УДК 512.552.4

В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТОЖДЕСТВАХ В АЛГЕБРАХ $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, ПОРОЖДЕННЫХ ИДЕМПОТЕНТАМИ*

We study whether or not the algebras $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$ generated by n idempotents with the sum λe ($\lambda \in \mathbb{C}$, e is the identity of algebra) are algebras with polynomial identities. We prove that $\mathbf{Q}_{4,2}$ is an algebra with a standard polynomial identity F_4 and the algebras $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$, $\lambda \neq 2$ and $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, $n \geq 5$, are not algebras with polynomial identities.

Досліджено алгебри $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, що породжені n ідемпотентами з сумою λe ($\lambda \in \mathbb{C}$, e — одиниця алгебри), на наявність в них поліноміальних тотожностей. Доведено, що $\mathbf{Q}_{4,2}$ є алгеброю із стандартною тотожністю F_4, а алгебри $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$, $\lambda \neq 2$, та $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, $n \geq 5$, поліноміальних тотожностей не мають.

Для ассоциативных алгебр весьма важным является вопрос о тождествах в них. Известно (см., например, [1]), что а алгебре

$$\mathbf{Q_n} = \mathbb{C}\left\langle q_1,\ldots,q_n \mid q_k^2 = q_k \quad (k=1,\ldots,n)\right\rangle,$$

порожденной n идемпотентами, при $n = 2$ выполнено стандартное симметрическое тождество

$$F_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{p(\sigma)} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0 \qquad (1)$$

для всех $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Q_2}$ (S_4 — група подстановок, $p(\sigma)$ — четность подстановки). При $n \geq 3$ эта алгебра содержит свободную подалгебру с двумя образующими и, следовательно, не может быть алгеброй с полиномиальным тождеством (PI-алгеброй).

В настоящей статье этот вопрос изучается для алгебр

$$\mathbf{Q}_{n,\lambda} = \mathbb{C}\left\langle q_1,\ldots,q_n \mid q_k^2 = q_k \quad (k=1,\ldots,n);\ \sum_{k=1}^{n} q_k = \lambda e \right\rangle,$$

порожденных n идемпотентами такими, что $\sum_{k=1}^{n} q_k = \lambda e$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, e — единица алгебры).

Одним из основных методов исследования является описание линейного базиса в алгебрах с помощью „бриллиантовой" леммы (см., например, [2, 3] и библиографию в них). В п. 1 приведены основные определения и необходимые обозначения. Мы также воспользуемся методами теории $*$-представлений.

Известно, что все алгебры $\mathbf{Q}_{3,\lambda}$ конечномерны и отличны от нулевой только при $\lambda \in \Lambda_3 = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ (см., например, [4]), поэтому все они являются PI-алгебрами. Напротив, алгебры $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$ при $n \geq 4$ бесконечномерны (мы получим этот факт как следствие теоремы 3). В п. 2 с помощью представлений алгебр $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ показано, что при $\lambda \neq 2$ алгебры $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ не являются алгебрами с полиномиальными соотношениями. Напротив, на основании существования большого количества двумерных представлений для алгебры $\mathbf{Q}_{4,2}$ и вида ее линейного базиса в п. 3 доказано, что алгебра $\mathbf{Q}_{4,2}$ — алгебра со стандартным полиномиальным тождеством (1). В п. 4 описан линейный базис в алгебре $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, $n \geq 4$, с помощью „бриллиантовой" леммы и, как следствие, показано, что при

* Частично поддержана проектом 01.07 / 071 ГФФИ Украины.

любом λ алгебра $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$, $n \geq 5$, содержит свободную алгебру с двумя образующими и, следовательно, ни при каком λ не является *PI*-алгеброй.

В статье все алгебры и линейные пространства рассматриваются только над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1. Обозначим через $\mathrm{F}_n = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ свободную алгебру с единицей e, порожденную n образующими, а через W — множество слов в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (пустое слово отождествляется с единицей). Предполагаем, что W вполне упорядочено, порядок сохраняется при умножении и единица является минимальным словом (в этой работе мы будем пользоваться только однородным лексикографическим порядком: слова сравниваются по длине, если длины равны, то лексикографически). Тогда с каждым элементом $u \in \mathrm{F}_n$ очевидным образом можно связать его старшее слово $\hat{u}$.

Пусть I — некий идеал в алгебре F_n. Слово $w \in W$ называют нормальным (по модулю I), если w не является старшим словом никакого элемента I. Можно показать, что $\mathrm{F}_n = N \oplus I$ (в смысле векторных пространств), где N — линейная оболочка нормальных слов. При этом на N можно ввести умножение так, что полученная алгебра изоморфна фактору F_n/I. Таким образом, нормальные слова можно рассматривать как линейный базис в алгебре F_n/I. Для нахождения нормальных слов мы воспользуемся методом построения редуцированного базиса Гребнера идеала I (см., например, [3]).

