УДК 517.956

О. Д. Власій (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We establish conditions of the univalent solvability of a problem with nonlocal two-point conditions in a variable t and local boundary conditions in a variable x for partial differential equations with coefficients varying in t and x in a rectangular domain. We prove metric statements concerning lower bounds of small denominators that appear when constructing a solution of the problem.

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними двоточковими умовами за змінною t та локальними крайовими умовами за змінною x для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними по t та x коефіцієнтами у прямокутній області. Доведено метричні твердження, які стосуються оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

1. Задачі з нелокальними крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними є взагалі умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. Для деяких класів рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними по t або x коефіцієнтами такі задачі вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [1 – 7] та бібліографію в [7]).

У даній статті, яка розвиває дослідження роботи [7] (гл. 5), вивчається задача з нелокальними умовами за змінною t та умовами типу умов Діріхле за змінною x для факторизованих операторів із частинними похідними зі змінними по t та x коефіцієнтами.

2. Розглянемо в області $D = \left\{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t \in (0, T),\ x \in (0, l)\right\}$ задачу

$$N[u] \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_j(t)L - b_j(t)\right)u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$M_q[u] \equiv \left.\frac{\partial^{q-1}u(t, x)}{\partial t^{q-1}}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{\partial^{q-1}u(t, x)}{\partial t^{q-1}}\right|_{t=T} = \varphi_q(x), \quad q = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$L^s u\big|_{x=0} = L^s u\big|_{x=l} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

де $a_j(t)$, $b_j(t)$ — комплекснозначні функції, $a_j, b_j \in C^{j-1}([0, T])$; $\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; $L \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$, $p \in C^{2n-1}([0, l])$, $q \in C^{2n-2}([0, l])$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$; $L^0 u = u$, $L^s u = L(L^{s-1}u)$, $s = 1, \dots, n$.

Позначимо через $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ та $X = \{X_k(x),\ k \in \mathbf{N}\}$ систему власних чисел та систему власних функцій відповідно задачі

$$LX = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{4}$$

Зауважимо [8], що система власних функцій задачі (4) є повною і ортогональною в $L_2(0, l)$ (надалі вважатимемо її нормованою), а всі власні значення задачі (4) є різними та додатними. При цьому $X_k \in C^{2n}([0, l])$, $k \in \mathbf{N}$, і справедливі такі оцінки [8, 9]:

$$c_1 k^2 \leq \lambda_k \leq c_2 k^2, \quad 0 < c_1 \leq c_2, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

$$\max_{x \in [0, l]}\left|X_k^{(\sigma)}(x)\right| \leq c_3 \lambda_k^{\sigma/2}, \quad c_3 = c_3(\sigma), \quad \sigma = 0, 1, \dots, 2n, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Надалі використовуватимемо такі позначення: $C^{(n,2n)}(\overline{D})$ — банахів простір [10] функцій $w(t,x)$ з нормою

$$\|w\|_{C^{(n,2n)}(D)} = \sum_{2\alpha+\beta\le 2n} \max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}w}{\partial t^{\alpha}\partial x^{\beta}}\right|;$$

B_α, $\alpha>0$, — простір функцій $\varphi\in L_2(0,l)$, $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$, із нормою

$$\|\varphi\|_{B_\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp(\alpha\lambda_k);$$

$C([0,T],B_\alpha)$ — простір функцій $\psi(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)X_k(x)$, визначених в $\overline{D}$, які є неперервними по t і для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ належать простору B_α,

$$\|\psi\|_{C([0,T],B_\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|\psi_k(t)|\exp(\alpha\lambda_k).$$

Будемо вважати, що в задачі (1) – (3) функції $\varphi_q(x)$, $q=1,\ldots,n$, та $f(t,x)$ розвиваються в ряди Фур'є

$$\varphi_q(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{qk}X_k(x), \quad q=1,\ldots,n, \quad f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x), \tag{7}$$

