УДК 517.957:58

Р. М. Черніга (Ін-т математики НАН України, Київ)

НОВІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ БІОЛОГІЇ

We apply the classical Lie approach and the method of additional generating conditions in constructing multiparameter families of exact solutions of the generalized Fisher equation which is a simplification of the known reaction-diffusion system describing spatial segregation of interacting species. We apply the exact solutions in solving nonlinear boundary-value problems with zero Neumann conditions. We compare the analytic results with the corresponding numerical calculations and arrive at the conclusion that the exact solutions obtained play an important role in solving the generalized Fisher equation.

Класичний метод Лі і метод додаткових породжуючих умов застосовано до побудови багатопараметричних сімей точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера, яке є деяким спрощенням відомої системи реакції-дифузії для опису просторового відокремлення взаємодіючих видів. Точні розв'язки застосовано для розв'язання нелінійних крайових задач з нульовими умовами Ноймана. Аналітичні результати порівняно з відповідними числовими обчисленнями, на підставі чого зроблено висновок про важливу роль знайдених точних розв'язків для розв'язання узагальненого рівняння Фішера.

1. Вступ. Нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку описуються найрізноманітніші процеси у фізиці, біології та хімії [1 – 3]. Побудова точних розв'язків таких рівнянь є актуальною проблемою. Особливої ваги набувають розв'язки, що мають певну фізичну, біологічну чи хімічну інтерпретацію. З іншого боку, відомий принцип лінійної суперпозиції розв'язків не застосовний до нелінійних диференціальних рівнянь. Це, зокрема, означає, що класичні методи (метод Фур'є, метод перетворень Лапласа тощо) неможливо перенести на такі рівняння. В окремих випадках вдається лише знайти певну заміну змінних (найвідоміші приклади для рівнянь з частинними похідними — заміна Коула — Гопфа, пара Лакса тощо), яка зводить деяке нелінійне диференціальне рівняння до лінійного чи системи лінійних рівнянь. Проте для інтегрування переважної більшості нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) необхідно застосовувати зовсім інші методи та підходи. У цій роботі ми продемонструємо можливості трьох методів, два з яких відомі, а третій було нещодавно запропоновано [4 – 6] для знаходження точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера

$$U_t = [(\lambda_0 U + \lambda_1) U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{1}$$

де λ_0, λ_1, λ_2 та $\lambda_3 \in \boldsymbol{R}$. Тут і нижче нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, а $U = U(t, x)$ — шукана функція.

Рівняння (1) містить як частковий випадок класичне рівняння Фішера [7]

$$U_t = U_{xx} + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{2}$$

вперше запропоновано для опису поширення генів. Пізніше виявилось, що воно застосовне для опису низки інших процесів [8]. З біологічної точки зору рівняння (1) є більш точною моделлю, ніж рівняння Фішера (2), оскільки воно містить коефіцієнт дифузії $D = \lambda_0 U + \lambda_1$, який залежить від концентрації (густини) U, що в свою чергу є реальним фактором [8]. У рівнянні (1) нижче припускається $\lambda_2 \lambda_3 > 0$, що випливає з суті описуваних біологічних процесів.

Необхідно наголосити, що рівняння Фішера можна розглядати як деяке спрощення (редукцію) класичної дифузійної системи Лотки – Вольтерри

$$\begin{aligned} U_t &= d_1 U_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= d_2 V_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V), \end{aligned} \tag{3}$$

де невід'ємні функції $U(t,x)$ і $V(t,x)$ — густини двох популяцій тварин, які змагаються за виживання (модель хижак-жертва), а невід'ємні сталі a_i, b_i, c_i, d_i, $i=1,2$, характеризують гостроту змагання.

Повністю аналогічним є зв'язок рівняння (1) з моделлю Шігесади – Кавасакі – Терамото [9]

$$\begin{aligned} U_t &= [(d_1+\rho_1 V)U]_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= [(d_2+\rho_2 U)V]_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V). \end{aligned} \tag{4}$$

Ця модель враховує вплив мутацій при змаганні двох популяцій.

Варто зауважити, що, починаючи з піонерських робіт [10, 11], умови існування, єдиності та стійкості розв'язків систем (3), (4) досліджувалися багатьма авторами (див. обширний перелік літератури у роботі [12]). Проте практично немає робіт, в яких були б побудовані відповідні розв'язки у явному вигляді.

Відомо, що нові вислiди, отримані для деякого рівняння, при певних припущеннях можуть бути перенесені на системи подібних рівнянь. Отже, знаходження точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера (1) можна також розглядати як підґрунтя для пошуку розв'язків системи рівнянь (4).

Робота побудована таким чином. У другому пункті класичний метод Лі [13, 14] застосовано для знаходження точних розв'язків рівняння (1). Тут також встановлено, що за допомогою пошуку неліївських Q-умовних симетрій [15, 14] не вдається отримати нові розв'язки цього рівняння.

У третьому пункті для побудови розв'язків рівняння (1) застосовано метод додаткових породжуючих (генеруючих) умов [4 – 6]. У четвертому пункті знайдено розв'язки застосовано для побудови точних розв'язків відповідних нелінійних задач Ноймана з нульовими крайовими умовами. Наголосимо, що нульові умови Ноймана — це типові умови при опису біологічних процесів як в обмежених, так і в необмежених областях [8]. Обговорюється також зв'язок отриманих розв'язків з наближеними розв'язками, які було побудовано за допомогою пакета програм, описаного в роботі [16].

