної функції $f(x)$ через $\tilde S_n(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k=0,1,\dots,2n$, тобто такий, що

$$\tilde S_n(f;x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \qquad k = 0,1,\dots,2n.$$

У даній статті одержано асимптотичні оцінки відхилень інтерполяційних поліномів $\tilde S_n(f;x)$ на класах функцій $C^\psi_{\beta,1}$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, в метриці простору L_1, тобто досліджено швидкість спадання до нуля величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,1})_1 = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,1}} \left\| f(x)-\tilde S_{n-1}(f;x)\right\|_1$$

при $n\to\infty$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\beta\in R$. *Тоді при* $n\to\infty$ *виконується рівність*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,1})_1 = \frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\big(\psi(n)+\psi(3n)\ln^+(\eta(n)-n)\big), \tag{4}$$

де $\eta(\cdot)=\eta(\psi;\cdot)$ — *характеристика, що означається формулою* (2),

$$\ln^+(t) = \begin{cases}\ln t, & t>1,\\ 0, & t\le 1,\end{cases}$$

а $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* n *і* β.

Доведення. Нехай $f\in C^\psi_{\beta,1}$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\beta\in R$. Скористаємось отриманим у роботі [2] (формула (12)) інтегральним зображенням величини $\tilde\rho_n(f;x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x)-\tilde S_{n-1}(f;x)$:

$$\tilde\rho_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t+x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu t+\gamma_n(x)\big)dt + R_n^{(1)}(x) + R_n^{(2)}(x), \tag{5}$$

де

$$\gamma_n(x) = \gamma_n(\beta;x) \overset{\mathrm{df}}{=} \left(n-\frac12\right)x + \frac{\pi(\beta-1)}{2},$$

$$R_n^{(1)}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=2}^{\infty}\sin\frac{k(2n-1)}{2}x\sum_{i=0}^{2(n-1)}\psi\big((2k-1)n-k+1+i\big)\times$$

$$\times\sin\left(((2k-1)n-k+1+i)t-\left((k-1)n-\frac{k}{2}+1+i\right)x+\frac{\pi\beta}{2}\right)dt,$$

$$R_n^{(2)}(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=3n-1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu(t-x)+\gamma_n(x)\big)\,dt.$$

Встановимо порядки спадання до нуля величин $\left\|R_n^{(1)}(x)\right\|_1$ і $\left\|R_n^{(2)}(x)\right\|_1$ при $n\to\infty$.

Враховуючи включення $\varphi\in U_1^0$, а також нерівність вигляду

$$\int_a^b\left|\int_c^d f(t,u)\,du\right|dt \le \int_c^d\int_a^b |f(t,u)|\,dt\,du, \tag{6}$$

можемо записати

$$\left\|R_n^{(1)}(x)\right\|_1 \le \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(t)\sum_{k=2}^{\infty}\sin\frac{k(2n-1)x}{2}\sum_{i=0}^{2(n-1)}\psi((2k-1)n-k+1+i)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\sin\left(((2k-1)n-k+1+i)t-\left((k-1)n-\frac{k}{2}+1+i\right)x+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dx\,dt \le$$

$$\le \max_t\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=0}^{2(n-1)}\psi((2k-1)n-k+1+i)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\sin\left(((2k-1)n-k+1+i)x+k\left(n-\frac{1}{2}\right)(t-x)+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dx, \tag{7}$$

$$\left\|R_n^{(2)}(x)\right\|_1 \le \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(t)\sin\frac{2n-1}{2}x\sum_{\nu=3n-1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu(t-x)+\gamma_n(x)\big)\right|dx\,dt \le$$

$$\le \max_t\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=3n-1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu x+\gamma_n(t-x)\big)\right|dx. \tag{8}$$

Оцінюючи кожен з інтегралів у правих частинах формул (7) і (8) таким же способом, як це зроблено в [2] (див. формули (26), (32), (40) і (40′)), одержуємо рівномірні по n і β оцінки

$$\left\|R_n^{(i)}(x)\right\|_1 = O(1)\psi(3n)\big(1+\ln^+(\eta(n)-n)\big),\qquad i=1,2. \tag{9}$$

Таким чином, внаслідок (5) і (9)

$$\|\tilde\rho_n(f;x)\|_1 = \left\|\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu(t-x)+\gamma_n(x)\big)\,dt\right\|_1 +$$

$$+\,O(1)\psi(3n)\big(1+\ln^+(\eta(n)-n)\big), \tag{5′}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по x, n і β. Покладемо

$$H_n(t,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu(t-x)+\gamma_n(x)\big)$$