де

$$\varphi_{qk} = \int_0^l \varphi_q(x)X_k(x)\,dx, \quad q=1,\ldots,n, \quad f_k(t) = \int_0^l f(t,x)X_k(x)\,dx, \quad k\in\mathbf{N}.$$

Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x). \tag{8}$$

Якщо ряд (8) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінною x до порядку $2n-2$ включно, рівномірно збігаються в області $\overline{D}$, то функція $u(t,x)$, визначена формулою (8), задовольняє крайові умови (3). На підставі (1), (2), (7), (8) для визначення кожної з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbf{N}$, отримуємо таку задачу:

$$N_k[u_k] \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}-\lambda_k a_j(t)-b_j(t)\right)u_k(t) = f_k(t), \tag{9}$$

$$M_q[u_k] \equiv u_k^{(q-1)}(0)-\mu u_k^{(q-1)}(T) = \varphi_{qk}, \quad q=1,\ldots,n. \tag{10}$$

Розглянемо однорідну задачу, що відповідає задачі (9), (10):

$$N_k[u_k] = 0, \tag{11}$$

$$M_q[u_k] = 0, \quad q=1,\ldots,n. \tag{12}$$

Рівняння (11) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$H_{kp}(t) = \begin{cases} \exp\left(I_{kn}(t)\right) \int\limits_0^t \exp\left(\Delta I_{k,n-1}(\tau_1)\right) \int\limits_0^{\tau_1} \exp\left(\Delta I_{k,n-2}(\tau_2)\right) \ldots \times \\ \times \int\limits_0^{\tau_{n-p-1}} \exp\left(\Delta I_{kp}(\tau_{n-p})\right) d\tau_{n-p} \ldots d\tau_2\, d\tau_1, \qquad p = 1, \ldots, n-1; \\ \exp\left(I_{kn}(t)\right), \qquad p = n, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$I_{kj}(t) = \int\limits_0^t \left(\lambda_k a_j(\tau) + b_j(\tau)\right) d\tau, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\Delta I_{kj}(t) = I_{kj}(t) - I_{k,j+1}(t), \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови

$$a_j^{(\nu)}(0) = a_j^{(\nu)}(T), \quad b_j^{(\nu)}(0) = b_j^{(\nu)}(T), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, j-2, \;\; j = 2, 3, \ldots, n. \tag{15}$$

Тоді характеристичний визначник [9] задачі (11), (12)

$$\Delta(\lambda_k) = \det\left\| M_q\left[H_{kp}(t) \right] \right\|_{q,\, p=1}^{n}$$

обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \mu \exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right), \tag{16}$$

де

$$A_j = \int\limits_0^T a_j(t)\, dt, \quad B_j = \int\limits_0^T b_j(t)\, dt, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3. При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (1) – (3) будемо розглядати також однорідне рівняння

$$N[u] = 0 \tag{17}$$

та однорідні нелокальні умови

$$M_q[u] = 0, \quad q = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1) – (3) *у просторі* $C^{(n,2n)}(\overline{D})$ *необхідно й досить, щоб виконувались умови*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \qquad 1 - \mu \exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо для деякого $\lambda_{\hat{k}} \in \Lambda$ хоча б одна з умов (19) не виконується, то $\Delta(\lambda_{\hat{k}}) = 0$. При цьому існують нетривіальні розв'язки задачі (11), (12), (15), які зображуються формулами $u_{\hat{k}}(t) = \sum_{p=1}^{n} C_{\hat{k}p} H_{\hat{k}p}(t)$, де $C_{\hat{k}p}$, $p = 1, \ldots, n$, є розв'язками при $\lambda_k = \lambda_{\hat{k}}$ однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{p=1}^{n} C_{kp} M_q\left[H_{kp}(t) \right] = 0, \quad q = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Тоді однорідна задача (3), (15), (17), (18) має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t,x) = u_{\hat{k}}(t)X_{\hat{k}}(x)$, а розв'язок неоднорідної задачі (1) – (3), (15), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1(t,x)$ та $u_2(t,x)$ задачі (1) – (3), (15) з простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$. Тоді функція $\tilde{u}(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, яка належить простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$, є розв'язком однорідної задачі (3), (15), (17) (18) і зображається рядом Фур'є

