УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОЛІМЕРНІ РОЗКЛАДИ ДЛЯ РІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ ОСЦИЛЯТОРІВ З ТЕРНАРНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

For Gibbs lattice systems characterized by a measurable space at sites of d-dimensional hypercubic lattice and potential energy with a pair complex potential, we formulate conditions that ensure the convergence of polymer (cluster) expansions. We establish that the Gibbs correlation functions and reduced density matrices of classical and quantum systems of linear oscillators with ternary interaction can be expressed in terms of correlation functions of these systems.

Для гіббсівських граткових систем, що характеризуються вимірним простором у вузлах d-вимірної гіперкубічної гратки та потенціальною енергією з парним комплексним потенціалом, сформульовано умови, що забезпечують збіжність полімерних (кластерних) розкладів. Встановлено, що гіббсівські кореляційні функції та редуковані матриці густини класичних та квантових систем лінійних осциляторів з тернарною взаємодією виражаються в термінах кореляційних функцій цих систем.

1. Вступ та основний результат. Ми розглядаємо рівноважні класичні та квантові системи лінійних осциляторів на гратці $\mathbb{Z}^d$ (осциляторні змінні індексуються вузлами цієї гратки) з потенціальною енергією

$$U(q_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} u(q_x) + \sum_{x,y\in\Lambda} u^0_{x-y}(q_x, q_y) + \sum_{x,y,z\in\Lambda} u^0_{x,y,z}(q_x, q_y, q_z),$$

що виражається через одночастинковий потенціал u, парний потенціал $u^0_{x-y}(q_x, q_y)$ та тернарний (тричастинковий) факторизований потенціал $u_{x,y,z}(q_x, q_y, q_z)$:

$$u^0_{x-y}(q_x, q_y) = J_0(|x-y|)u_0(q_x, q_y),$$

$$u_{x,y,z}(q_x, q_y, q_z) = J_1(|x-y|)J_1(|y-z|)u_1(q_x, q_y)u_1(q_y, q_z),$$

де u_0, u_1 — симетричні функції.

Гіббсівські кореляційні функції та редуковані матриці густини цих класичних та квантових систем лінійних осциляторів виражаються в термінах кореляційних функцій гіббсівських граткових систем з парним комплексним потенціалом та вимірним простором у вузлах гіперкубічної гратки (див. (3.1), (3.2), (4.3)).

Цей факт є мотивацією до розгляду загальних гіббсівських систем на гратці $\mathbb{Z}^d$, вузли якої індексують змінні простору з мірою (Ω, P_0), де P_0 є додатною σ-фінітною мірою (вона є скінченною на компактних множинах, якщо простір Ω є повним метричним простором) з потенціальною енергією U, яка є вимірною функцією, вираженою через зовнішній (одночастинковий) комплексний потенціал $u(\omega)$ та парний (двочастинковий) комплексний потенціал $u_{x-y}(\omega_x, \omega_y)$,

$$U(\omega_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} u(\omega_x) + \sum_{x,y\in\Lambda} u_{x-y}(\omega_x, \omega_y), \tag{1.1}$$

де Λ — фінітна множина скінченної потужності $|\Lambda|$.

У класичному випадку Ω збігається з $\mathbb{R}^2$. У квантовому випадку Ω збігається з декартовим добутком $\mathbb{R}$ простору Ω_0 неперервних відображень (траєкторій) з $[0, \beta]$ в $\mathbb{R}$, які є нулем у нулі, та простору Ω_β неперервних відображень (петель) з $[0, \beta]$ в $\mathbb{R}$, значення яких збігаються на початку та в кінці цього інтервалу. σ-Алгебра вимірних множин є σ-алгеброю циліндричних множин.

Міра P_0 — обмежена на $G \times \mathbb{R}$ та $G \times \Omega_0 \times \Omega_\beta$, де G — компактна множина в $\mathbb{R}$ відповідно для класичних та квантових систем.

Гіббсівські кореляційні функції задано таким чином:

$$\rho^\Lambda(\omega_X) = Z_\Lambda^{-1} \int e^{-\beta U(\omega_\Lambda)} P_0\big(d\omega_{\Lambda \setminus X}\big),$$

$$Z_\Lambda = \int e^{-\beta U(\omega_\Lambda)} P_0(d\omega_\Lambda) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+. \tag{1.2}$$

Тут інтегрування здійснюється відповідно по $\Omega^{|\Lambda \setminus X|}$ та $\Omega^{|\Lambda|}$, $P_0(d\omega_X) = \prod_{x \in X} P_0(d\omega_x)$. Обидва потенціали та P_0 можуть залежати від оберненої температури β.

Полімерний високотемпературний розклад задається так:

$$\rho_{\Lambda, X}(\omega_X) = \Big(\int e^{-\beta u(\omega)} P_0(d\omega)\Big)^{|X|} e^{\beta \sum\limits_{x \in \Lambda} u(\omega_x)} \rho^\Lambda(\omega_X) =$$

$$= \sum_{Y \in \Lambda \setminus X} \frac{Z_{\Lambda \setminus (X \cup Y)}}{Z_\Lambda} \int P(d\omega_Y) F_{\omega_X}(\omega_Y), \tag{1.3}$$

де $F_{\omega_X}(\omega_Y)$ — урізані функції Больцмана, які відповідають функціям Больцмана ψ:

$$\psi(\omega_X) = \exp\left\{-\beta\left[U(\omega_X) - \sum_{x \in X} u(\omega_x)\right]\right\}, \qquad F_{\omega_X}(\varnothing) = \psi(\omega_X),$$

$$P(d\omega_Y) = \Big(\int e^{-\beta u(\omega)} P_0(d\omega)\Big)^{-|Y|} \prod_{y \in Y} e^{-\beta u(\omega_y)} P_0\big(d\omega_y\big).$$

Цей полімерний розклад [1] отримується з допомогою алгебраїчної техніки Рюелля [2]. Для квантових осциляторних систем з парним потенціалом ці розклади наведено в [3] зі слабшою, ніж у даній статті, умовою на парний потенціал, та дещо іншою схемою доведення їх збіжності.