Определение 1. *Подмножество G идеала I называется его базисом Гребнера, если для любого элемента $v \in I$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $\hat{g}$ является подсловом $\hat{v}$.*

Ценность базиса Гребнера состоит в том, что слово w нормально тогда и только тогда, когда ни для какого элемента g из базиса Гребнера $\hat{g}$ не является подсловом w.

Существует много базисов Гребнера данного идеала, но всегда существует единственный редуцированный базис Гребнера (при фиксированных образующих и фиксированном порядке на W).

Определение 2. *Базис Гребнера называется минимальным, если никакое его подмножество не является базисом Гребнера. Если, кроме того, для любого элемента g базиса Гребнера коэффициент при $\hat{g}$ равен 1, и $g - \hat{g}$ лежит в N, то он называется редуцированным.*

Для построения редуцированного базиса Гребнера используют три следующие операции:

1. *Нормировка* — замена элемента на пропорциональный так, чтобы коэффициент при старшем слове был равен 1.

2. *Редукция.* Пусть u и v — нормированные элементы, и существуют слова g и h такие, что $\hat{u} = g\hat{v}h$. Тогда редукцией (элемента u с помощью v) называют замену элемента u на нормировку элемента $u - gvh$.

3. *Композиция* пары нормированных элементов u, v — это слово $w = f \cdot g \cdot h$ такое, что $\hat{u} = fg$, $\hat{v} = gh$ и $g \neq e$. Если для пары u, v существует композиция, то ее *результатом* называется нормировка элемента $uh - fv$.

Пусть идеал I порождается множеством $R \subset I$. Тогда редуцированный базис Гребнера строят по следующему алгоритму. Полагают G равным R. На первом этапе все элементы G нормируют. Затем проводят все возможные редукции (результат редукции либо нулевой и его можно удалить из G, либо он меньше исходного элемента, что гарантирует обрыв любой цепочки редукций). На третьем этапе находят все композиции (даже один элемент может дать несколько композиций) и добавляют их результаты во множество G. После этого возвращаются ко второму этапу.

Лемма о композиции (или, как ее еще называют, „бриллиантовая лемма") гарантирует, что результат бесконечного числа повторений второго и третьего этапов — минимальный базис Гребнера. Теперь если мы проредуцируем все младшие слова элементов G с помощью самого G, то получим редуцированный базис Гребнера.

При вычислениях редуцированного базиса Гребнера будем пользоваться сокращенными обозначениями: $\to$ будет обозначать редукцию (слева — редуцируемый элемент, справа — результат редукции), а композицию будем записывать разделенной на три части точками и после двоеточия писать ее результат, при этом часто будем продолжать эту запись цепочкой редукций. Для алгебр, изучаемых в данной работе, множества R являются конечными. При этом алгоритм, описанный выше, останавливается для данных R после конечного числа шагов, так как при последующих шагах новые элементы не появляются.

2. Основной результат этого пункта, который будет сформулирован ниже, следует из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Пусть $P[x]$ — алгебра полиномов от одной переменной x. Тогда существуют четыре линейных идемпотентных оператора, которые отображают $P[x]$ в $P[x]$ и в сумме дают скалярный оператор λI.*

Доказательство. Приведем непосредственную конструкцию таких операторов. Обозначим через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ две идемпотентные матрицы-функции из $\mathbb{C}$ в $M_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t & t-t^2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}, \qquad \psi(t) = \begin{pmatrix} t & -(t-t^2) \\ -1 & 1-t \end{pmatrix},$$

а также зададим последовательность чисел $x_j = j(\lambda/2-1)$, $j \in \mathbb{N}$. По так заданным числам определим операторы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 в базисе $1, x, x^2, x^3, \ldots$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \operatorname{diag}\{\varphi(x_1), \varphi(x_3), \varphi(x_5), \ldots\}, \\ Q_2 &= \operatorname{diag}\{\psi(x_1), \psi(x_3), \psi(x_5), \ldots\}, \\ Q_3 &= \operatorname{diag}\{1, \varphi(x_2), \varphi(x_4), \varphi(x_6), \ldots\}, \\ Q_4 &= \operatorname{diag}\{1, \psi(x_2), \psi(x_4), \psi(x_6), \ldots\}. \end{aligned}$$