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_k(t)X_k(x). \tag{21}$$

При цьому функції $N[\tilde{u}(t,x)]$ та $M_q[\tilde{u}(t,x)]$, $q = 1,\ldots,n$, теж розвиваються в ряди Фур'є за системою функцій X, і ці ряди збігаються з рядами, одержаними формальним застосуванням операторів N та M_q, $q = 1,\ldots,n$, до ряду (21). Із рівностей Парсеваля для функцій $N[\tilde{u}(t,x)]$ та $M_q[\tilde{u}(t,x)]$, $q = 1,\ldots,n$, випливає, що для кожного $k \in \mathbf{N}$ $\tilde{u}_k(t)$ є розв'язком задачі (11), (12), (15), який зображається у вигляді $\tilde{u}_k(t) = \sum_{p=1}^{n} \tilde{C}_{kp}H_{kp}(t)$, де $\left(\tilde{C}_{k1}, \tilde{C}_{k2},\ldots,\tilde{C}_{kn}\right)$ — розв'язок системи (20). Якщо виконуються умови (19), то $\Delta(\lambda_k) \neq 0$, $\lambda_k \in \Lambda$, і для кожного $k \in \mathbf{N}$ $\tilde{C}_{kp} = 0$, $p = 1,\ldots,n$, а отже, $\tilde{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbf{N}$. Із рівності Парсеваля для функції $\tilde{u}(t,x)$ та неперервності $\tilde{u}(t,x)$ в $\overline{D}$ випливає, що $\tilde{u}(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено.

Позначимо

$$A_j^{(1)} = \operatorname{Re} A_j, \quad A_j^{(2)} = \operatorname{Im} A_j, \quad B_j^{(1)} = \operatorname{Re} B_j, \quad B_j^{(2)} = \operatorname{Im} B_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

***Зауваження* 1.** Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ вираз $1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)$ є відмінним від нуля тоді і тільки тоді, коли справджується хоча б одна з умов:

а) $\ln|\mu| + B_j^{(1)} + \lambda_k A_j^{(1)} \neq 0$,

б) $\arg\mu + B_j^{(2)} + \lambda_k A_j^{(2)} \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$.

4. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1) – (3), (15). Надалі вважатимемо, що виконуються умови (19). Тоді для кожного $k \in \mathbf{N}$ розв'язок задачі (9), (10), (15) має вигляд

$$u_k(t) = V_k(t) + \sum_{p=1}^{n} C_{kp}H_{kp}(t), \tag{22}$$

де

$$V_k(t) = \exp(I_{kn}(t)) \int_0^t \exp\left(\Delta I_{k,n-1}(\tau_1)\right) \times$$

$$\times \int_0^{\tau_1} \exp\left(\Delta I_{k,n-2}(\tau_2)\right) \ldots \int_0^{\tau_1} \exp\left(\Delta I_{k1}(\tau_{n-1})\right) \times$$

$$\times \int_0^{\tau_{n-1}} f_k(\tau_n)\exp(-I_{k1}(\tau_n))\, d\tau_n d\tau_{n-1} \ldots d\tau_2 d\tau_1, \tag{23}$$

функції $H_{kp}(t)$ визначені формулами (13), а коефіцієнти C_{kp}, $p = 1,\ldots,n$, є розв'язком системи рівнянь

$$\sum_{p=1}^{n} C_{kp} M_q\big[H_{kp}\big] = \varphi_{qk} - M_q[V_k], \quad q = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