Інші кластерні розклади для спостережуваних квантових систем з білінійними парними потенціалами можна знайти в [4, 5].

Полімерні кореляційні функції

$$\bar{\rho}_\Lambda(X \cup Y) = \frac{Z_{\Lambda \setminus (X \cup Y)}}{Z_\Lambda}$$

задовольняють полімерне рівняння КС (Кірквуда – Сальцбурга) [6], що залежить від полімерних активностей $\Phi(X)$, визначених за функціями Урселла $\Psi_X(\omega_X)$ (див. наступний пункт):

$$\Phi(X) = \int P(d\omega_X) \Psi_X(\omega_X), \qquad \Psi_{(X \cup Y)}(\omega_X, \omega_y) = F_{\omega_y}(\omega_X).$$

Статистична сума задається так:

$$Z_\Lambda = \sum_k \sum_{\cup X_j = \Lambda} \prod_{j=1}^k \Phi(X_j).$$

Щоб довести збіжність полімерного розкладу, достатньо встановити оцінку

$$\sum_{Y:|Y|=m} \int P(d\omega_Y)\left|F_{\omega_X}(\omega_Y)\right| \leq \xi_1^{|X|}\xi_0^m e^{\beta \sum_{x\in X} \overline{v}(\omega_x)}, \tag{1.4}$$

в якій $\xi_0 < 1$, $e^{\beta\overline{v}} \in L^1(\Omega, P)$.

Ця оцінка приводить до оцінки (див. [1, 6])

$$\overline{\rho}_\Lambda(X) \leq M\xi^{|X|}, \quad \xi < 1.$$

Для класичних осциляторних систем та при умовах $\operatorname{Im} U = 0$ $(\Omega = \mathbb{R},\ P_0(dq) = dq)$, $\xi_1 = e$ таку оцінку було встановлено для високих температур за допомогою рекурентного співвідношення КС для функцій F в [1]. Там же було показано, що умова $\xi_0 < 1$ забезпечується умовою

$$\left|u_{x-y}(q_x, q_y)\right| \leq J'(|x-y|)\sqrt{v(q_x)}\sqrt{v(q_y)}, \quad J' = \|J'\|_{1/2}, \quad v \geq 0, \tag{1.5}$$

якщо $v(q)$ — додатний поліном степеня $2m < 2n$ і u — функція, що обмежена знизу додатним поліномом степеня $2n$. Тоді для функції $\tilde{v}$ в (1.4) виконуються рівність $\tilde{v} = J'\gamma v(q_x)/2$ та $\gamma > 3$.

Ми вимагаємо, щоб справджувались такі умови:

$$\operatorname{Im} u_{x-y}(\omega_X, \omega_y) = J_1(|x-y|)\phi(\omega_x, \omega_y), \quad \|J_1\|_1 < \infty, \tag{1.6}$$

$$\left|\operatorname{Re} u_{x-y}(\omega_x, \omega_y)\right| \leq J'(|x-y|)\sqrt{v(\omega_x)}\sqrt{v(\omega_y)}, \quad \|J'\|_{1/2} < \infty, \quad v \geq 0, \tag{1.7}$$

$$\int e_\nu(\omega)P_0(d\omega) < \infty, \quad e_\gamma(\omega) = e^{\beta J\gamma v(\omega)/2}, \tag{1.8}$$

$$\int e_\gamma(\omega)e_\gamma(\omega')|\phi(\omega, \omega')|^2 P_0(d\omega)P_0(d\omega') < \infty; \quad \gamma \geq 0. \tag{1.9}$$

Будемо використовувати такі позначення:

$$\overline{v}(\omega) = \frac{1}{2}J\gamma v(\omega) + \beta^{-1}\ln(1 + b(\omega)), \quad b^2(\omega) = \int |\phi(\omega, \omega')|^2 P(d\omega'),$$

$$J = \|J'\|_1 + \|J_1\|_1,$$

$|x| = \max_{\nu=1,\ldots,d}\left|x^\nu\right|$, $\|F\|_p$ — норма банахового простору $L^p(\mathbb{Z}^d)$, $\mathbb{B}_\xi$ — простір функцій $F(\omega_X)$ з нормою

$$\|F\|_\xi = \operatorname*{esssup}_{|X|, \omega_X} \xi^{-|X|} \exp\left\{-\beta \sum_{x\in X} \tilde{v}(\omega_x)\right\}|F(\omega_X)|.$$

L_p-норми $\|1\|_{p,\gamma} = \left\|e_\gamma\right\|_p$, $\|\phi\|_{p,\gamma} = \left\|e_\gamma\phi\right\|_p$ будуть асоційовані відповідно з мірою P на Ω та мірою $P\times P$ на декартовому добутку $\Omega\times\Omega = \Omega^2$.

Теорема 1.1. *Якщо виконуються умови* (1.5) – (1.9), $\|1\|_{1,\gamma} < \infty$, $\gamma > 3$,

$$\lim_{\beta\to 0} \sqrt{\beta}\left(\|\phi\|_{2,2\gamma}^2 + 1\right)\left\|\sqrt{v}\right\|_{2,2} = 0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{\beta\to 0} \beta\|\phi\|_{2,2\gamma}^2 = 0, \tag{1.11}$$

то існують додатні не залежні від Λ *числа* β_0, β_1, ξ_1, ξ, M, *залежні від* β, *такі, що справджується* (1.4), *і для* $\beta \in [0, \beta_0]$ $\overline{\rho}_\Lambda \leq M\xi^{|X|}$ *та* $\overline{\rho}_\Lambda$ *збігається рівномірно на компактних множинах до* $\overline{\rho}(X)$. *Крім того, ряд в* (1.3) *збігається за нормою* $\mathbb{B}_{\overline{\xi}}$ *і граничні функції* $\rho_X(\omega_X)$ *визначені рівністю*

$$\lim_{\Lambda^c \to \varnothing} \rho_{\Lambda, \bar{x}}(\omega_X) = \rho_X(\omega_X) = \sum_Y \overline{\rho}(X \cup Y) \int P(d\omega_Y) F_{\omega_X}(\omega_Y), \tag{1.12}$$

де підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$ *та* $\|\rho\|_{\overline{\xi}}^- \le M(1-\xi')^{-1}$, $\overline{\xi} = \xi_1\xi > 1$, $\xi' = \xi_0\xi < 1$.