і позначимо через L_∞ простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $g=g(t)$ з нормою

$$\|g\|_{L_\infty} = \|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |g(t)|.$$

Тоді з (5′) маємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1 = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,1}} \|\tilde{\rho}_n(f;x)\|_1 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sup_{\varphi\in U_1^0} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) H_n(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+ O(1)\psi(3n)\big(1+\ln^+(\eta(n)-n)\big) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\varphi\in U_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+ O(1)\psi(3n)\big(1+\ln^+(\eta(n)-n)\big). \tag{10}$$

Беручи до уваги, що для довільної функції f із L_∞

$$\sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi(t)\,dt = \|f\|_\infty$$

(див., наприклад, [3, с. 301]), одержуємо

$$\frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\varphi\in U_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{t} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\,dx \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \max_{t} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\right| dx. \tag{11}$$

З іншого боку, застосовуючи наслідок 3 з §2 роботи С. М. Нікольського [4, с. 214], знаходимо

$$\frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\varphi\in U_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x H_n(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \frac{1}{2} \max_{t_1,t_2} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x\big(H_n(t_1,x)-H_n(t_2,x)\big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \max_{t_1,t_2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x\big(H_n(t_1,x)-H_n(t_2,x)\big)\right| dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi} \max_{t} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x\left(2H_n(t,x) - \left(H_n\left(t+\frac{\pi}{n},x\right)+H_n(t,x)\right)\right)\right| dx. \tag{12}$$

Подальшим нашим кроком є встановлення наступної оцінки:

$$\vartheta_n(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_n\left(t+\frac{\pi}{n},x\right) + H_n(t,x)\right| dx = O(1)\psi(n), \tag{13}$$

у якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, t і β. Покладемо

$$\Psi_{n,\theta}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\left(\nu x-\frac{\theta\pi}{2}\right), \qquad \theta\in R, \qquad n\in N.$$

Як неважко переконатись,

$$\forall t\in R \quad \vartheta_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\left(\nu\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\gamma_n(t-x)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu x+\gamma_n(t-x))\right|dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos(\gamma_n(t-x))\left(\Psi_{n,0}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,0}(x)\right)-\right.$$

$$\left.-\sin(\gamma_n(t-x))\left(\Psi_{n,1}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,1}(x)\right)\right|dx \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\Psi_{n,0}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,0}(x)\right|+\left|\Psi_{n,1}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,1}(x)\right|\right)dx. \tag{14}$$

Тому оцінка (13) є наслідком наступного твердження, яке має самостійне значення.

Лема. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\theta\in R$. *Тоді*

$$\left\|\Psi_{n,\theta}\left(\cdot+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,\theta}(\cdot)\right\|_1 = O(1)\psi(n), \tag{15}$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n *і* θ.

Доведення. Покладаючи

$$e_n^{(1)} = \left\{x\in[-\pi,\pi]:|x|\le\min\left\{\pi,\ \frac{1}{\eta(n)-n}\right\}\right\} \tag{16}$$

і використовуючи той факт, що

$$\forall\psi\in\mathfrak{M}_\infty\ \ \exists M>0\ \ \forall m\in N\ \ \forall t\ge m \quad \int_m^t\psi(v)\,dv \le M\psi(m)(\eta(m)-m) \tag{17}$$

[1, с. 223], одержуємо (підставляючи в (16) $t=\infty$, $m=n$)

$$\int_{e_n^{(1)}}\left|\Psi_{n,\theta}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,\theta}(x)\right|dx \le 2\int_{e_n^{(1)}}\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\,dx \le$$

$$\le 4\min\left\{\pi,\ \frac{1}{\eta(n)-n}\right\}\left(\psi(n)+\int_n^{\infty}\psi(v)\,dv\right) \le 4(\pi+M)\psi(n) \tag{18}$$

(M — стала з (17)). Тому

$$\left\|\Psi_{n,\theta}\left(\cdot+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,\theta}(\cdot)\right\|_1 = \int_{e_n^{(2)}}\left|\Psi_{n,\theta}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_{n,\theta}(x)\right|dx+O(1)\psi(n), \tag{19}$$