визначник якої $\Delta(\lambda_k)$ має вигляд (16). Розв'язок системи (24) визначається формулами

$$C_{kp} = \sum_{q=1}^{p} (-1)^{p+q} \frac{\Phi_{qk} + \mu R_{kq}(T)\exp(\lambda_k A_q + B_q)}{\prod_{j=q}^{p}\left(1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right)} \Delta_{pq}(\lambda_k), \quad p = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

в яких

$$R_{k1}(t) = \int_0^t f_k(\tau_1)\exp(-I_{k1}(\tau_1))\,d\tau_1,$$

$$R_{kj}(t) = \int_0^t \exp\left(\Delta I_{k,\,j-1}(\tau_1)\right)\int_0^{\tau_1} \exp\left(\Delta I_{k,\,j-2}(\tau_2)\right)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{j-2}} \exp\left(\Delta I_{k1}(\tau_{j-1})\right)\int_0^{\tau_{j-1}} f_k(\tau_j)\exp\left(-I_{k1}(\tau_j)\right)d\tau_j\, d\tau_{j-1}\ldots d\tau_2\, d\tau_1, \quad j = 2, \ldots, n,$$

$$\Phi_{jk} = \sum_{m=j}^{n}\left(\sum_{s=0}^{m-j} G_{jms}\lambda_k^s\right)\varphi_{n-m+1,\,k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де G_{jms} — сталі, які не залежать від λ_k,

$$\Delta_{pq}(\lambda_k) =$$

$$= \begin{cases} 1, & q = p; \\ \begin{vmatrix} F_{k,p,p-1}(T) & F_{k,p,p-2}(T) & \cdots & F_{k,p,q+1}(T) & F_{kpq}(T) \\ 1-\frac{1}{\mu}\exp\left(-I_{k,p-1}(T)\right) & F_{k,p-1,p-2}(T) & \cdots & F_{k,p-1,q+1}(T) & F_{k,p-1,q}(T) \\ 0 & 1-\frac{1}{\mu}\exp\left(-I_{k,p-2}(T)\right) & \cdots & F_{k,p-2,q+1}(T) & F_{k,p-2,q}(T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{1}{\mu}\exp\left(-I_{k,q+1}(T)\right) & F_{k,q+1,q}(T) \end{vmatrix} \times \\ \quad \times (-\mu)^{p-q}\prod_{j=q+1}^{p}\exp(\lambda_k A_j + b_j), \quad q = 1, \ldots, p-1, & \end{cases}$$

де

$$F_{kjr}(t) = \int_0^t \exp\left(\Delta I_{k,\,j-1}(\tau_1)\right)\int_0^{\tau_1} \exp\left(\Delta I_{k,\,j-2}(\tau_2)\right)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{j-r-1}} \exp\left(\Delta I_{kr}(\tau_{j-r})\right)d\tau_{j-r}\ldots d\tau_2\, d\tau_1, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad r = 1, \ldots, j-1.$$

На підставі формул (8) і (22) формальний розв'язок задачі (1) – (3), (15) зображається рядом

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(V_k(t) + \sum_{p=1}^{n} C_{kp}H_{kp}(t)\right)X_k(t). \tag{26}$$

Ряд (26), взагалі, є розбіжним, бо відмінні від нуля вирази $1-\mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)$, $j = 1, \ldots, n$ (див. формулу (25)), можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості чисел $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (1) – (3), (15) пов'язане з проблемою малих знаменників. Введемо такі позначення: $\alpha_1 = K$, $\alpha_2 = K + \beta_1 + \beta_2$, де

$$\beta_1 = \max\{C_1, 0\}, \quad \beta_2 = \max\{C_2, 0\}, \quad K = n(\beta_1 + \beta_2(n-1)/2);$$

$$C_1 = \max_{1\le j\le n}\left\{\max_{t\in[0,T]} \operatorname{Re}\int_0^t a_j(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$C_2 = \max_{1\le j\le n}\left\{\max_{t\in[0,T]} \operatorname{Re}\int_0^t \left(a_{j-1}(\tau) - a_j(\tau)\right)d\tau\right\}, \quad a_0(t) \equiv 0.$$