2. Застосування симетрій Лі та Q-умовних симетрій для пошуку точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера (1). Беручи до уваги відому роботу [17]. помічаємо, що рівняння (1) при довільно заданих коефіцієнтах λ_i, $i=0,\ldots,3$, інваріантне відносно тривіальної алгебри Лі, породженої операторами $P_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ і $P_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Окрім того, при прийнятому вище обмеженні $\lambda_2\lambda_3 > 0$ є лише один випадок

$$\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1^2\lambda_3, \tag{5}$$

коли рівняння (1) допускає додаткові ліївські оператори. Співвідношення (5) містить два випадки $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_1 \neq 0$, яким відповідають оператори

$$T_0 = \exp(-\lambda_2 t)\left(P_t + \lambda_2 U\frac{\partial}{\partial U}\right), \qquad \lambda_0 = 1 \tag{6}$$

і

$$T_1 = \exp(\lambda_2 t)\left(P_t - \lambda_2\left(U + \frac{1}{\lambda_0}\right)\frac{\partial}{\partial U}\right), \qquad \lambda_1 = 1. \tag{7}$$

Нижче розглядатимемо лише випадок $\lambda_1 \neq 0$, оскільки при $\lambda_1 = 0$ рівняння (1) не є прямим узагальненням рівняння Фішера, тому що не містить його як частковий випадок. Зауважимо лише, що у випадку $\lambda_1 = 0$ розв'язки знайдено в [8, 18]. Отже, при $\lambda_1 \neq 0$, не втрачаючи загальності, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$U_t = [(1+\lambda_0 U)U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2. \tag{8}$$

За операторами P_t і P_x легко будується плоскохвильовий анзац $U = \varphi(\omega)$, $\omega = x - vt$, $v \in \boldsymbol{R}$, за допомогою якого рівняння (8) зводиться до вигляду звичайного диференціального рівняння (ЗДР)

$$(1+\lambda_0\varphi)\varphi_{\omega\omega} + \lambda_0\varphi_\omega^2 + v\varphi_\omega + \lambda_2\varphi - \lambda_3\varphi^2 = 0. \tag{9}$$

Це рівняння не вдається проінтегрувати в загальному випадку, проте отримано його частковий розв'язок при $v \neq 0$, який веде до плоскохвильового розв'язку рівняння (8)

$$U(t,x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + c_1 \exp\left[\pm\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x + \left(\frac{\lambda_3}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_2}{2}\right)t\right], \tag{10}$$

де c_1 — довільна стала. Очевидно, що вираз (10) набуває дійсних значень лише при обмеженні $\lambda_0\lambda_3 > 0$.

У випадку $v = 0$ загальний розв'язок (9) можна записати у неявному вигляді

$$\omega - x_0 = \int \frac{(1+\lambda_0\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{c_0 - \lambda_2\varphi^2 + \frac{2}{3}(\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)\varphi^3 + \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_3\varphi^4}}, \quad \omega = x, \tag{11}$$

де x_0 — довільна стала. На жаль, цей розв'язок породжує лише стаціонарні розв'язки рівняння (8), які малопридатні для опису реальних біопроцесів, які є суттєво нестаціонарними.

У випадку $\lambda_3 = -\lambda_0\lambda_2$ (див. (5) при $\lambda_1 = 1$) рівняння (8) можна звести до ЗДР, використовуючи лінійні комбінації ліївських операторів P_t, P_x і (7). При цьому виникають три суттєво різні випадки: 1) $P_t + vP_x$; 2) $P_t + vP_x + T_1$; 3) $T_1 + vP_x$. Перший було розглянуто вище. Другий породжує анзац

$$U(t,x) = (1+\exp(\lambda_2 t))^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{\lambda_0}, \quad \omega = x - vt + \frac{v}{\lambda_2}\ln(1+\exp(\lambda_2 t)), \tag{12}$$

за допомогою якого рівняння (8) зводиться до ЗДР для знаходження функції φ:

$$\lambda_0\varphi\varphi_{\omega\omega} + \lambda_0\varphi_\omega^2 + v\varphi_\omega - \lambda_2\varphi + \lambda_0\lambda_2\varphi^2 = 0. \tag{13}$$

При $v \neq 0$ ЗДР (13) не вдається проінтегрувати у загальному випадку (навіть не отримано його часткових розв'язків). При $v = 0$ загальний розв'язок (13) можна записати у неявному вигляді

$$\omega - x_0 = \int \frac{\varphi\, d\varphi}{\sqrt{c_0 + (2\lambda_2/3\lambda_0)\varphi^3 - (\lambda_2/2)\varphi^4}}, \quad \omega = x. \tag{14}$$

Інтегруючи (14) при $c_0 = 0$ та беручи до уваги анзац (12) при $v = 0$, отримуємо розв'язки рівняння (8)

$$U(t,x) = -\frac{1}{\lambda_0} + \frac{2}{3\lambda_0}\left(1 \pm \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}(x - x_0)\right)\right)(1+\exp(\lambda_2 t))^{-1}, \tag{15}$$

якщо $\lambda_2 > 0$, та

$$U(t,x) = -\frac{1}{\lambda_0} + (1+\exp(\lambda_2 t))^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{3\lambda_0} \pm \frac{1}{2\lambda_2}\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{-\lambda_2}{2}}(x - x_0)\right) + \frac{4\lambda_2^2}{9\lambda_0^2}\exp\left(\sqrt{\frac{-\lambda_2}{2}}(x - x_0)\right)\right)\right], \tag{16}$$

якщо $\lambda_2 < 0$. Варто наголосити, що розв'язок (15) при $\lambda_0 < 0$ має дуже добрі властивості щодо застосування. Дійсно, він обмежений і додатний в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times [A, B]$ та задовольняє крайові умови Ноймана $U_x(t, A) = 0$, $U_x(t, B) = 0$. Тут $x_0 = 0$, $A = (1/2 + k_1)\pi_\lambda$, $B = (1/2 + k_2)\pi_\lambda$, $\pi_\lambda = \sqrt{2\pi(\lambda_2)^{-1}}$, і $k_1 < k_2 \in \mathbf{Z}$.