Как видно из определения, операторы Q_i имеют блочный диагональный вид с нулевыми числами вне блоков. Кроме того, $Q_i^2 = Q_i$, поскольку степень любого многочлена $f(x)$ из $P[x]$ является конечным числом и действие оператора Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, на $f(x)$ будет таким же, как и действие матрицы Q_i^f, полученной из Q_i заменой всех строк, начиная с некоторой, нулевыми. Далее, легко видеть, что

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= \operatorname{diag}\{2x_1, 2-2x_1, 2x_3, 2-2x_3, 2x_5, 2-2x_5, \ldots\}, \\ Q_3 + Q_4 &= \operatorname{diag}\{2, 2x_2, 2-2x_2, 2x_4, 2-2x_4, 2x_6, 2-2x_6, \ldots\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \operatorname{diag}\left\{2+2x_1, 2+2(x_2-x_1), \ldots, 2+2(x_j-x_{j-1}), \ldots\right\}.$$

Но $x_j - x_{j-1} = \lambda/2 - 1$, откуда $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \lambda I$. Утверждение доказано.

Определим теперь алгебру $\mathbf{A}_\lambda$ как алгебру, порожденную операторами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Тогда верно следующее утверждение.

Утверждение 2. *При $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 2$ алгебра $\mathbf{A}_\lambda$ не является PI-алгеброй.*

Доказательство. Допустим, $\mathbf{A}_\lambda$ — *PI*-алгебра. Тогда можно предполагать, что для некоторого натурального m и для любых $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{A}_\lambda$ выполнено полиномиальное тождество вида (см., например, [5], § 20.2)

$$\Lambda_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(m)} = 0 \tag{2}$$

(S_m — группа подстановок, $a_\sigma \in \mathbb{C}$). Более того, можно считать, что m нечетно, поскольку, умножив равенство (2) на x_{m+1} справа, получим тождество, аналогичное (2) с требуемым свойством. Далее, Λ_m не нулевой, поэтому можно считать, что коэффициент, соответствующий тождественной подстановке, отличен от нуля.

Рассмотрим оператор $X = (Q_1 + Q_2)/2$, который в базисе $1, x, x^2, x^3, \ldots$ имеет вид $\operatorname{diag}\{x_1, 1-x_1, x_3, 1-x_3, \ldots\}$. Заметим, что все числа на диагонали у X попарно различны. Действительно, по построению $x_k - x_j = (k-j)(\lambda/2-1) \neq \neq 0$, так как $\lambda \neq 2$. Далее,

$$(1-x_k) - x_j = 1 - (x_k + x_j) = 1 - (k+j)(\lambda/2-1),$$

и правая часть равенства равна нулю тогда, когда $\lambda = 2 + 2/(k+j)$. Но $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 2$ и, значит, числа на диагонали у X попарно различны.

Теперь нетрудно построить полиномы $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \in P[x]$, $n = = (m+1)/2$, такие, что матричные значения этих полиномов на матрице X имеют следующую структуру:

$$p_1(X) = \operatorname{diag}\{1, 0_n, P_1\},$$

$$p_2(X) = \operatorname{diag}\{0, 1, 0_{n-1}, P_2\}, \ldots, p_n(X) = \operatorname{diag}\{0_{n-1}, 1, 0, P_n\},$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — некоторые числовые диагональные матрицы бесконечного размера.

Рассмотрим также оператор $Y = Q_1 + Q_3$. Очевидно, что в его матрице в базисе $1, x, x^2, \ldots$ под главной диагональю стоят единицы. Тогда, положив

$$e_{jj} = p_j(X), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$e_{jj-1} = p_j(X) Y p_{j-1}(X), \quad j = 2, \ldots, n,$$

получим

$$\Lambda_{2n-1}(e_{nn}, e_{nn-1}, e_{n-1n-1}, e_{n-1n-2}, \ldots, e_{22}, e_{21}, e_{11}) \neq 0,$$

поскольку моном $e_{nn} e_{nn-1} e_{n-1n-1} e_{n-1n-2} \ldots e_{21} e_{11}$ в этом полиноме имеет вид $\operatorname{diag}\{0_{n-1}, 1, *\}$ и коэффициент при нем отличен от нуля, а все остальные мономы имеют вид $\operatorname{diag}\{0_{n-1}, 0, *\}$. Таким образом, пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Теорема 1. *При $\lambda \neq 2$ алгебра $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ не является PI-алгеброй.*

Доказательство. Мы показали, что алгебра $\mathbf{A}_\lambda$, порожденная четверкой идемпотентных операторов, сумма которых равна λI, при $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 2$ не является *PI*-алгеброй. Поскольку существуют сюръективные гомоморфизмы алгебр $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ и $\mathbf{Q}_{4,4-\lambda}$ на $\mathbf{A}_\lambda$ (в первом случае мы переводим q_k в Q_k, а во втором — q_k в $I - Q_k$), то алгебра $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ при любом $\lambda \neq 2$ также не является *PI*-алгеброй.