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (19) *і існують сталі* $\gamma_j \ge 0$, $P_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконуються нерівності*

$$\left|1-\mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right| \ge P_j \lambda_k^{-\gamma_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Якщо $\varphi_q \in B_{\delta_1}$, $q = 1, \ldots, n$, $\delta_1 > \alpha_1$, $f \in C\left([0,T], B_{\delta_2}\right)$, $\delta_2 > \alpha_2$, *то існує розв'язок задачі* (1) – (3), (15) *із простору* $C^{(n,2n)}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$ *та* $\varphi_q(x)$, $q = 1, \ldots, n$.

Доведення. За умов теореми, на підставі оцінок (5), (6) та формул (13), (23), (25), (26), (27) отримуємо

$$\|u\|_{C^{(n,2n)}(\overline{D})} \le C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{3n+\gamma-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left|\varphi_{qk}\right|\right)\exp(\alpha_1\lambda_k) +$$

$$+ C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2n+\gamma} \max_{t\in[0,T]}\left|f_k(t)\right| \exp(\alpha_2\lambda_k), \tag{28}$$

де C_3, C_4 — додатні сталі; $\gamma = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j$. Використовуючи нерівність $h^p \le$ $\le C_5\exp(\varepsilon h)$, де $C_5 = C_5(p,\varepsilon) > 0$, $h \ge 0$, яка виконується для довільних $p \ge 0$, $\varepsilon > 0$, із (28) отримуємо

$$\|u\|_{C^{(n,2n)}(\overline{D})} \le C_6 \sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{qk}\right|\exp((\alpha_1+\varepsilon_1)\lambda_k)\right) +$$

$$+ C_7 \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]}\left|f_k(t)\right| \exp((\alpha_2+\varepsilon_2)\lambda_k) =$$

$$= C_6 \sum_{q=1}^{n}\left\|\varphi_q\right\|_{B_{\delta_1}} + C_7\|f\|_{C([0,T], B_{\delta_2})} < \infty, \tag{29}$$

де C_6, C_7 — додатні сталі, $\varepsilon_j = \delta_j - \alpha_j$, $j = 1, 2$. З оцінки (29) випливає доведення теореми.

5. З'ясуємо, за яких умов виконуються оцінки (27). Для цього потрібне наступне твердження.

Лема. *Нехай* $\Phi(\lambda_k)$ *— обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}$) *чисел* $a \in \mathbf{R}$ *нерівність*

$$\left|\Phi(\lambda_k) - am/\lambda_k\right| \geq \lambda_k^{-3/2-\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) пар (λ_k, m), $\lambda_k \in \Lambda$, $m \in \mathbf{Z}$.

Дана лема є частковим випадком леми з [1] і доводиться за схемою доведення леми 2.4 із гл. 1 [7].

Легко показати, що для тих j, $1 \leq j \leq n$, для яких справджується хоча б одна з умов: а) $A_j^{(1)} \neq 0$, б) $\ln|\mu| + B_j^{(1)} \neq 0$, виконуються оцінки $|1 - \mu\exp(\lambda_k A_j + B_j)| \geq \rho > 0$ для всіх (крім, можливо, одного) $\lambda_k \in \Lambda$.

Нехай справджуються умови

$$A_j^{(1)} = 0, \quad \ln|\mu| + B_j^{(1)} = 0, \quad A_j^{(2)} \neq 0. \tag{30}$$

Тоді на основі нерівності $\sin x \geq 2x/\pi$, яка виконується для всіх $x \in [0, \pi/2]$, маємо

$$\left|1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right| > \lambda_k \left|A_j^{(2)}\right| \left|\frac{\theta_{kj}}{\lambda_k A_j^{(2)}} - \frac{1}{A_j^{(2)}}\frac{m}{\lambda_k}\right|, \tag{31}$$

де $\theta_{kj} = \left(\arg\mu + B_j^{(2)} + \lambda_k A_j^{(2)}\right)/(2\pi)$, $m = m(\lambda_k) \in \mathbf{Z}$ таке, що $-1/2 < \theta_{kj} - m \leq 1/2$.