де

$$e_n^{(2)} \stackrel{\text{df}}{=} [-\pi, \pi] \setminus e_n^{(1)}. \tag{20}$$

За допомогою перетворення Абеля можна одержати

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{0, -\frac{\pi}{n}\right\} \quad \forall \theta \in R$$

$$\Psi_{n,\theta}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \Psi_{n,\theta}(x) = -\psi(n)\left(A_{n-1,\theta}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + A_{n-1,\theta}(x)\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) A_{\nu,\theta}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) A_{\nu,\theta}(x), \tag{21}$$

де

$$\Delta\psi(\nu) = \psi(\nu) - \psi(\nu+1), \quad \nu = n, n+1, \ldots,$$

$$A_{\nu,\theta}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sin((\nu + 1/2)x - \theta\pi/2)}{2\sin(x/2)}, \quad x \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} 2\pi). \tag{22}$$

Враховуючи рівномірну по u оцінку

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u}{2} - \frac{1}{u} = O(1), \quad 0 < |u| \leq \pi, \tag{23}$$

на основі (21) записуємо

$$\Psi'_{n,\theta}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \Psi_{n,\theta}(x) = \psi(n)\sin\left(nx - \frac{\theta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{x + \pi/n} - \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x + \pi/n}\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu)\sin\left(\nu\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - \frac{\theta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x}\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu)\sin\left(\nu x - \frac{\theta\pi}{2}\right) + O(1)\psi(n). \tag{24}$$

Оскільки

$$\int_{e_n^{(2)}} \left|\psi(n)\sin\left(nx - \frac{\theta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{x + \pi/n} - \frac{1}{x}\right)\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{n}\psi(n)\int_{e_n^{(2)}} \frac{dx}{|x(x + \pi/n)|} = O(1)\psi(n)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\mu(n)}\right),$$

то з (19), (24) і того, що $\mu(n) \uparrow \infty$, маємо

$$\left\|\Psi_{n,\theta}\left(\cdot + \frac{\pi}{n}\right) + \Psi_{n,\theta}(\cdot)\right\|_1 = \int_{e_n^{(2)}} \left| \frac{1}{x + \pi/n}\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu)\sin\left(\nu\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - \frac{\theta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x}\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu)\sin\left(\nu x - \frac{\theta\pi}{2}\right)\right| dx + O(1)\psi(n). \tag{25}$$

До кожної з сум у правій частині рівності (25) застосуємо перетворення Абеля ще раз. Проводячи елементарні спрощення і враховуючи оцінку (23) та опуклість послідовності $\psi(k)$, одержуємо

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0, -\pi/n\}$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) \sin\left(\nu\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\theta\pi}{2}\right) =$$

$$= -\Delta\psi(n) B_{n-1,\theta}\left(x+\frac{\pi}{n}\right) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2\psi(\nu) B_{\nu,\theta}\left(x+\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \Delta\psi(n) \frac{\cos(nx-\theta\pi/2)}{x+\pi/n} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2\psi(\nu) \frac{\cos(\nu(x+\pi/n)-\theta\pi/2)}{x+\pi/n} + O(1)\Delta\psi(n), \quad (26)$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) \sin\left(\nu x-\frac{\theta\pi}{2}\right) = -\Delta\psi(n) B_{n-1,\theta}(x) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2\psi(\nu) B_{\nu,\theta}(x) =$$

$$= -\Delta\psi(n) \frac{\cos(nx-\theta\pi/2)}{x} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2\psi(\nu) \frac{\cos(\nu x-\theta\pi/2)}{x} + O(1)\Delta\psi(n), \quad (26')$$

де

$$\Delta^2\psi(\nu) = \Delta(\Delta\psi(n)) = \psi(\nu) - 2\psi(\nu+1) + \psi(\nu+2), \quad \nu = n, n+1, \ldots,$$

$$B_{\nu,\theta}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\cos((\nu+1/2)x-\theta\pi/2)}{2\sin(x/2)}, \quad x \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \quad (22')$$

Тоді внаслідок (26) і (26′)

$$\int_{e_n^{(2)}} \left| \frac{1}{x+\pi/n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) \sin\left(\nu\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\theta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\psi(\nu) \sin\left(\nu x - \frac{\theta\pi}{2}\right) \right| dx \leq$$

$$\leq \Delta\psi(n) \int_{e_n^{(2)}} \left(\frac{1}{(x+\pi/n)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \left|\cos\left(nx-\frac{\theta\pi}{2}\right)\right| dx +$$

$$+ \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2\psi(\nu) \int_{e_n^2} \left(\frac{|\cos(\nu(x+\pi/n)-\theta\pi/2)|}{(x+\pi/n)^2} + \frac{|\cos(\nu x-\theta\pi/2)|}{x^2}\right) dx +$$

$$+ O(1)\Delta\psi(n) \int_{e_n^{(2)}} \left(\frac{1}{|x+\pi/n|} + \frac{1}{|x|}\right) dx =$$

$$= O(1)\Delta\psi(n) \int_{e_n^{(2)}} \left(\frac{1}{(x+\pi/n)^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = O(1)\Delta\psi(n)(1+\eta(n)-n). \quad (27)$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то (див. [5, с. 215]) знайдеться стала K така, що

$$\forall t \geq 1 \quad \eta'(t) \leq K < \infty, \quad \eta'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta'(t+0). \quad (28)$$