2. Доведення теореми 1.1. Зрізані функції Больцмана задовольняють наступне осциляторне рекурентне співвідношення КС:

$$F_{\omega_X}(\omega_Y) = e^{-\beta W(\omega_x|\omega_X)} \left[F_{\omega_{X\setminus x}}(\omega_Y) + \sum_{Z \in Y, |Z|>0} K(\omega_x|\omega_Z) F_{\omega_{X\setminus x}, \omega_Z}(\omega_{Y\setminus Z}) \right], \quad x \in X, \tag{2.1}$$

де

$$W(\omega_x|\omega_X) = U(\omega_X) - F(\omega_{X\setminus x}), \qquad K(\omega_x|\omega_Z) = \prod_{z\in Z} \left(e^{-\beta u_{x-y}(\omega_x, \omega_y)} - 1 \right).$$

Полімерні кореляційні функції задовольняють полімерні рівняння КС (рівняння (28) в [6])

$$\Phi(x)\overline{\rho}_\Lambda(X) = \chi_\Lambda(X)\overline{\rho}_\Lambda(X\setminus x) - \sum_{Y \in \Lambda\setminus X} \Phi(x \cup Y)\overline{\rho}_\Lambda(X \cup Y), \quad x \in X, \tag{2.2}$$

де $\chi_\Lambda(X)$ — характеристична функція X.

Співвідношення (2.1) використовуються для доведення наступного твердження.

Твердження 2.1. *Нехай справджуються умови* (1.5) – (1.9). *Тоді має місце* (1.4) *при*

$$\xi_1 = e, \quad \xi_0 = eB_\gamma, \quad B_\gamma = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \sum_x b_x(\omega),$$

$$b_x(\omega) = e_{-(\gamma-2)}(\omega)(1+b(\omega))^{-1} \int (1+b(\omega'))e_\gamma(\omega') \left| e^{-\beta u_x(\omega,\omega')} - 1 \right| P(d\omega'),$$

де підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$.

Доведення. Щоб встановити (1.4), потрібно оцінити

$$I(m,n) = \operatorname{ess} \sup_{\omega_{x\cup X'}, |X'|=n-1} \sum_{Y, |Y|=m} \left| A^Y(\omega_{x\cup X'}) \right|,$$

де

$$A^Y_{\omega_X} = e^{-\frac{\beta}{2} J_\gamma \sum_{x\in X} \overline{v}(\omega_x)} \int P(d\omega_Y) F_{q_X}(\omega_Y), \qquad A^{\varnothing}_{\omega_X} = e^{-\frac{\beta}{2} J_\gamma \sum_{x\in X} \overline{v}(\omega_x)} F_{\omega_X}(q_\varnothing).$$

Оцінка суперстійкості

$$\operatorname{Re} U(\omega_X) \ge -J \sum_{x\in X} v(\omega_x)$$

дає можливість симетризувати (2.1), як у випадку системи частинок [2]. Після симетризації, тобто після домноження на характеристичну функцію множини, де виконується нерівність $W(\omega_x|\omega_Z) \ge -Jv(\omega_x)$, та підсумовування по $x \in X$, інтегрування та зміни порядку підсумовування (2.1) маємо

$$I(m,n) \le I(m,n-1) + \sup_{x,\,q_x} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|Z|=m-k} \prod_{z\in Z} b_{x-z}(\omega_x) I(k,n-1+m-k) \le$$

$$\le I(m,n-1) + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_\gamma^l}{l!} I(m-l,n-1-l).$$

Використовуючи $I(1,0)=0$, $I(0,1)=1$, за індукцією легко отримуємо для додатного a нерівність

$$I(m,n) \le a^n (e^{B_\gamma} a^{-1})^{m+n}.$$

В результаті для $a = B_\gamma^{-1}$ отримаємо

$$I(m,n) \le (eB_\gamma)^m e^n. \tag{2.3}$$

Твердження доведено.

Рівняння (2.2) переписується як абстрактне рівняння резольвентного типу

$$\overline{\rho}_\Lambda = \chi_\Lambda \alpha + \chi_\Lambda K_\phi \overline{\rho}_\Lambda, \qquad \alpha(X) = \delta_{|X|,1} (\Phi(x))^{-1}$$

у банаховому просторі $B_\xi(\mathbb{Z}^d)$ комплексних функцій f на підмножинах $\mathbb{Z}^d$ з нормою,

$$\| f \|_\xi = \sup_X \xi^{-|X|} | f(X) |,$$

де χ^Λ — оператор множення на $\chi_\Lambda(X)$, та K_ϕ визначається правою частиною рівняння КС, поділеного на $\Phi(x) \ne 0$.