Врешті-решт, розглянемо третій випадок, який породжує анзац

$$U(t, x) = \exp(-\lambda_2 t)\varphi(\omega) - \frac{1}{\lambda_0}, \quad \omega = x - v\exp(-\lambda_2 t). \tag{17}$$

Відповідне ЗДР набуває вигляду

$$\lambda_0 \varphi\varphi_{\omega\omega} + \lambda_0 \varphi_\omega^2 - v\lambda_2\varphi_\omega + \lambda_0\lambda_2\varphi^2 = 0. \tag{18}$$

Знову при $v = 0$ вдалося знайти розв'язок (18), а отже, і побудувати розв'язок початкового нелінійного рівняння (8) вигляду

$$U(t, x) = c_0 \exp(-\lambda_2 t)\sqrt{\sin\left(\sqrt{2\lambda_2}(x - x_0)\right)} - \frac{1}{\lambda_0}. \tag{19}$$

При $x_0 = 0$, $c_0 > 1/\lambda_0$, $\lambda_2 > 0$ і $\lambda_0 < 0$ розв'язок (19) в області $(t, x) \in$ $\in [0, +\infty) \times [A, B]$, $A = 2k\pi_\lambda$, $B = (2k+1)\pi_\lambda$, $\pi_\lambda = \sqrt{\pi(2\lambda_2)^{-1}}$, $k \in \mathbf{Z}$, є додатним і періодичним.

Застосуємо поняття Q-умовної симетрії [14, 15, 19] (некласичної симетрії в термінології [20, 21]) для пошуку нових операторів симетрії нелінійного рівняння (8) вигляду

$$Q = \xi^0(t, x, U)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, x, U)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, U)\frac{\partial}{\partial U}, \tag{20}$$

де функції ξ^0, ξ^1, η потрібно знайти за відомою процедурою з відповідних визначальних рівнянь. У роботі [19] ці визначальні рівняння було отримано у випадку загального вигляду рівняння реакції-дифузії-конвекції. Розв'язуючи їх у випадку рівняння (8), ми встановили, що при $\xi^0 \neq 0$ всі можливі Q-умовні симетрії збігаються з ліївськими. У випадку $\xi^0 = 0$ отримується дуже громіздке тривимірне нелінійне рівняння, яке є набагато складнішим, ніж досліджуване рівняння (8), а тому навіть його часткові розв'язки не можуть бути знайдені без застосування громіздких процедур. Отже, пряме застосування процедури пошуку Q-умовних симетрій не веде до нових вислідів у випадку узагальненого рівняння Фішера (1) (зауважимо, що аналогічний результат отримується і у випадку класичного рівняння Фішера (2) [22]).

3. Застосування методу додаткових породжуючих умов для побудови точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера (1). У цьому пункті застосовуватимемо підхід, що ґрунтується на розгляді заданого нелінійного ДРЧП разом з *додатковою породжуючою (генеруючою) умовою* у вигляді ЗДР високого порядку. З цією метою будемо розглядати рівняння (1) разом з додатковою породжуючою умовою у вигляді лінійного однорідного ЗДР високого порядку

$$\alpha_1(t, x)\frac{dU}{dx} + \ldots + \alpha_{m-1}(t, x)\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} + \frac{d^m U}{dx^m} = 0, \tag{21}$$

де $\alpha_1(t, x), \ldots, \alpha_{m-1}(t, x)$ — довільні гладкі функції, які вважаються відомими, а змінна t розглядається як деякий параметр. Як відомо, загальний розв'язок (21) має вигляд

$$U = \varphi_0(t)g_0(t,x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x), \tag{22}$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, … , $\varphi_{m-1}(t)$ — довільні гладкі функції, $g_0(t,x) = 1$, $g_1(t,x)$, … … , $g_{m-1}(t,x)$ — фіксовані функції, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (21). У багатьох випадках функції $g_1(t,x)$, … , $g_{m-1}(t,x)$ вдається виразити у явному вигляді через елементарні функції.

***Зауваження* 1.** Додаткова умова (21), яка породжує розв'язки вигляду (22), на противагу власне досліджуваному рівнянню (1) не має якоїсь визначеної інтерпретації. У цьому сенсі вона є лише повним аналогом рівняння $QU = 0$ (оператор Q задається формулою (20)), яке завжди виникає при побудові розв'язків за допомогою ліївських та Q-умовних симетрій.

Тепер розглянемо (22) як анзац для (1). Особливість цього анзацу полягає в тому, що він містить аж m довільних функцій φ_i. Це дає можливість у деяких випадках редукувати нелінійне ДРЧП (1) до квазілінійної системи ЗДР першого порядку для невідомих функцій φ_i, $i = 0, \ldots, m-1$, яка містить лише рівняння першого порядку. Відомо, що такі системи досить детально досліджені.