На підставі леми та нерівності (31) отримуємо, що для тих j, $1 \leq j \leq n$, для яких виконуються умови (30), оцінки $\left|1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right| > \left|A_j^{(2)}\right| \lambda_k^{-1/2-\delta}$, $0 < \delta < 1$, справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}$) чисел $A_j^{(2)}$ для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$.

Якщо $\ln|\mu| + B_j^{(1)} = 0$ та $A_j = 0$, то з умов (19) випливає, що $\arg\mu + B_j^{(2)} \neq 2\pi m$. У цьому випадку $\left|1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right| > \left|\sin\left(\left(\arg\mu + B_j^{(2)}\right)/2\right)\right| = \sigma_j > 0$.

Із викладеного та теореми 2 випливають такі твердження.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (19) *і для кожного* j, $j = 1, \ldots, n$, *хоча б одна з умов* (30) *не виконується. Якщо* $\varphi_q \in B_{\delta_1}$, $q = 1, \ldots, n$, $\delta_1 > \alpha_1$, $f \in C\left([0, T], B_{\delta_2}\right)$, $\delta_2 > \alpha_2$, *то завжди існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3), (15), *який належить простору* $C^{(n, 2n)}(\overline{D})$ *і неперервно залежить від* $f(t, x)$ *та* $\varphi_q(x)$, $q = 1, \ldots, n$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* (19) *і нехай для значень* $j = j_1, \ldots, j_q$, $1 \leq j_r \leq n$, $r = 1, \ldots, q$, *справджуються умови* (30). *Якщо* $\varphi_q \in B_{\delta_1}$, $q = 1, \ldots, n$, $\delta_1 > \alpha_1$, $f \in C\left([0, T], B_{\delta_2}\right)$, $\delta_2 > \alpha_2$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}$) *значень* $A_j^{(2)}$, $j = j_1, \ldots, j_q$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3), (15) *із простору* $C^{(n, 2n)}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t, x)$ *та* $\varphi_q(x)$, $q = 1, \ldots, n$.

Зауваження 2. Нехай коефіцієнти рівняння (1) такі, що справджуються умови $A_j^{(1)} > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді для всіх чисел $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються оцінки $\left|1 - \mu\exp\left(\lambda_k A_j + B_j\right)\right| \geq P\exp\left(\lambda_k A_j^{(1)}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, де P — додатна стала, яка не залежить від λ_k. У цьому випадку теорема 2 справедлива при $\delta_p > \alpha_p - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)}$, $p = 1, 2$.

6. Результати, отримані при дослідженні задачі (1) – (3), переносяться на випадок задачі з умовами (2) і (3) для рівняння

$$P[u] \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_j(t)L - b_j(t) \right)^{n_j} u(t,x) = f(t,x), \qquad n_1 + \ldots + n_m = n, \tag{32}$$

де $a_j, b_j \in C^{n_1+\ldots+n_j-1}([0,T])$. Розв'язок задачі (2), (3), (32) шукаємо у вигляді ряду (8), де кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, є розв'язком задачі (10) для рівняння

$$P_k[u_k] \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k a_j(t) - b_j(t) \right)^{n_j} u_k(t) = f_k(t). \tag{33}$$

Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$P_k[u_k] = 0, \tag{34}$$

яке відповідає рівнянню (33), має такий вигляд:

$$H_{kr}(t) = \begin{cases} \exp(I_{km}(t)) \int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau_1} \ldots \int\limits_0^{\tau_{n_m-1}} \exp\left(\Delta I_{k,m-1}(\tau_{n_m})\right) \int\limits_0^{\tau_{n_m}} \int\limits_0^{\tau_{1+n_m}} \ldots \\ \ldots \int\limits_0^{\tau_{n_{m-1}+n_m-1}} \exp\left(\Delta I_{k,m-2}(\tau_{n_{m-1}+n_m})\right) \ldots \int\limits_0^{\tau_{n-n_1-\ldots-n_{j+1}}} \int\limits_0^{\tau_{n-n_1-\ldots-n_{j+1}+1}} \ldots \\ \ldots \int\limits_0^{\tau_{n-n_1-\ldots-n_j-1}} \dfrac{\tau_{n-n_1-\ldots-n_j}^{n_1+\ldots+n_j-r}}{(n_1+\ldots+n_j-r)!} \exp\left(\Delta I_{kj}(\tau_{n-n_1-\ldots-n_j})\right) d\tau_{n-n_1-\ldots-n_j} \ldots \\ \ldots d\tau_2\, d\tau_1, \qquad r = n_1+\ldots+n_{j-1}+1, \ldots, n_1+\ldots+n_{j-1}+n_j, \quad j = 1, \ldots, m-1; \\ \dfrac{t^{n-r}}{(n-r)!} \exp(I_{km}(t)), \qquad r = n_1+\ldots+n_{m-1}+1, \ldots, n_1+\ldots+n_{m-1}+n_m, \end{cases}$$

де $I_{kj}(t)$, $j = 1, \ldots, m$, $\Delta I_{kj}(t)$, $j = 1, \ldots, m-1$, визначаються формулами, аналогічними до (14). За виконання умов

$$\begin{gathered} a_j^{(\nu)}(0) = a_j^{(\nu)}(T), \qquad b_j^{(\nu)}(0) = b_j^{(\nu)}(T), \\ \nu = 0, 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_j - 2, \quad j = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{35}$$

(якщо $n_1 = 1$, то для функцій $a_1(t)$, $b_1(t)$ умови вигляду (35) не вимагаються), характеристичний визначник задачі (12), (34) має вигляд

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \mu \exp\left(\lambda_k \int\limits_0^T a_j(t)\,dt + \int\limits_0^T b_j(t)\,dt \right) \right)^{n_j}.$$

Теореми існування та єдиності розв'язку задачі (2), (3), (32), (35) формулюються аналогічно до теорем 1 і 2, де $\alpha_1 = \tilde{K}$, $\alpha_2 = \tilde{K} + \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2$, $\tilde{\beta}_p = \max\left\{\tilde{C}_p, 0\right\}$, $p = 1, 2$, $\tilde{K} = \tilde{\beta}_1 n + \tilde{\beta}_2 \sum_{j=1}^{m} (j-1) n_j$, $\tilde{C}_1 = \max\limits_{1 \le j \le m} \left\{ \max\limits_{t \in [0,T]} \operatorname{Re} \int\limits_0^t a_j(\tau)\,d\tau \right\}$, $\tilde{C}_2 =$ $= \max\limits_{1 \le j \le m} \left\{ \max\limits_{t \in [0,T]} \operatorname{Re} \int\limits_0^t \left(a_{j-1}(\tau) - a_j(\tau) \right) d\tau \right\}$, $a_0(t) \equiv 0$.

***Зауваження* 3.** Нехай коефіцієнти рівнянь (1) та (32) мають вигляд $a_j(t) = a(t) + a_j$, $b_j(t) = b(t) + b_j$, де $a_j, b_j \in \mathbf{C}$. Тоді умови розв'язності задач (1) – (3), (15) та задач (2), (3), (32), (35) мають більш ефективний характер.

1. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком // Мат. студії: Пр. Львів. мат. т-ва. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71–78.
2. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.
3. *Задорожна Н. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 1995. – **47**, № 7. – С. 915–921.
4. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений // Методы исследования дифференциальных и интегральних операторов. – К: Наук. думка. – 1989. – С. 75–79.
5. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.
6. *Комарницька Л. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17–23.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 304 с.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

Одержано 01.06.2000