При нескінченному об'ємі це рівняння має вигляд

$$\overline{\rho} = \alpha + K_\phi \overline{\rho}.$$

Легко бачити, що норма оператора КС у $B_\xi(\mathbb{Z}^d)$ задана так:

$$\| K_\Phi \|_\xi = \max (\xi | \Phi(x) |)^{-1} \left[1 + \sum_{Y \ne \varnothing} | \Phi(x \cup Y) | \xi^{|Y|+1} \right]$$

та $\| K_\Phi \|_\xi < 1$, якщо

$$\sup_x \xi^{-1} \left[1 + \sum_{X',\, |X'| \ge 1} | \Phi(x, X') | \xi^{|X'|} \right] = R(\xi) < | \Phi(x) |.$$

З нерівності (1.4) та твердження 2.1 випливає

$$\sum_{|X'|=m} | \Phi(x, X') | \le e D_\gamma (eB_\gamma)^m,$$

$$D_\gamma = \int (1 + b(\omega)) e_\gamma(\omega) P(d\omega) = \int e^{-\beta \overline{v}(\omega)} P(d\omega).$$

З останньої нерівності, у свою чергу, маємо

$$R(\xi) \le \xi^{-1} + D_\gamma e (B_\gamma e \xi)(1 - B_\gamma e \xi)^{-1}.$$

Покладаючи

$$B_\gamma + 2\sqrt{B_\gamma D_\gamma} \le e^{-1}, \qquad \xi = e^{-1} \left(B_\gamma + \sqrt{B_\gamma D_\gamma} \right)^{-1}, \tag{2.4}$$

бачимо, що має місце нерівність ($\Phi(x) = 1$, тому що полімерні активності є трансляційно-інваріантними)

$$R(\xi) < 1. \tag{2.5}$$

Тому $\|K_\Phi\|_\xi < 1$, а абстрактне полімерне рівняння КС має єдиний розв'язок у $B_\xi(\mathbb{Z}^d)$ як рівномірно збіжний ряд за степенями оператора-збурення.

Легко бачити, що (2.4) виконується, якщо виконуються дві умови:

$$\lim_{\beta \to 0} B_\gamma = 0, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\beta \to 0} B_\gamma D_\gamma = 0. \tag{2.7}$$

В результаті для $\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda''$ та для δ, що визначає відстань від Λ до Λ', стандартним чином отримуємо таку нерівність (див. доведення теореми 4 в [6]):

$$\|\chi_\Lambda(K_\Phi \chi_{\Lambda''} - K_\Phi \chi_{\Lambda'})\|_\xi \le \eta(\delta), \tag{2.8}$$

де

$$\eta(\delta) = \sup_x \sum_{Y \neq \varnothing, Y \not\subset B_\delta(x)} |\Phi(x \cup Y)| \xi^{1+|Y|}$$

та $B_\delta(x)$ — куля радіуса δ з центром у точці x.

Активності Φ — трансляційно-інваріантні. Це приводить до рівності [2]

$$\lim_{\delta \to \infty} \eta(\delta) = 0.$$

З допомогою (2.7) та стандартних міркувань з [2] доводиться таке твердження.

Твердження 2.2. *Нехай* λ *— відстань* X *від* Λ *та виконуються умови твердження* 2.1 *та* (2.6), (2.7). *Тоді* $\|\overline{\rho}_\Lambda\|_\xi \le M < \infty$ *та існує додатна функція* $\varepsilon(\lambda)$, *що прямує до нуля на нескінченності, така, що*

$$|\overline{\rho}_\Lambda(X) - \overline{\rho}(X)| \le \xi^{|X|}\varepsilon(\lambda), \qquad \|\overline{\rho}\|_\xi \le M, \tag{2.9}$$

де $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$.

Тепер нам потрібно отримати оцінки для B_γ та подати (2.6), (2.7) у зручному вигляді.

Із співвідношень

$$e^a - 1 = e^{i\operatorname{Im} a}(e^{\operatorname{Re} a} - 1) + (e^{i\operatorname{Im} a} - 1), \qquad \left|e^{i\operatorname{Im} a} - 1\right| \le |\operatorname{Im} a|$$

випливає, що

$$b_x(\omega) \le e_{-(\gamma-2)}(\omega)(1 + b(\omega))^{-1} \times$$

$$\times \int (1 + b(\omega'))e_\gamma(\omega')\Big[\left|e^{-\beta \operatorname{Re} u_x(\omega, \omega')} - 1\right| + \beta|J_1|(|x|)|\phi(\omega, \omega')|\Big]P(d\omega').$$

З визначення b та нерівності Шварца, застосованої до обох виразів у квадратних дужках, одержуємо

$$\begin{gathered} b_x(\omega) \le \|1 + b\|_{2, 2\gamma}\left(b_x^0(\omega) + \beta|J_1(|x|)|\right), \\ b_x^0(\omega) = e_{-(\gamma-2)}(\omega)\left(\int \left|e^{-\beta \operatorname{Re} u_x(\omega, \omega')} - 1\right|^2 P(d\omega')\right)^{1/2}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

де $\|\cdot\|_{p,\gamma}$ позначає норму простору $L^p(\Omega, e_\gamma P)$. Тут у першому виразі була застосована нерівність $(1+b(\omega'))^{-1} \le 1$.

Далі оцінимо $\sum_x b_x^0(\omega)$.

Твердження 2.3. *Якщо виконуються умови* (1.5) – (1.9) *та* $\gamma > 3$, *то*

$$B_\gamma \le \overline{B} = \|1+b\|_{2,2\gamma}(b' + \beta\|J_1\|_1), \qquad b' = \sqrt{\beta}\|J'\|_{1/2}\|\sqrt{v}\|_{2,2}.$$

Доведення. Застосовуючи нерівності [1]

$$\left|e^{-\beta\,\mathrm{Re}\,u_x(\omega,\omega')} - 1\right| \le e^{\beta|u_x(\omega,\omega')|} - 1 \le e^{\beta J'(|x|)\sqrt{v(\omega)v(\omega')}} - 1,$$

$$\left|e^{ab} - 1\right|^2 \le \left(e^{a^2} - 1\right)\left(e^{b^2} - 1\right), \quad J > J'(|x|),$$

$$a = \sqrt{\beta J(|x|)v(\omega)}, \quad b = \sqrt{\beta J(|x|)v(\omega')},$$

$$\left|e^{\beta J'(|x|)v(\omega)} - 1\right| \le e^{\beta J'(|x|)v(\omega)}, \quad \left|e^{\beta J'(|x|)v(\omega')} - 1\right| \le \beta J'(|x|)v(\omega')e^{\beta J'(|x|)v(\omega')},$$

а також нерівність Шварца, отримуємо

$$\sum_x b_x^0(\omega) \le \sqrt{\beta}\, e_{-(\gamma-3)}(\omega)\|J'\|_{1/2}\|\sqrt{v}\|_{2,2},$$

що разом з (2.10) доводить це твердження.