Обчислюючи за анзацом (22) похідні U_t, U_x, U_{xx} та підставляючи їх в (1), одержуємо на перший погляд надто громіздкий вираз

$$\begin{aligned}
&\varphi_{0,t}g_0 + \varphi_{1,t}g_1 + \ldots + \varphi_{m-1,t}g_{m-1} = \\
&= \varphi_0(\lambda_1 g_{0,xx} + \lambda_2 g_0 - g_{0,t}) + \ldots + \varphi_{m-1}(\lambda_1 g_{m-1,xx} + \lambda_2 g_{m-1} - g_{m-1,t}) + \\
&+ \varphi_0^2(\lambda_0 g_0 g_{0,xx} + \lambda_0 g_{0,x}^2 - \lambda_3 g_0^2) + \ldots \\
&\ldots + \varphi_{m-1}^2(\lambda_0 g_{m-1} g_{m-1,xx} + \lambda_0 g_{m-1,x}^2 - \lambda_3 g_{m-1}^2) + \\
&+ \varphi_0\varphi_1(\lambda_0 g_0 g_{1,xx} + \lambda_0 g_1 g_{0,xx} + 2\lambda_0 g_{0,x} g_{1,x} - 2\lambda_3 g_{m-1}^2) + \\
&+ \varphi_0\varphi_2(\lambda_0 g_0 g_{2,xx} + \lambda_0 g_2 g_{0,xx} + 2\lambda_0 g_{0,x} g_{2,x} - 2\lambda_3 g_0 g_2) + \ldots \\
&\ldots + \varphi_{m-2}\varphi_{m-1}(\lambda_0 g_{m-2} g_{m-1,xx} + \lambda_0 g_{m-1} g_{m-2,xx} + \\
&+ 2\lambda_0 g_{m-2,x} g_{m-1,x} - 2\lambda_3 g_{m-2} g_{m-1}),
\end{aligned} \tag{23}$$

де індекси t і x при функціях $\varphi_i(t)$ та $g_i(t,x)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, означають диференціювання за цими змінними. Проте якщо у виразі (23) згрупувати відповідним чином доданки, то вдається помітити *достатні умови* для редукції одержаного виразу до системи ЗДР. Ці достатні умови мають такий вигляд:

$$\lambda_1 g_{i,xx} + \lambda_2 g_i - g_{i,t} = g_{i_1} Q_{ii_1}(t), \tag{24}$$

$$\lambda_0 g_i g_{i,xx} + \lambda_0 (g_{i,x})^2 - \lambda_3 (g_i)^2 = g_{i_1} R_{ii_1}(t), \tag{25}$$

$$\lambda_0(g_i g_{j,xx} + g_j g_{i,xx}) + 2\lambda_0 g_{i,x} g_{j,x} - 2\lambda_3 g_i g_j = g_{i_1} T_{ij}^{i_1}(t), \qquad i < j, \tag{26}$$

де функції Q_{ii_1}, R_{ii_1}, $T_{ij}^{i_1}$ в правій частині — це деякі функції, що мають бути визначені через вирази у лівій частині.

При виконанні умов (24) – (26) одержуємо систему m ЗДР

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = Q_{i_1 i}\varphi_{i_1} + R_{i_1 i}(\varphi_{i_1})^2 + T_{i_1 i_2}^{i}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2} \tag{27}$$

для знаходження невідомих функцій φ_i, $i = 0, \ldots, m-1$. У правих частинах співвідношень (24) – (26) і (27) за індексами i_1, i_2, що повторюються, необхідно підсумовувати від 0 до $m-1$. Отже, ми одержали таке твердження.

Теорема 1. *Будь-який розв'язок системи ЗДР* (27) *породжує точний розв'язок вигляду* (22) *узагальненого рівняння Фішера* (1), *якщо функції* g_i, $i = 0, \ldots, m-1$, *задовольняють умови* (24) – (26).

Зауваження 2. Теорема 1 дає *достатні умови* для редукції нелінійного рівняння (1) до системи ЗДР. У деяких випадках, беручи до уваги додаткові співвідношення між елементами фундаментальної системи розв'язків, вдається суттєво спростити ці умови редукції (приклад див. у [18]).

Зауваження 3. Якщо коефіцієнти λ_0, λ_1, λ_2 та λ_3 в рівнянні (1) залежні від часової змінної t, то запропонований підхід також ефективний, але при цьому з необхідністю отримується система ЗДР зі змінними коефіцієнтами (приклад див. у [23]).

Застосуємо теорему 1 для побудови сімей розв'язків нелінійного рівняння (1) при $\lambda_1 = 1$ з використанням додаткової породжуючої умови

$$\alpha_1(t)\frac{dU}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} = 0, \tag{28}$$

яка є частковим випадком (21) при $m = 3$. У найбільш загальному випадку умова (28) породжує анзаци

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp\bigl(\gamma_1(t)x\bigr) + \varphi_2(t)\exp\bigl(\gamma_2(t)x\bigr), \tag{29}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \bigl(\pm\sqrt{D} - \alpha_2\bigr)/2$ та $D = \alpha_2^2 - 4\alpha_1 > 0$, або

$$U = \varphi_0(t) + \left[\psi_1(t)\cos\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right) + \psi_2(t)\sin\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right)\right]\exp\left(-\frac{\alpha_2 x}{2}\right), \tag{30}$$

якщо $D = \alpha_2^2 - 4\alpha_1 < 0$. Функції $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ потрібно знайти.