3. Для исследования алгебры $\mathbf{Q}_{4,2}$ воспользуемся результатами теории $*$-представлений.

В [6] показано, что $\mathbf{Q}_{4,2}$ изоморфна алгебре

$$\mathbb{C}\left\langle x_1, x_2, x_3 \mid \{x_k, x_l\} = 0 \text{ при } l < k, \sum_{k=1}^{3} x_k^2 - e = 0 \right\rangle$$

(здесь $\{x, y\} = xy + yx$ — антикоммутатор элементов x и y) и данная алгебра имеет континуальное число двумерных представлений $\pi_{a,b,c}$, которые задаются на образующих формулами

$$x_1 \mapsto a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \mapsto b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 \mapsto c\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

где $(a, b, c) \in S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1,$ и выполнено одно из трех: $a > 0,\ b > 0,\ c \in \mathbb{R},$ или $a = 0,\ b > 0,\ c > 0,$ или $a > 0,\ b = 0,\ c > 0\}$.

Следующее утверждение показывает, что этих представлений достаточно, чтобы разделять элементы рассматриваемой алгебры.

Утверждение 3. *Для любого ненулевого элемента* v *алгебры* $\mathbf{Q}_{4,2}$ *найдется тройка* $(a, b, c) \in S$ *такая, что* $\pi_{a,b,c}(v) \neq 0$.

Доказательство. Введя на образующих порядок $x_1 < x_2 < x_3$, с помощью „бриллиантовой" леммы покажем, что определяющие соотношения

$$u_0 = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 - e, \quad u_{kl} = \{x_k, x_l\} \quad \text{при} \quad l < k$$

образуют редуцированный базис Гребнера идеала I, порождаемого ими.

Действительно, имеем четыре композиции x_3^3, $x_3^2 x_2$, $x_3^2 x_1$ и $x_3 x_2 x_1$, и ни одна из них новых соотношений не дает:

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_3 : x_3 u_0 - u_0 x_3 = x_3 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_2^2 x_3 - x_1^2 x_3 \to 0,$$

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_2 : x_3 u_{32} - u_0 x_2 = x_3 x_2 x_3 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + x_2 \to$$

$$\to -x_2 x_3^2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + x_2 \to x_2 x_1^2 - x_1^2 x_2 \to 0,$$

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_1 : x_3 u_{31} - u_0 x_1 = x_3 x_1 x_3 - x_2^2 x_1 - x_1^3 + x_1 \to$$

$$\to -x_1 x_3^2 - x_2^2 x_1 - x_1^3 + x_1 \to -x_2^2 x_1 + x_1 x_2^2 \to 0,$$

$$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 : x_3 u_{21} - u_{32} x_1 = x_2 x_3 x_1 - x_3 x_1 x_2 \to 0.$$

Тогда „запрещенными" подсловами являются слова x_3^2, $x_3 x_2$, $x_3 x_1$, $x_2 x_1$, и линейным базисом в рассматриваемой алгебре являются все слова вида

$$x_1^n x_2^m x_3^\sigma,$$

где $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\sigma = 0, 1$. Обозначим через $\mathbb{N}_0$ все четные натуральные числа и 0, а через $\mathbb{N}_1$ соответственно нечетные.

Поэтому любой элемент алгебры $\mathbf{Q}_{4,2}$ можно записать в следующем виде:

$$v = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ m \in \mathbb{N}_0}} x_1^n x_2^m (\lambda_{n,m,0} + \lambda_{n,m,1} x_3) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ m \in \mathbb{N}_1}} x_1^n x_2^m (\lambda_{n,m,0} + \lambda_{n,m,1} x_3) +$$

$$+ \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ m \in \mathbb{N}_0}} x_1^n x_2^m (\lambda_{n,m,0} + \lambda_{n,m,1} x_3) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ m \in \mathbb{N}_1}} x_1^n x_2^m (\lambda_{n,m,0} + \lambda_{n,m,1} x_3).$$

Следовательно, для любой тройки $(a, b, c) \in S$

$$\pi_{a,b,c}(v) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ m \in \mathbb{N}_0}} a^n b^m \left(\lambda_{n,m,0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_{n,m,1} c \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ m \in \mathbb{N}_1}} a^n b^m \left(\lambda_{n,m,0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{n,m,1} c \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ m \in \mathbb{N}_0}} a^n b^m \left(\lambda_{n,m,0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_{n,m,1} c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ m \in \mathbb{N}_1}} a^n b^m \left(\lambda_{n,m,0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{n,m,1} c \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right). \qquad (3)$$

Пусть существует ненулевой элемент $v \in \mathbf{Q}_{4,2}$ такой, что для любой тройки $(a, b, c) \in S$ $\pi_{a,b,c}(v) = 0$.