З допомогою (2.3) та нерівності Шварца виводиться нерівність

$$D_\gamma \le \|1\|_{2,\gamma}\|1+b\|_{2,\gamma},$$

$$\|1+b\|_{2,\gamma} \le \|1\|_{1,\gamma} + \left(\int e_\gamma(\omega)e_\gamma(\omega')|\phi(\omega,\omega')|^2 P(d\omega)P(d\omega')\right)^{1/2} =$$
$$= \|1\|_{1,\gamma} + \|\phi\|_{2,\gamma}.$$

Ця нерівність та нерівність з твердження 2.3 означають, що рівність (2.7), яка сильніша за (2.6), виконується при виконанні (1.10), (1.11)

З (2.4) випливає, що $\xi' < 1$, $\overline{\xi} > 1$. Цим закінчується доведення теореми 1.1.

Неважко довести рівність

$$\lim_{\beta\to 0} \xi' = 0. \tag{2.11}$$

Очевидно, що $\xi' = \left(1 + \sqrt{D_\gamma B_\gamma^{-1}}\right)^{-1}$. З твердження 2.3 ((2.6)) та нерівності $D_\gamma \ge \|1\|_{1,\gamma}$ випливає, що

$$\xi' \le \left(1 + \sqrt{\|1\|_{1,\gamma}\overline{B}^{-1}}\right)^{-1} \to 0,$$

коли $\beta \to 0$, тому що величина $\|1\|_{1,\gamma}$ рівномірно обмежена по β. Отже, (2.11) справджується.

3. Класичні системи. Потенціальну енергію, наведену у вступі, запишемо так:

$$U(q_X) = \sum_{x\in X} u(q_x) + \sum_{x,y\in X} u_{x-y}(q_x, q_y) + U'(q_X), \tag{3.1}$$

$$u_{x-y}(q_x, q_y) = J_0(|x-y|)u_0(q_x, q_y) - J_1^2(|x-y|)u_1^2(q_x, q_y),$$

$$U'(q_X) = \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in X} J_1(|x-y|)u_1(q_x, q_y)\right)^2.$$

Кореляційні функції мають вигляд

$$\rho^{\Lambda}(q_X) = Z_{\Lambda}^{-1} \int e^{-\beta U(q_\Lambda)} dq_{\Lambda \setminus X}, \qquad Z_\Lambda = \int e^{-\beta U(q_\Lambda)} dq_\Lambda.$$

Редукція до системи з комплексним парним потенціалом здійснюється за допомогою формули

$$e^{-\beta U'(q_X)} = (2\pi)^{-|X|/2} \int \exp\left\{ i\sqrt{\beta} \sum_{x \in X} s_x \sum_{y \in X} J_1(|x-y|) u_1(q_x, q_y) - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} s_x^2 \right\} ds_X. \tag{3.2}$$

Отже, ми отримали систему з потенціальною енергією (1.1) та простором $\omega = (q, s) \in \mathbb{R}^2$, мірою P_0 на ньому,

$$P_0(dq\, ds) = (2\pi)^{-1/2} e^{-s^2/2}\, ds\, dq,$$

одночастинковим потенціалом $u(q, s) = u(q)$ та парним комплексним потенціалом з дійсною та уявною частинами:

$$\operatorname{Re} u_{x-y}\big((q, s)_x; (q, s)_y\big) = J_0(|x-y|) u_0(q_x, q_y) - J_1^2(|x-y|) u_1^2(q_x, q_y), \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Im} u_{x-y}\big((q, s)_x; (q, s)_y\big) = J_1(|x-y|) \phi\big((q, s)_x; (q, s)_y\big), \qquad \|J_1\|_1 < \infty, \tag{3.4}$$

чи

$$\phi\big((q, s)_x; (q, s)_y\big) = \frac{1}{2}\big[s_x u_1(q_x, q_y) + s_y u_1(q_y, q_x) \big] = \frac{1}{2}(s_x + s_y) u_1(q_y, q_x).$$

Будемо вважати, що u — обмежений знизу поліном степеня $2n$ і

$$\big| u_s(q_x, q_y) \big| \le \sqrt{v_s(q_x)} \sqrt{v_s(q_y)},$$

$$\|J_0\|_{1/2} < \infty, \quad \|J_1\|_1 < \infty, \quad s = 0, 1, \tag{3.5}$$

де $v_0(q) = 1 + q^{2m}$, $v_1(q) = 1 + |q|^{m_1}$, $m_0 < n$, $m_1 < n$.

Умова (1.7) виконується, якщо

$$J'(|x-y|) = \left[J_0(|x-y|) + J_1(|x-y|)^2 \right],$$

$$v(q) = 4\big(v_0(q) + v_1^2(q)\big). \tag{3.6}$$

Умова $\|J'\|_{1/2} < \infty$, що потрібна для твердження 2.3, виконується, якщо виконуються друга та третя умови в (3.5), оскільки

$$\|J'\|_{1/2} \le \|J_0\|_{1/2} + \|J_1\|_1^2.$$

Перевіримо тепер (1.10), (1.11). З визначення ϕ отримуємо

$$|\phi(q, s; q's')| \le (|s| + |s'|) \sqrt{v_1(q)} \sqrt{v_1(q')}.$$

З того, що v не залежить від s, випливає

$$\|\phi\|_{2,\gamma}^2 \le b_1^2 \|\sqrt{v_1}\|_{2,\gamma}^2, \qquad b_1^2 = 2\left(\int e^{-s^2/2} ds\right)^{-1} \int s^2 e^{-s^2/2} ds,$$

де норма з правого боку цієї нерівності асоційована з простором $e^{-\beta u(q)} dq \left(\int e^{-\beta u(q)} dq\right)^{-1}$.