У випадку $D = 0$ умова (28) породжує інші типи анзаців, але вони тут не розглядаються, оскільки застосування теореми 1 для них призводить до суперечності з обмеженням $\lambda_2\lambda_3 > 0$, накладеним вище.

Виявляється, що величина $\gamma_0 = \lambda_3/2\lambda_0$ відіграє важливу роль для знаходження точних розв'язків рівняння (8), оскільки є два різні випадки: 1) $\gamma_0 > 0$ і 2) $\gamma_0 < 0$.

Розглянемо перший випадок. Підставляючи функції $g_0 = 1$, $g_1 = \exp\bigl(\gamma_1(t)x\bigr)$, $g_2 = \exp\bigl(\gamma_2(t)x\bigr)$ з анзацу (29) у співвідношення (24) – (26), одержуємо

$$\begin{aligned} &Q_{00} = \lambda_2, \quad Q_{11} = \lambda_2 + \gamma_1^2(t), \quad Q_{22} = \lambda_2 + \gamma_2^2(t), \\ &R_{00} = -\lambda_3, \quad T_{12}^0 = -2\lambda_3, \quad T_{01}^1 = T_{02}^2 = -\frac{3}{2}\lambda_3, \end{aligned} \tag{31}$$

і

$$R_{ii_1} = Q_{ii_1} = T_{ij}^{i_1} = 0 \tag{32}$$

для всіх інших комбінацій індексів i, i_1, $j = 0, 1, 2$ і $k = 1, 2$, не перерахованих в (31). Одночасно з'являється обмеження

$$\gamma_{1,2}(t) = \pm\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}. \tag{33}$$

За допомогою співвідношень (31) – (33) система (27) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0}{dt} &= -\lambda_3\varphi_0^2 + \lambda_2\varphi_0 - 2\lambda_3\varphi_1\varphi_2,\\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}\right)\varphi_1 - \frac{3}{2}\lambda_3\,\varphi_0\varphi_1,\\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}\right)\varphi_2 - \frac{3}{2}\lambda_3\,\varphi_0\varphi_2,\end{aligned} \tag{34}$$

розв'язуючи яку, одержуємо трипараметричну сім'ю точних розв'язків нелінійного рівняння (8)

$$\lambda_0 U = \varphi_0(t) - 1 + \exp\left[\left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0}\right)t - \frac{3\lambda_3}{2\lambda_0}\int\varphi_0(t)\,dt\right]\times$$
$$\times\left[c_1\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x\right) + c_2\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x\right)\right], \tag{35}$$

де $\varphi_0(t)$ — довільний розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\varphi_0^2 + \left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0}\right)\varphi_0 - \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right) -$$
$$- 2c_1c_2\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\exp\left[2\left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0}\right)t - \frac{3\lambda_3}{\lambda_0}\int\varphi_0(t)\,dt\right], \tag{36}$$

яке в загальному випадку не вдалося проінтегрувати. Однак у частковому випадку, коли на довільні параметри c_1 і c_2 накладено умову $c_1 c_2 = 0$, рівняння (36) зводиться до нелінійного ЗДР першого порядку, яке інтегрується. Отже, знаходимо двопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійного рівняння (8)

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right] + c_2\frac{\exp\dfrac{(2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh\dfrac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right)^{3/2}}\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x\right) \tag{37}$$

і

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right] + c_1\frac{\exp\dfrac{(2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh\dfrac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right)^{3/2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x\right), \tag{38}$$

відповідно при $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$.

Будь-який розв'язок U^* вигляду (38) має такі властивості: $U^* \to \lambda_2/\lambda_3$, якщо $t \to \infty$, і $\lambda_3 < \lambda_0\lambda_2$; $U^* \to \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\dfrac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right] < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$, якщо $x \to +\infty$, $\lambda_0\lambda_3 > 0$.

У другому випадку застосування анзацу (30) дає можливість отримати сім'ю періодичних розв'язків нелінійного рівняння (8)

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\sin\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}x\right), \tag{39}$$

де $\varphi_0(t)$ і $\varphi_1(t)$ — довільні розв'язки системи ЗДР

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \lambda_2\varphi_0 - \lambda_3\varphi_0^2 - \frac{1}{2}\lambda_3\varphi_1^2,$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}\right)\varphi_1 - \frac{3}{2}\lambda_3\varphi_0\varphi_1. \tag{40}$$

На жаль, ця нелінійна система не інтегрується при довільних значеннях коефіцієнтів λ_0, λ_2 і λ_3. Проте це можна зробити при певних обмеженнях. Зокрема, при $\lambda_0 = -1$ вдалося отримати загальний розв'язок системи (40), а саме:

$$\varphi_0 = \frac{\lambda_2}{3\lambda_3}\frac{3c_1\exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{c_1\exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)},$$
$$\varphi_1 = \pm\frac{2\lambda_2}{3\lambda_3}\frac{c_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{c_1\exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}. \tag{41}$$

Отже, знаходимо двопараметричну сім'ю періодичних розв'язків нелінійного рівняння (8) при $\lambda_0 = -1$:

$$U = \frac{\lambda_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{3\lambda_3\left[c_1\exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2\exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)\right]}\left[3c_1\exp(\lambda_2 t) + c_2 \pm 2c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}x\right)\right]. \tag{42}$$

Для довільних додатних λ_2 і λ_3 будь-який періодичний розв'язок U^* вигляду (42) обмежений в області $(t, x)\in[0, +\infty)\times(-\infty, +\infty)$ і має властивість $U^* \to \lambda_2/\lambda_3$ при $t \to \infty$.