Обозначим

$$P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_{\sigma_1} \\ m \in \mathbb{N}_{\sigma_2}}} \lambda_{n,m,\sigma} a^n b^m, \qquad \sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \{0, 1\}.$$

Тогда, приравнивая (3) к нулю, имеем

$$\begin{pmatrix} P_{000} & 0 \\ 0 & P_{000} \end{pmatrix} + ic \begin{pmatrix} 0 & P_{001} \\ -P_{001} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & P_{010} \\ P_{010} & 0 \end{pmatrix} + ic \begin{pmatrix} -P_{001} & 0 \\ 0 & P_{001} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} P_{100} & 0 \\ 0 & -P_{100} \end{pmatrix} + ic \begin{pmatrix} 0 & P_{101} \\ P_{101} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & P_{110} \\ -P_{110} & 0 \end{pmatrix} + ic \begin{pmatrix} -P_{111} & 0 \\ 0 & -P_{111} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} P_{000} + P_{100} - icP_{011} - icP_{111} = 0, \\ P_{010} + P_{110} + icP_{001} + icP_{101} = 0, \\ P_{010} - P_{110} - icP_{001} + icP_{101} = 0, \\ P_{000} - P_{100} + icP_{011} - icP_{111} = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} P_{000} - icP_{111} = 0, \\ P_{010} + icP_{101} = 0, \\ P_{110} + icP_{001} = 0, \\ P_{100} - icP_{011} = 0. \end{cases}$$

Но так как последняя система верна для любых троек $(a, b, \pm c)$ таких, что $a, b, c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то для любых пар (a, b) таких, что $a^2 + b^2 = r^2$, $0 < r < 1$ $(r^2 = 1 - c^2)$, все $P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma} = 0$, т. е. каждый из них является многочленом двух переменных, тождественно равным нулю на открытом секторе (на пересечении открытого единичного круга с первой четвертью), а следовательно, все $P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma}$ тождественно равны нулю во всем $\mathbb{R}^2$, и, таким, образом, все $\lambda_{n,m,\sigma} = 0$. Но тогда $v = 0$, что противоречит нашему предположению о том, что $v \neq 0$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения получаем такую теорему.

Теорема 2. *Алгебра* $\mathbf{Q}_{4,2}$ *является* F_4-*алгеброй.*

Доказательство. Действительно, мы показали, что для алгебры $\mathbf{Q}_{4,2}$ существует семейство двумерных представлений, которые разделяют элементы алгебры. Тогда согласно теореме 2 из [6] рассматриваемая алгебра является F_4-алгеброй.

4. В данном пункте положим $m = n - 1$ и $\nu = \lambda - 1$, т. е. m на 1 меньше количества образующих идемпотентов в рассматриваемой алгебре, а сумма идемпотентов равна $\nu + 1$ (выбор таких m и ν удобнее для формулировки и доказательства основной леммы этого пункта).

Рассмотрим элементы

$$p_1 = q_1 - \nu e, \quad p_k = q_k, \quad k = 2, \ldots, m+1. \tag{4}$$

Тогда $\sum_{k=1}^{m+1} q_k = (\nu + 1)e$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{m+1} p_k = e$, а условие, что q_k — идемпотенты, эквивалентно тому, что p_k, $k = 2, \ldots, m+1$, — идемпотенты, а для p_1 выполнено соотношение

$$p_1^2 = p_1 - P_1(\nu), \quad P_1(\nu) = \nu(2p_1 + (\nu-1)e).$$

Таким образом, алгебра $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$ изоморфна алгебре

$$\mathrm{F}_{m+1}/I = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_{m+1} \mid p_k^2 = p_k \ (k = 2, \ldots, m+1),\ p_1^2 = p_1 - P_1(\nu), \sum_{k=1}^{m+1} p_k = e \right\rangle,$$

где I — идеал, порожденный элементами

$$u_1 = p_1^2 - p_1 + P_1(\nu),$$
$$u_k = p_k^2 - p_k, \quad k = 2, \ldots, m+1,$$
$$v_0 = S_1(m+1) - e.$$

На образующих свободной алгебры F_{m+1} введем порядок $p_1 < p_2 < \ldots p_m < p_{m+1}$. Примем также следующие обозначения:

$$S_1(r) = \sum_{k=1}^{r} p_k, \quad S_2(r) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} p_k p_l, \quad S_3(r) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{r} p_k p_l p_m,$$

где $r = 1, \ldots, m+1$ и мы полагаем $S_1(0) = S_2(1) = S_3(1) = S_3(2) = 0$.