Тому на основі формули (122) з [6] виконується співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\eta(t)-t} \leq -\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq K \frac{1}{\eta(t)-t} \quad \forall t \geq 1, \quad (29)$$

де K — стала з (28). Внаслідок опуклості функції $\psi(t)$ виконується нерівність $\Delta\psi(n) \leq -\psi'(n)$, а тому з урахуванням (29) маємо

$$\Delta\psi(n)\big(\eta(n)-n\big) \leq K\psi(n), \qquad n\in N. \tag{30}$$

З формул (24), (27) і (30) випливає оцінка (15). Лему доведено.

Таким чином, із (11), (12) і (13) одержуємо

$$\frac{2}{\pi}\sup_{\|g\|_\infty\leq 1}\sup_{\varphi\in U_1^0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \max_t I_n(t) + O(1)\psi(n), \tag{31}$$

де

$$I_n(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\right|dx.$$

Об'єднуючи формули (10) і (31), можемо записати рівність

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^\psi_{\beta,1})_1 = \max_t I_n(t) + O(1)\big(\psi(n)+\psi(3n)\ln^+(\eta(n)-n)\big), \tag{32}$$

в котрій величина $O(1)$ рівномірно обмежена по t, n і β.

Тепер встановимо точну асимптотику при $n\to\infty$ інтеграла

$$I_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu x+\gamma_n(t-x)\big)\right|dx.$$

Оскільки (див. формулу (18))

$$\int_{e_n^{(1)}}\left|\sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu x+\gamma_n(t-x)\big)\right|dx \leq$$

$$\leq \int_{e_n^{(1)}}\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\,dx = O(1)\psi(n),$$

то

$$I_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_{e_n^{(2)}}\left|\sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu x+\gamma_n(t-x)\big)\right|dx + O(1)\psi(n) \tag{33}$$

(множини $e_n^{(1)}$ і $e_n^{(2)}$ означені відповідно в (16) і (20)).

Перетворивши суму у формулі (33) за допомогою перетворення Абеля і провівши елементарні спрощення, одержимо

$$\sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos\big(\nu x+\gamma_n(t-x)\big) =$$

$$= -\psi(n)\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\pi(\beta-1)}{2}\right)\frac{\sin\big((n-1/2)(t-x)\big)}{2\sin(x/2)} +$$

$$+ \sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)\frac{\sin\big((\nu+1/2)x+\gamma_n(t-x)\big)}{2\sin(x/2)}. \tag{34}$$

Головний член асимптотичного розкладу інтеграла $I_n(t)$ міститься в першому доданку правої частини рівності (34). Щоб у цьому переконатися, покажемо спочатку, що інтеграл по множині $e_n^{(2)}$ від модуля другого доданка у правій частині (34) має порядок $O(1)\psi(n)$. Дійсно, користуючись формулами (23), (26′), (27) і (30), маємо

$$\int\limits_{e_n^{(2)}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}(t-x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)\frac{\sin((\nu+1/2)x+\gamma_n(t-x))}{2\sin(x/2)}\right|dx \le$$

$$\le \int\limits_{e_n^{(2)}}\left(\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)A_{\nu,0}(x)\right|+\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)B_{\nu,0}(x)\right|\right)dx \le$$

$$\le \int\limits_{e_n^{(2)}}\left(\left|\frac{1}{x}\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)\sin\nu x\right|+\left|\frac{1}{x}\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\psi(\nu)\cos\nu x\right|\right)dx + O(1)\psi(n) =$$

$$= O(1)\Delta\psi(n)\int\limits_{e_n^{(2)}}\frac{dx}{x^2} + O(1)\psi(n) =$$

$$= O(1)\big(\Delta\psi(n)(\eta(n)-n)+\psi(n)\big) = O(1)\psi(n) \tag{35}$$

(функції $A_{\nu,0}(x)$ і $B_{\nu,0}(x)$ означені при $\theta=0$ формулами (22) і (22′) відповідно). Отже, внаслідок (23), (33) – (35) мають місце рівності

$$I_n(t) = \frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\int\limits_{e_n^{(2)}}\left|\frac{\sin((n-1/2)(t-x))}{2\sin(x/2)}\right|dx + O(1)\psi(n) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\int\limits_{e_n^{(2)}}\left|\frac{\sin(nx-(n-1/2)t)}{x}\right|dx + O(1)\psi(n) \quad \forall\, t\in R, \tag{36}$$