Неважко перевірити, здійснюючи масштабне перетворення змінних множником $\beta^{-1/2n}$, що $\left\|\sqrt{v_1}\right\|_{2,\gamma}^2 = \|v_1\|_{1,\gamma}^2$, $\gamma > 0$, розбігається як $\beta^{-m_1/n}$ при $\beta \to 0$. Це випливає з того, що

$$\lim_{\beta \to 0} \beta v\left(\beta^{-1/2n} q\right) = 0. \tag{3.7}$$

Тому і умова (1.11) виконується, оскільки $m_1 < n$.
Умова (1.10) означає, що

$$\lim_{\beta \to 0} \beta^{1/2} \|v_1\|_{1,2\gamma}^2 \left\|\sqrt{v}\right\|_{2,2} = 0.$$

Застосовуючи те ж масштабне перетворення, бачимо, що $\left\|\sqrt{v}\right\|_{2,2}$ має при малих β асимптотику $\beta^{-m/n}$. Отже, (1.10) виконується, якщо

$$n - m - m_1 > 0, \quad m = \max(m_0, m_1). \tag{3.8}$$

З (3.7) випливає, що норма $\|1\|_{p,\gamma}$, $p > 0$ строго додатна, якщо β належить околу нуля.

Ми показали, що всі умови теореми 1.1 виконуються, якщо виконується (3.8). Як наслідок справедлива така теорема.

Теорема 3.1. *Нехай функції* $F_{(q,s)_X}((q,s)_Y)$ *задовольняють умову* (2.1) *з* $\omega_x = (q,s)_x = (q_x, s_x)$ *і парним потенціалом, заданим* (3.3), (3.4), *а також* $\gamma > 3$. *Якщо виконується* (3.8), *то справджуються висновки теореми* 1.1 *і кореляційні функції* $\rho^\Lambda(q_X)$ *у термодинамічній границі задані так*:

$$\rho(q_X) = e^{-\sum_{x \in X}\left(\beta u(q_x) + \ln\int e^{-\beta u(q)} dq\right)} \rho_X(q_X),$$

$$\rho_X(q_X) = \sum_Y \rho(X \cup Y) \int e^{-\frac{1}{2}\sum_{x \in X} s_x^2} ds_X \int P((dqds)_Y) F_{(q,s)_X}((q,s)_Y),$$

де підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$.

4. Квантові системи. Розглянемо системи лінійних осциляторів на скінченній підмножині Λ d-вимірної гіперкубічної гратки з гамільтоніаном

$$H^\Lambda = -\frac{1}{2}\sum_{x \in \Lambda} \partial_x^2 + U(q_\Lambda),$$

де U визначається (3.1).

Гіббсівські середні оператора $\hat{F}_X$ множення на функцію $F_X(q_X)$ визначені з допомогою редукованих матриць густини $\rho^\Lambda(q_X | q_X)$

$$\langle F_X \rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \mathrm{Tr}\left(\hat{F}_X e^{-\beta H^\Lambda}\right) =$$

$$= Z_\Lambda^{-1} \int F_X(q_X) e^{-\beta H^\Lambda}(q_\Lambda; q_\Lambda) dq_\Lambda = \int F_X(q_X) \rho^\Lambda(q_X | q_X) dq_X. \tag{4.1}$$

Застосовуючи формулу Фейнмана – Каца [7], отримуємо

$$\begin{gathered} \rho^\Lambda(q_X | q'_X) = \int \rho^\Lambda(w_X) P^\beta_{q_X, q_{X'}}(dw_X), \\ \rho^\Lambda(w_X) = Z_\Lambda^{-1} \int e^{-\beta U(w_\Lambda)} P_0\left((dqdw)_{\Lambda \setminus X}\right), \end{gathered} \tag{4.2}$$

де

$$U(w_\Lambda) = \beta^{-1} \int_0^\beta U(w_\Lambda(t))\,dt, \qquad P_0((dqdw)_X) = \prod_{x\in X} dq_x P^\beta_{q_x,\,q_x}(dw_x).$$

Редукція до системи з потенціальною енергією (1.1) здійснюється з допомогою формули

$$\exp\left\{-\int_0^\beta U'(w_X(\tau))\,d\tau\right\} =$$

$$= \int \exp\left\{i \sum_{x,\,y\in X} J_1(|x-y|) \int_0^\beta u_1\big(w_x(\tau), w_y(\tau)\big)\,dw^*_x(\tau)\right\} P_0\big(dw^*_X\big), \tag{4.3}$$

де праворуч в цій рівності фігурує стохастичний інтеграл за вінерівським процесом, а P_0 — вінерівська міра, зосереджена на просторі Ω_0 траєкторій, що стартують з нуля. Отже, $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega_0 \times \Omega_\beta$, $\omega = (q, w, w^*)$, $P_0(d\omega) = dq\,P^\beta_{q,\,q}(dw)P_0(dw^*)$, $P^\beta_{q,\,q}(dw)$ — умовна міра Вінера, зосереджена на просторі Ω_β петель на часовому інтервалі $[0, \beta]$,

$$\rho^\Lambda(q_X | q'_X) = \int \rho^\Lambda(\omega_X) P^\beta_{q_X,\,q'_X}(dw_X) P_0(dw^*_X),$$
$$\rho^\Lambda(\omega_X) = Z_\Lambda^{-1} \int e^{-\beta U(\omega_\Lambda)} P_0(\omega_{\Lambda\setminus X}), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{Im} u_{x-y}(\omega_x, \omega_y) = J_1(|x-y|)\phi\big(w_x, w^*_x; w_y, w^*_y\big), \tag{4.5}$$

$$\phi\big(w_x, w^*_x; w_y, w^*_y\big) = \beta^{-1}\left[\int_0^\beta dw^*_x(\tau) u_1\big(w_x(\tau), w_y(\tau)\big) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\beta dw^*_y(\tau) u_1\big(w_y(\tau), w_x(\tau)\big)\right],$$

$$\operatorname{Re} U(\omega_X) = \beta^{-1} \int_0^\beta \big(U(w_X(t)) - U'(w_X(t))\big)\,dt =$$

$$= \sum_{x\in X} u(w_x) + \sum_{x,\,y\in X} u_{x-y}\big(w_x, w_y\big),$$

$$u(w) = \beta^{-1}\int_0^\beta u(w(\tau))\,dt, \qquad u_{x-y}\big(w_x, w_y\big) = \beta^{-1}\int_0^\beta u_{x-y}\big(w_x(t), w_y(t)\big)\,dt, \tag{4.6}$$

$$P_0(d\omega_X) = dq_X P^1_{q_X,\,q_X}(dw_X) P_0\big(dw^*_X\big),$$

де $u(q)$, $u_{x-y}(q, q')$ взяті з (3.1).