Прежде чем сформулировать главный результат этого пункта, докажем два вспомогательные утверждения и основную лемму.

Утверждение 4. *С помощью элементов* u_k, $k = 2, \ldots, m+1$, *осуществимы следующие редукции*:

$$(S_1(r))^2 \to S_2(r) + S_1(r) - P_1(\nu),$$
$$S_1(r)S_2(r) \to S_3(r) + S_2(r) - P_1(\nu)S_1(r) + P_2(\nu),$$
$$S_2(r)S_1(r) \to S_3(r) + S_2(r) - S_1(r)P_1(\nu) + P_2(\nu),$$

где $P_2(\nu) = \nu((1-3\nu)p_1 - 2\nu(\nu-1)e)$.

Доказательство. Проведем необходимые вычисления:

$$(S_1(r))^2 = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} p_k p_l = S_2(r) + \sum_{k=1}^{r} p_k^2 \to S_2(r) + S_1(r) - P_1(\nu),$$

$$S_1(r)S_2(r) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{r} p_k p_l p_m = S_3(r) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{r} p_l^2 p_m \to$$

$$\to S_3(r) + S_2(r) - P_1(\nu) \sum_{m=2}^{r} p_m = S_3(r) + S_2(r) - P_1(\nu)S_1(r) + P_1(\nu)p_1.$$

Аналогично получаем $S_2(r)S_1(r) \to S_3(r) + S_2(r) - S_1(r)P_1(\nu) + p_1 P_1(\nu)$. Но

$$P_1(\nu)p_1 = p_1P_1(\nu) = \nu\left(2p_1^2 + (\nu-1)p_1\right) \to$$
$$\to \nu(2p_1 - 2\nu(2p_1 + (\nu-1)e) + (\nu-1)p_1) = P_2(\nu),$$

и утверждение доказано.

Утверждение 5. *Верны следующие реккурентные соотношения:*

$$S_1(r+1) = p_{r+1} + S_1(r), \quad r = 0, \ldots, m,$$
$$S_2(r+1) = p_{r+1}S_1(r) + S_1(r)p_{r+1} + S_2(r), \quad r = 1, \ldots, m,$$
$$S_3(r+1) = p_{r+1}S_2(r) + p_{r+1}S_1(r)p_{r+1} + S_1(r)p_{r+1}S_1(r) + S_2(r)p_{r+1} + S_3(r),$$
$$r = 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Первое и второе соотношения очевидны. Докажем третье:

$$S_3(r+1) = \sum_{k=1}^{r+1}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{r+1} p_kp_lp_m = p_{r+1}\sum_{l=1}^{r}\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{r+1} p_lp_m + \sum_{k=1}^{r}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{r+1} p_kp_lp_m =$$

$$= p_{r+1}S_2(r) + p_{r+1}S_1(r)p_{r+1} + S_1(r)p_{r+1}S_1(r) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{r}\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{r+1} p_kp_lp_m =$$

$$= p_{r+1}S_2(r) + p_{r+1}S_1(r)p_{r+1} + S_1(r)p_{r+1}S_1(r) + S_3(r) + S_2(r)p_{r+1}.$$

Лемма. *При* $m \geq 3$ *множество элементов*

$$u_1 = p_1^2 - p_1 + P_1(\nu),$$
$$u_k = p_k^2 - p_k, \quad k = 2, \ldots, m,$$
$$v_0 = S_1(m+1) - e,$$
$$v_1 = S_2(m) - P_1(\nu),$$
$$v_2 = p_mS_1(m-2)p_{m-1} - S_1(m-1)p_mS_1(m-2) - S_2(m-1)p_m -$$
$$- p_{m-1}S_2(m-2) - S_1(m-2)p_{m-1}S_1(m-2) - S_3(m-2) -$$
$$- p_mS_1(m-2) - 2S_1(m-1)p_m - 2p_{m-1}S_1(m-2) - S_1(m-2)p_{m-1} - 2S_2(m-2) +$$
$$+ P_1(\nu)S_1(m) + S_1(m-1)P_1(\nu) - P_1(\nu)p_{m-1} + P_1(\nu) - P_2(\nu)$$

является редуцированным базисом Гребнера идеала I.