Таким чином, у цьому пункті ми побудували дво- та трипараметричні сім'ї точних розв'язків узагальненого рівняння Фішера, які за структурою принципово відрізняються від ліївських розв'язків, отриманих у попередньому пункті. Цікаво відзначити, що у часткових випадках при $\lambda_3 = -\lambda_0\lambda_2$ неліївські розв'язки (35) і (42) породжують відповідно ліївські (16) і (15).

5. Розв'язання крайової задачіНоймана для рівняння (8) та системи (4). Як уже зазначалося вище, крайові задачі з нульовими умовамиНоймана є типовими для моделювання біологічних процесів. Беручи до уваги властивості розв'язків (37) і (38), можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Нелінійна крайова задача для узагальненого рівняння Фішера* (8) *при* $\lambda_0 > 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$, *початковій умові*

$$U(0, x) = C_0 + C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda_0}}|x|\right) \tag{43}$$

і крайових умовахНоймана

$$U_x(t, -\infty) = 0, \qquad U_x(t, +\infty) = 0 \tag{44}$$

в області $(t, x)\in[0, +\infty)\times(-\infty, +\infty)$ *має точний додатний обмежений розв'язок*

$$U = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\frac{\lambda(t - c_0)}{2}\right] + c_1\frac{\exp\frac{\lambda(2+\lambda_0)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh\frac{\lambda(t - c_0)}{2}\right)^{3/2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda_0}}|x|\right), \tag{45}$$

де $C_0 = \frac{1}{2}\left[1+\tanh\left(\frac{-\lambda c_0}{2}\right)\right]$, $C_1 = c_1\left(\cosh\left(\frac{-\lambda c_0}{2}\right)\right)^{-3/2}$ *та* $c_1 > 0$.

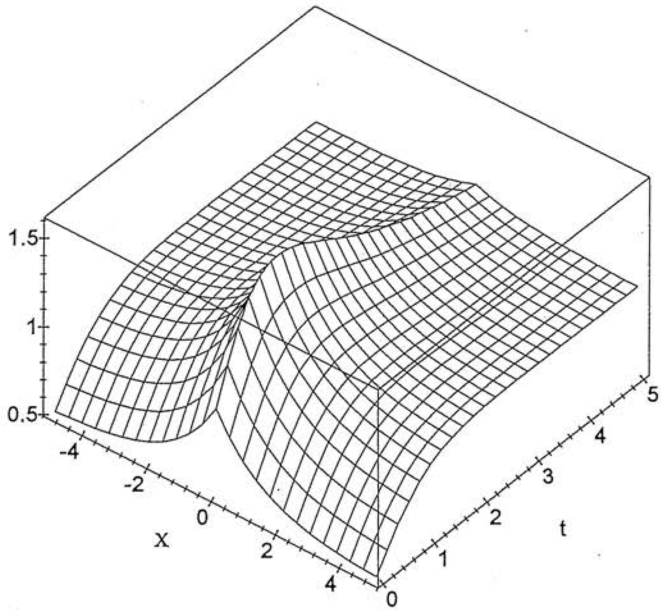

Рис. 1

На рис. 1 зображено графік розв'язку (45) при $\lambda_0 = 2$, $\lambda = 2$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0{,}5$, отриманий за допомогою сучасного програмного продукту MAPLE V.

Зауважимо, що розв'язок (45) не є аналітичним у точці $x = 0$, однак друга похідна тут коректно довизначається: $U_{xx}\big|_{x\to 0+} = U_{xx}\big|_{x\to 0-}$, окрім того, $U_x^2\big|_{x\to 0+} = U_x^2\big|_{x\to 0-}$. Отже, розв'язок задовольняє рівняння (8) і в точці $x = 0$. З іншого боку, недостатня гладкість розв'язку (45) приводить до того, що його не можна отримати наближеними числовими методами. Дійсно, застосування програми, описаної в роботі [16], для отримання наближеного розв'язку задачі (8), (43) і (44) веде до іншого розв'язку, який при $t > 0$ в околі точки $x = 0$ суттєво відрізняється від (45). Іншими словами, ми маємо випадок неєдиності розв'язку розглядуваної задачі Ноймана в класі кусково-диференційовних функцій. Зауважимо, що приклади неєдиності крайових задач для інших нелінійних рівнянь реакції-дифузії наведено у відомій книзі Генрі [24].

Беручи до уваги властивості розв'язків вигляду (42), можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 3. *Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для узагальненого рівняння Фішера* (8) *при* $\lambda_0 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \neq 0$, *початковій періодичній умові*

$$U(0, x) = C_0 + C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right) \tag{46}$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t, A) = 0, \qquad U_x(t, B) = 0 \tag{47}$$

в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times [A, B]$ *має вигляд*

$$U = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)}{3\left[c_1 \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\right]}\left[3c_1 \exp(\lambda t) + c_2 \pm 2c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right)\right], \qquad (48)$$

де $C_0 = \dfrac{3c_1 + c_2}{3(c_1 + c_2)}$, $C_1 = \pm\dfrac{2c_2}{3(c_1 + c_2)}$, $A = (1/2 + k_1)\pi_\lambda$, $B = (1/2 + k_2)\pi_\lambda$, $\pi_\lambda = \sqrt{2/\lambda}\,\pi$, *та* $k_1 < k_2 \in \mathbf{Z}$.