де $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по t, n і β. Розглянемо множини

$$Q_\psi^{(1)} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{n\in N\colon \frac{1}{\eta(n)-n}<\pi\right\}; \qquad Q_\psi^{(2)} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{n\in N\colon \frac{1}{\eta(n)-n}\ge\pi\right\}.$$

Використовуючи схему доведення формули (2.7.30) з [1], можна показати, що для n з множини $Q_\psi^{(1)}$ і довільного $\theta\in R$ справедлива формула

$$\int\limits_{e_n^{(2)}}\left|\frac{\sin(nx-\theta)}{x}\right|dx = \frac{4}{\pi}\ln\frac{n\pi}{\mu(n)} + O(1), \tag{37}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n і θ. Оскільки для всіх номерів n з множини $Q_\psi^{(2)}$ інтеграли $\int_{e_n^{(2)}} f(x)\,dx$, $f\in L$, дорівнюють нулю, на основі рівності (37), застосованої при $\theta=\theta(t)=(n-1/2)t$, з (36) одержуємо

$$I_n(t) = \frac{8}{\pi^2}\psi(n)\left|\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\ln^+(\eta(n)-n)) + O(1)\psi(n), \tag{38}$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена по t, n і β. З формул (32) і (38) випливає рівність (4). Теорему доведено.

Оскільки для довільної $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$ $\lim_{n\to\infty}\psi(3n)/\psi(n)=0$ (див. лему 3 з [2]), то формула (4) є асимптотичною рівністю при виконанні умови

$$\lim_{n\to\infty}(\eta(n)-n) = \infty. \tag{39}$$

Для функцій $\psi_1(t)=e^{-\alpha t^r}$, $\alpha>0$, $0<r<1$,

$$\eta(t) - t = t\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1\right)^{1/r} - 1\right) = t^{1-r}\left(\frac{\ln 2}{\alpha r} + O(1)\right). \tag{40}$$

З (40) випливає, що $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$, $\psi_1(3n)\ln(\eta(n) - n)) = o(\psi(n))$ і має місце (39). Тому, на підставі теореми 1 одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$, $\beta \in R$, $C^{\psi}_{\beta,1} = C^{\alpha,r}_{\beta,1}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_1 = \frac{8}{\pi^2}(1-r)e^{-\alpha n^r}\ln n + O(1)e^{-\alpha n^r},$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n *і* β.

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ і $\eta(t) - t \le K < \infty$, то рівність (4) є лише точною за порядком. Питання, пов'язані з встановленням асимптотичних рівностей для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1$, у цьому випадку розглядались у роботах [7, 8].

Для класів функцій скінченної гладкості, а саме, коли $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r$, $r \in N$ (тоді $C^{\psi}_{\beta,1} = W^r_1$, $r \in N$) у роботі [9, с. 785] одержано наступну оцінку:

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_1)_1 \le \frac{2K_{r-1}\ln n}{\pi n^r} + \frac{O(1)}{n^r}, \tag{41}$$

де

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n. Там же було показано, що при $r = 2$ нерівність (41) є асимптотично точною.

Відзначимо, що оцінки (4) і (41) узгоджуються між собою, оскільки з ростом r від 0 до $+\infty$ величина $2K_{r-1}/\pi$ прямує до $8/\pi^2$, а для функції $\psi_2(t) = t^{-r}$, $t \ge 1$, $r > 0$, $\ln^+(\eta(n) - n) = \ln n + O(1)$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанець О. І., Сердюк А. С.* Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та її застосування / Праці Інституту математики НАН України. Т. 31. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – С. 446 – 460.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
5. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 210 – 222.
6. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Там же. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
7. *Сердюк А. С.* Наближення аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 3. – С. 240 – 250.
8. *Сердюк А. С.* Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 994 – 998.
9. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 // Там же. – 1990. – **42**, № 6. – С. 781 – 786.

Одержано 12.12.2000