Доказательство. Обозначим исходное множество элементов, порождающих I, через $G = \{u_k \ (k=1,\ldots,m+1), v_0\}$. Его элементы, очевидно, нормированы. Запишем v_0 в виде $v_0 = p_{m+1} + S_1(m) - e$ и проредуцируем u_{m+1} с помощью v_0:

$$u_{m+1} - p_{m+1}v_0 = p_{m+1}^2 - p_{m+1} - p_{m+1}\left(p_{m+1} + S_1(m) - e\right) = -p_{m+1}S_1(m).$$

После нормировки получим $p_{m+1}S_1(m)$. Проредуцируем полученный элемент снова с помощью v_0:

$$p_{m+1}S_1(m) - v_0S_1(m) = p_{m+1}S_1(m) - \left(p_{m+1} + S_1(m) - e\right)S_1(m) =$$
$$= -(S_1(m))^2 + S_1(m) \to -S_2(m) + P_1(\nu).$$

После нормировки получим элемент v_1. Заменим во множестве G элемент u_{m+1} на v_1. Для дальнейших вычислений этот элемент удобнее записать в виде

$$v_1 = p_m p_{m-1} + p_m S_1(m-2) + S_1(m-1)p_m + S_2(m-1) - P_1(\nu).$$

Других редукций нет.

Есть две композиции: $p_m p_{m-1}^2$ и $p_m^2 p_{m-1}$, подсчитаем их.

Первая композиция:

$$p_m \cdot p_{m-1} \cdot p_{m-1} : v_1 p_{m-1} - p_m u_{m-1} =$$
$$= \big(p_m p_{m-1} + p_m S_1(m-2) + S_1(m-1)p_m + S_2(m-1) - P_1(\nu)\big)p_{m-1} -$$
$$- p_m\big(p_{m-1}^2 - p_{m-1}\big) =$$
$$= p_m S_1(m-2)p_{m-1} - S_1(m-1)p_m p_{m-1} + S_2(m-1)p_{m-1} +$$
$$+ p_m p_{m-1} - P_1(\nu)p_{m-1} = w.$$

Старшее слово w не редуцируется, поэтому w надо добавить к множеству G. Однако мы хотим получить редуцированный базис Гребнера, поэтому сразу проредуцируем все (а не только главное) слова:

$$w \to p_m S_1(m-2)p_{m-1} -$$
$$- S_1(m-1)p_m S_1(m-2) - (S_1(m-1))^2 p_m - S_1(m-1)S_2(m-1) + S_1(m-1)P_1(\nu) +$$
$$+ S_2(m-1)p_{m-1} - p_m S_1(m-2) - S_1(m-1)p_m - S_2(m-1) + P_1(\nu) - P_1(\nu)p_{m-1} \to$$
$$\to p_m S_1(m-2)p_{m-1} - S_1(m-1)p_m S_1(m-2) -$$
$$- S_2(m-1)p_m - S_1(m-1)p_m + P_1(\nu)p_m -$$
$$- S_3(m-1) - S_2(m-1) + P_1(\nu)S_1(m-1) - P_2(\nu) +$$
$$+ S_1(m-1)P_1(\nu) + S_2(m-1)p_{m-1} -$$
$$- p_m S_1(m-2) - S_1(m-1)p_m - S_2(m-1) + P_1(\nu) - P_1(\nu)p_{m-1} =$$
$$= p_m S_1(m-2)p_{m-1} - S_1(m-1)p_m S_1(m-2) - S_2(m-1)p_m -$$
$$- S_3(m-1) + S_2(m-1)p_{m-1} -$$
$$- p_m S_1(m-2) - 2S_1(m-1)p_m - 2S_2(m-1) +$$
$$+ P_1(\nu)p_m + S_1(m-1)P_1(\nu) + P_1(\nu)S_1(m-2) + P_1(\nu) - P_2(\nu) = w_1.$$

Поскольку $m \geq 3$, то

$$-S_3(m-1) + S_2(m-1)p_{m-1} - 2S_2(m-1) =$$
$$= -p_{m-1}S_2(m-2) - p_{m-1}S_1(m-2)p_{m-1} -$$
$$- S_1(m-2)p_{m-1}S_1(m-2) - S_2(m-2)p_{m-1} - S_3(m-2) +$$
$$+ p_{m-1}S_1(m-2)p_{m-1} + S_1(m-2)p_{m-1}^2 + S_2(m-2)p_{m-1} -$$
$$- 2p_{m-1}S_1(m-2) - 2S_1(m-2)p_{m-1} - 2S_2(m-2) \to$$
$$\to -p_{m-1}S_2(m-2) - S_1(m-2)p_{m-1}S_1(m-2) - S_3(m-2) -$$
$$-2p_{m-1}S_1(m-2) - S_1(m-2)p_{m-1} - 2S_2(m-2),$$

т. е. w_1 редуцируется к элементу v_2, который не редуцируем, добавим его к G.