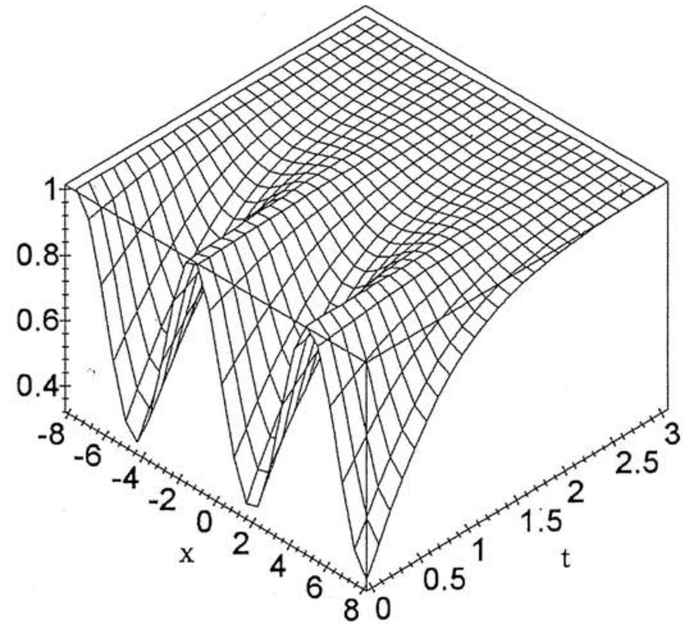

Рис. 2

На рис. 2 зображено графік розв'язку (48) при $\lambda_0 = -1$, $\lambda = 2$, $c_2 = c_1$ та вибраному верхньому знаку "+". На відміну від попереднього випадку, застосування програми [16] для отримання наближеного розв'язку задачі (8), (46) і (47) веде до такого ж розв'язку. Більш того, нами встановлено цікавий факт: якщо у початкову умову (46) вносити локальні збурення різноманітного характеру (у формі додаткової „сходинки", куска синусоїди тощо), то отримані наближені розв'язки дуже швидко еволюціонують до точного розв'язку (48). Це дає підстави стверджувати, що знайдена сім'я точних розв'язків (42) має дуже важливе значення при розв'язанні крайових задач Ноймана для узагальненого рівняння Фішера (8) з широким спектром початкових умов. Зауважимо, що аналогічний факт справджується і щодо відомого солітоноподібного розв'язку [25] для класичного рівняння Фішера.

На закінчення продемонструємо приклад застосування знайдених розв'язків рівняння (8) для побудови розв'язків системи Шігесади – Кавасакі – Терамото (4). Розглянемо систему (4) з додатковим обмеженням

$$V = \beta_0 + \beta U, \quad \beta \neq 0, \qquad (49)$$

де β_0, β — деякі дійсні параметри. Підставляючи обмеження (49) в систему (4), отримуємо перевизначену систему, яка має нетривіальні розв'язки при таких обмеженнях на коефіцієнти:

$$d_1 = d_2 \equiv \lambda = 1, \quad \rho_2 = \beta\rho_1, \quad \beta_0\left(\beta_0 - \frac{a_2}{c_2}\right) = 0. \tag{50}$$

У припущенні (49), (50) система (4) зводиться до узагальненого рівняння Фішера

$$U_t = [(1+2\rho_1\beta U)U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{51}$$

де $\beta = \dfrac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}$, $c_2 \neq c_1$, $\lambda_3 = b_1 + c_1\beta$ і

$$\lambda_2 = \begin{cases} a_1, & \beta_0 = 0; \\ a_1 - c_1\dfrac{a_2}{c_2}, & \beta_0 = \dfrac{a_2}{c_2}. \end{cases} \tag{52}$$

Нагадаємо, що в системі (4) функції U і V задають густини (концентрації) двох конкуруючих видів у просторі і часі, d_1 і d_2 — коефіцієнти дифузії, ρ_1 і ρ_2 задають так звані тиски поперечної дифузії, a_1 і a_2 — коефіцієнти росту видів всередині самої популяції, b_1 і c_2 — коефіцієнти внутрішньовидового змагання в межах популяції, b_2 і c_1 — коефіцієнти змагання між видами.

Маючи вже знайдені розв'язки (37) і (38) узагальненого рівняння Фішера, можна сформулювати такі теореми для нелінійної системи (4).

Теорема 4. *Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для системи Шігесади – Кавасакі – Терамото*

$$\begin{aligned} U_t &= [(1+\rho_1 V)U]_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= [(1+\rho_1\beta U)V]_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V) \end{aligned} \tag{53}$$

при початкових умовах

$$\begin{aligned} U &= \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} + c\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1\beta}}|x|\right) \equiv U_0(x), \\ V &= \frac{a_2}{c_2} + \beta U_0(x) \end{aligned} \tag{54}$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t, \pm\infty) = 0, \qquad V_x(t, \pm\infty) = 0 \tag{55}$$

в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ *має вигляд*

$$\begin{aligned} U &= \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2 t}{2}\right] + c\frac{\exp\dfrac{(\lambda_3 + \rho_1\beta\lambda_2)t}{4\rho_1\beta}}{\left(\cosh\dfrac{\lambda_2 t}{2}\right)^{3/2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1\beta}}|x|\right), \\ V &= \frac{a_2}{c_2} + \beta U, \end{aligned} \tag{56}$$

де $\rho_1\beta > \dfrac{b_1}{2a_1}$, $\rho_1 < 0$, $\beta < 0$, $\beta = \dfrac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} = -\dfrac{a_2 b_1}{a_1 c_2}$, $\lambda_2 = a_1 - c_1\dfrac{a_2}{c_2} > 0$, $\lambda_3 = b_1 + c_1\beta > 0$, $c \in \boldsymbol{R}$.