Це означає, що для $\rho^\Lambda(\omega)$ з (4.2) справедливе подання (1.2).

Парний потенціал $u_{x-y}\big(w_x, w_y\big)$ підкоряється (1.5) з

$$v(w) = \beta^{-1}\int_0^\beta v(w(t))\,dt,$$

де $v(q)$ визначається з (3.6). Це випливає з нерівності Шварца.

Використовуючи формулу

$$\int \left(\int_0^t f(\tau) dw^*(\tau) \right)^2 P_0\left(dw^*\right) = \int_0^t f^2(\tau) d\tau$$

та елементарну нерівність $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, отримуємо

$$\int P_0\left(d\omega^*\right) P_0\left(d\omega'^*\right) \phi^2(\omega, \omega') \le 4\beta^{-2} \int_0^\beta u_1^2(w(\tau), w'(\tau))\, d\tau.$$

З цієї формули, (3.5) та нерівності Шварца виводимо оцінку

$$\|\phi\|_{2,\gamma}^2 \le 4\beta^{-2}\left(\int dq P_{q,q}^\beta(dw) e^{-\beta u(w)}\right)^{-2} \times$$

$$\times \int dq\, dq' P_{q,q}^\beta(dw) P_{q',q'}^\beta(dw') e_\gamma(w) e_\gamma(w') e^{-\beta[u(w')+u(w')]} \int_0^\beta u_1^2(w(\tau), w'(\tau))\, d\tau \le$$

$$\le 4\beta^{-1}\left(\int dq P_{q,q}^\beta(dw) e^{-\beta u(w)}\right)^{-2} \times$$

$$\times \int dq\, dq' P_{q,q}^\beta(dw) P_{q',q'}^\beta(dw') e_\gamma(w) e_\gamma(w') e^{-\beta[u(w)+u(w')]} v_1(w) v_1(w'),$$

де

$$v_1^2(w) = \beta^{-1} \int_0^\beta v_1^2(w(\tau))\, d\tau.$$

В результаті одержуємо

$$\|\phi\|_{2,\gamma}^2 \le 4\beta^{-1} \|v_1\|_{1,\gamma}^2 \le 4\beta^{-1} \left\| v_1^2 \right\|_{1,2\gamma}, \quad \gamma \ge 0. \tag{4.7}$$

Тепер, щоб довести теорему 1.1, потрібно перевірити умови (1.10), (1.11), тобто встановити асимптотику по β інтегралів

$$I_n = \int dq P_{q,q}^\beta(dw) \exp\left\{ -\int_0^\beta w^{2n}(\tau)\, d\tau \right\},$$

$$I_n(m) = \int dq P_{q,q}^\beta(dw) \exp\left\{ -\int_0^\beta w^{2n}(\tau)\, d\tau \right\} \int_0^\beta w^{2m}(\tau)\, d\tau.$$

Це можна зробити з допомогою формули

$$\int P_{\sqrt{\beta q}, \sqrt{\beta q}}^\beta(dw) f(w(t_1), \ldots, w(t_n)) =$$

$$= \sqrt{\beta^{-1}} \int P_{q,q}^1(dw) f\left(\sqrt{\beta} w(\beta^{-1} t_1), \ldots, \sqrt{\beta} w(\beta^{-1} t_n)\right).$$

Щоб вивести її, необхідно скористатись визначенням міри Вінера

$$\int P_{q,q}^t(dw) f(w(t_1), \ldots, w(t_n)) =$$

$$= \int f(q_1, \ldots, q_n) P_o^{t_1}(q_1, q) \prod_{j=2}^n P_0^{t_{j+1}-t_j}(q_j, q_{j-1}) P_0^{t-t_n}(q, q_n)\, dq_j\, dq_1$$

та рівністю

$$P_0^t(gq, gq') = \exp\left\{t\partial^2\right\}(gq; gq') = (4\pi t)^{1/2}\exp\left\{-\frac{g^2|q-q'|^2}{4t}\right\} =$$

$$= g^{-1}P_0^{tg^{-2}}(q, q').$$

Змінюючи масштаб q множником $\sqrt{\beta}$ $\left(q \to \sqrt{\beta}q\right)$, отримуємо

$$I_n = \int dq P_{q,q}^1(dw)\exp\left\{-\beta^{n+1}\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$I_n(m) = \beta^{m+1}\int dq P_{q,q}^1(dw)\exp\left\{-\beta^{n+1}\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau\right\}\int_0^1 w^{2m}(\tau)\,d\tau.$$

При цьому необхідно застосовуючи формулу

$$\int_0^\beta w^{2n}\left(\beta^{-1}\tau\right)d\tau = \beta\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau.$$

В результаті одержуємо

$$I_n(m) \le \beta^{1-m/n}\int dq P_{q,q}^1(dw)\exp\left\{-\beta^{n+1}\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau\right\}\exp\left\{\beta^{m+m/n}\int_0^1 w^{2m}(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Із нерівності Голдена – Томпсона $\operatorname{Tr}(e^{A+B}) \le \operatorname{Tr} e^A \operatorname{Tr} e^B$ випливає

$$I_n(m) \le \beta^{1-m/n}(4\pi)^{-1/2}\int e^{-\beta^{n+1}q^{2n}+\beta^{m+m/n}q^{2m}}\,dq.$$