Теорема 5. *Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для системи Шігесади – Кавасакі – Терамото* (53) *при* $a_1 = a_2 = a$ *та початкових умовах*

$$U = \frac{a(c_1 - c_2)}{2(b_2c_1 - b_1c_2)} + c\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1\beta}}|x|\right) \equiv U_0(x),$$
$$V = \beta U_0(x) \tag{57}$$

і крайових умовах Ноймана (55) *в області* $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ *має вигляд*

$$U = \frac{a(c_1 - c_2)}{2(b_2c_1 - b_1c_2)}\left[1 + \tanh\frac{at}{2}\right] + c\frac{\exp\frac{a(1+\rho_1\beta)t}{4\rho_1\beta}}{\left(\cosh\frac{at}{2}\right)^{3/2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1\beta}}|x|\right),$$
$$V = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}U, \tag{58}$$

де $\rho_1\beta > 1/2,\ \rho_1 > 0,\ \beta = \dfrac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} > 0,\ \lambda_3 = b_1 + c_1\beta > 0,\ c \in \boldsymbol{R}.$

Легко помітити, що розв'язок (56) має властивість

$$(U, V) \to \left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right), \quad t \to \infty. \tag{59}$$

Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між популяціями двох видів U і V є безкомпромісним і, врешті-решт, вид U (хижак) з'їдає вид V (жертва).

Розв'язок (58) на нескінченності поводиться по-іншому:

$$(U, V) \to \left(\frac{a(c_2 - c_1)}{b_1c_2 - b_2c_1}, \frac{a(b_1 - b_2)}{b_1c_2 - b_2c_1}\right), \quad t \to \infty. \tag{60}$$

Це інтерпретується як випадок „м'якого" змагання між двома популяціями, яке допускає як завгодно довге співіснування видів (типовий реальний приклад — паразит і його носій).

Наголосимо, що теореми існування розв'язків системи Шігесади – Кавасакі – Терамото з властивостями (59), (60) доведено у роботі [12], проте явні точні розв'язки ні в тій, ні в інших аналогічних роботах не побудовано.

Інші цікаві розв'язки системи (4), які описують можливі випадки змагання біологічних видів, буде розглянуто в одній з майбутніх робот.

Автор щиро вдячний старшому науковому співробітнику Інституту надтвердих матеріалів НАН України В. О. Дутці за проведені наближені обчислення з використанням авторського пакету програм [16].

1. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. – New York: Acad. Press, 1972. – 306 p.
2. *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, I, II. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 300 p.
3. *Murray J. D.* Nonlinear differential equation models in biology. – Oxford: Clarendon Press, 1977. – 370 p.
4. *Черніга Р. М.* Симетрія та точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу в термоядерній плазмі // Допов. НАН України. – 1995. – № 4. – С. 17 – 21.
5. *Cherniha R.* A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rept. Math. Phys. – 1996. – **38**. – P. 301 – 312.
6. *Черніга Р. М.* Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 814 – 827.
7. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – **7**. – P. 353 – 369.

8. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 768 p.
9. *Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E.* Spatial segregation of interacting species // J. Theor. Biol. – 1979. – **79**. – P. 83 – 99.
10. *Conway E., Smoller J.* Diffusion and predator-prey interaction // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – **33**. – P. 673 – 686.
11. *Brown P. N.* Decay to uniform states in ecological interactions // Ibid. – 1980. – **38**. – P. 22 – 37.
12. *Lou Y., Ni W.-M.* Diffusion self-diffusion and cross-diffusion // J. Different. Equat. – 1996. – **131**. – P. 79 – 131.
13. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
14. *Fushchych W., Shtelen W., Serov M.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
15. *Фущич В. І., Серов М. І., Чопик В. І.* Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17 – 22.
16. *Дутка В. А.* Об эффективности применения одного варианта метода конечных элементов для решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 1997. – **70**. – С. 284 – 289.
17. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1982. – **22**. – С. 1393 – 1400.
18. *Cherniha R.* New non-Lie ansätze and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1998. – **31**. – P. 8179 – 8198.
19. *Cherniha R. M., Serov M. I.* Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term // Eur. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 572 – 542.
20. *Bluman G. W., Cole I. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025 – 1042.
21. *Olver P. J., Rosenau P.* Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – **47**. – P. 263 – 278.
22. *Cherniha R.* New symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // Proc. Int. Workshop "Similarity Methods", Univ. Stuttgart, 1998. – P. 323 – 336.
23. *Cherniha R., Fehribach J.* New exact solutions for a free boundary system // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1998. – **31**. – P. 3815 – 3829.
24. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981. – 376 p.
25. *Ablowitz M., Zeppetella A.* Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. – 1979. – **41**. – P. 835 – 840.

Одержано 10.04.2000