Змінюючи масштаб q множником $\beta^{-(n+1)/2n}$, маємо

$$I_n(m) \le \beta^{1/2-m/n-1/2n}(4\pi)^{-1/2}\int e^{-q^{2n}+q^{2m}}\,dq. \tag{4.8}$$

Використовуючи нерівність Йенсена, отримуємо

$$I_n \ge \int dq\exp\left\{-\beta^n\int P_{q,q}^1(dw)\,d\tau\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Таким чином,

$$\int P_{q,q}^1(dw)\int_0^1 w^{2n}(\tau)\,d\tau = \int_0^1\int P_0^\tau(q-q')q'^{2n}P_0^{1-\tau}(q'-q)\,dq'\,d\tau \le$$

$$\le 2^{2n}\int_0^1\int P_0^\tau(q')\left(q'^{2n}+q^{2n}\right)P_0^{1-\tau}(q')\,dq'\,d\tau = (4\pi)^{-1/2}(2q)^{2n} + c_n^0.$$

При цьому ми скористались нерівністю $(q'-q+q)^{2n} \le 2^{2n}\left(q^{2n}+(q-q')^{2n}\right)$ та напівгруповою властивістю ярда $P_0^t(q, q')$. Стала c_n^0 визначається останньою рівністю.

Далі, змінюючи масштаб множником $\beta^{-1/2}$, одержуємо

$$I_n^{-1} \le e^{-\beta^n c_n^0}\left(\int dq\, e^{-(4\pi)^{-1/2}\beta^n(2q)^{2n}}\right)^{-1} = \beta^{1/2}e^{\beta^n c_n^0}\left(\int dq\, e^{-(4\pi)^{-1/2}(2q)^{2n}}\right)^{-1}.$$

З (4.8) та останньої нерівності випливає

$$(I_n)^{-1} I_n(m) \le \beta^{1-(2m+1)/2n} C(n,m),$$

$$C(n,m) = e^{c_n^0}\left(2\sqrt{\pi}\int dq\, e^{-(4\pi)^{-1/2}(2q)^{2n}}\right)^{-1}\int e^{-q^{2n}+q^{2m}}dq, \quad \beta \le 1. \tag{4.9}$$

Такий самий результат має місце для будь-якого обмеженого полінома v в експоненті у цих інтегралах. Отже, з (4.7) та (4.9) випливає

$$\|\phi\|_{2,\gamma} \le \beta^{-(2m_1+1)/2n} C(n, m_1) C_\phi, \tag{4.10}$$

де C_ϕ — стала.

З (4.10) випливає, що (1.11) справджується, оскільки $n - m_1 \ge 1$.

З визначення v та нерівності Шварца отримуємо

$$\left\|\sqrt{v}\right\|_{2,2}^2 \le \int dq\, P_{q,q}^{\beta}(dw) e^{\beta J \gamma v(w)} v(w). \tag{4.11}$$

З цієї нерівності та (4.9) випливає

$$\left\|\sqrt{v}\right\|_{2,2} \le \beta^{-(2m+1)/4n} C(n,m), \tag{4.12}$$

де $m = \max(m_0, m_1)$.

Отже, (1.10) виконується, якщо $1/2 - (2m_1+1)/2n - (2m+1)/4n > 0$, або

$$2(n - 2m_1 - m) - 3 > 0. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *Нехай функції* $F_{\omega_X}(\omega_Y)$ *задовольняють* (2.1) *з* $\omega_X = (q, w, w^*)_X = (q_X, w_X, w_X^*)$ *та парним потенціалом, визначеним формулами* (4.5), (4.6), *а також* $\gamma > 3$ *і виконуються умови* (3.5), (4.13). *Тоді справедливі висновки теореми* 2.1 *і функції* $\rho^{\Lambda}(q_X | q'_X)$ *у термодинамічній границі задані так*:

$$\rho(q_X | q'_X) = \int e^{-\sum_{x\in X}(\beta u(w_x) + c(u))} \rho_X(\omega_X) P_0(dw_X^*) P_{q_X, q'_X}^{\beta}(dw_X) =$$

$$= \sum_Y \overline{\rho}(X \cup Y) \int e^{-\beta \sum_{x\in X}(u(w_x)+c(u))} P_0(dw_X^*) P_{q_X, q'_X}^{\beta}(dw_X) \int P(\omega_Y) F_{\omega_X}(\omega_Y),$$

де підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$ *та* $c(u) = \ln \int dq P_{q,q}^{\beta}(dw) e^{-\beta u(w)}$.

Зауваження. Постановку задачі термодинамічної границі та її розв'язок в системах частинок читач може знайти в роботах [8, 9].

1. *Kunz H.* Analyticity and clustering properties of unbounded spin systems // Communs Math. Phys. – 1978. – **59**. – P. 53 – 69.
2. *Ruelle D.* Statistical mechanics. Rigorous results. – New York: Benjamin, 1969. – 219 p.
3. *Park Y. M., Yoo H. J.* Uniqueness and clustering properties of Gibbs states for classical and quantum unbounded spin systems // J. Stat. Phys. – 1995. – **80**, № 12. – P. 223 – 272.
4. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Minlos R. A., Rebenko O. L.* Small mass behaviour of quantum Gibbs states for lattice models with unbounded spins. – Uni. da Madeira, 1997. – (Preprint / UMa-CCM, 22/97).
5. *Minlos R. A. ,Verbeure A., Zagrebnov V. A.* A Quantum crystal model in the *light-mass limit:* Gibbs states. – Leuven, 1997. – 68 p. – (Preprint KUL-TP-97/16).
6. *Gruber C., Kunz H.* General properties of polymer systems // Communs Math. Phys. – 1971. – **22**. – P. 133 – 161.
7. *Simon B.* Functional integration and quantum physics. – New York: Acad. Press, 1979.
8. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. – New York: Gordon and Breach, 2000. – 356 p.
9. *Петрина Д. Я.* Математические основы квантовой статистической механики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины,1995. – 623 с.

Одержано 22.06.2001