С помощью второй композиции новые элементы не получим, так как результат этой композиции редуцируется к нулю:

$$p_m \cdot p_m \cdot p_{m-1} : p_m v_1 - u_m p_{m-1} =$$
$$= p_m\big(p_m p_{m-1} + p_m S_1(m-2) + S_1(m-1)p_m + S_2(m-1) - P_1(\nu)\big) - \big(p_m^2 - p_m\big)p_{m-1} \to$$
$$\to p_m S_1(m-2) + p_m S_1(m-1)p_m + p_m S_2(m-1) - p_m P_1(\nu) + p_m p_{m-1} =: w_2.$$

Далее, с помощью вычислений, аналогичных проведенным при подсчете первой композиции, можно показать, что w_2 редуцируется к элементу w_1, который, как мы показали выше, редуцируется далее к v_2, а с помощью последнего — к нулю.

После первого шага новых редукций, очевидно, нет. Но появляются две новые композиции $p_m^2 p_{m-2} p_{m-1}$ и $p_m p_{m-2} p_{m-1}^2$. Покажем, что их результат также редуцируется к нулю. Таким образом, на втором шаге новые элементы не появляются, и, следовательно, алгоритм останавливается. Поэтому множество G является редуцированным базисом Гребнера идеала I.

Для вычисления результата этих двух композиций удобнее воспользоваться w вместо v_2 (это можно сделать, так как v_2 получен из w редуцированием младших слов).

Итак, первая композиция:

$$\begin{aligned}
& p_m \cdot p_m \cdot p_{m-2} p_{m-1} : p_m w - u_m p_{m-2} p_{m-1} = \\
&= p_m \big(p_m S_1(m-2) p_{m-1} + S_1(m-1) p_m p_{m-1} + \\
&+ S_2(m-1) p_{m-1} + p_m p_{m-1} - P_1(\nu) p_{m-1} \big) - \big(p_m^2 - p_m \big) p_{m-2} p_{m-1} \to \\
&\to p_m S_1(m-2) p_{m-1} + p_m S_1(m-1) p_m p_{m-1} + \\
&+ p_m S_2(m-1) p_{m-1} + p_m p_{m-1} - p_m P_1(\nu) p_{m-1} = \\
&= \big(p_m S_1(m-2) + p_m S_2(m-1) + p_m S_1(m-1) p_m - p_m P_1(\nu) + p_m p_{m-1} \big) p_{m-1} + \\
&+ p_m p_{m-1} - p_m p_{m-1}^2.
\end{aligned}$$

В скобках стоит w_2, который, как мы показали выше, редуцируется к нулю. Поэтому и все это соотношение редуцируется к нулю.

Вторая композиция:

$$\begin{aligned}
& p_m p_{m-2} \cdot p_{m-1} \cdot p_{m-1} : w p_{m-1} - p_m p_{m-2} u_{m-1} = \\
&= \big(p_m S_1(m-2) p_{m-1} + S_2(m-1) p_{m-1} + \\
&+ S_1(m-1) p_m p_{m-1} + p_m p_{m-1} - P_1(\nu) p_{m-1} \big) p_{m-1} - p_m p_{m-2} \big(p_{m-1}^2 - p_{m-1} \big) = \\
&= p_m S_1(m-2) p_{m-1} + S_2(m-1) p_{m-1} + \\
&+ S_1(m-1) p_m p_{m-1} + p_m p_{m-1} - P_1(\nu) p_{m-1} = w \to 0.
\end{aligned}$$

И, таким образом, при этих двух композициях новые соотношения не появляются.

Из доказанной леммы получаем такую теорему.

Теорема 3. *Линейным базисом алгебры* $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$ *при* $n \geq 4$ *являются все слова, не содержащие элементов множества*

$$G = \left\{ q_n,\ q_k^2\ (k = 1, \ldots, n-1),\ q_{n-1} q_{n-2},\ q_{n-1} q_{n-3} q_{n-2} \right\}$$

в качестве подслов.

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathrm{F}_n = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n \rangle \to \mathbb{C}\langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ — изоморфизм двух свободных алгебр, действующий на образующих по закону, определяемому равенствами (4). Введем порядок на образующих образа: $q_{k+1} > q_k$. Тогда, очевидно, для любого элемента $u \in \mathrm{F}_n$ верно равенство $\overset{\$}{\varphi}(\hat{u}) = \overset{\$}{\varphi}(u)$, из которого нетрудно получить, что слово w нормально по модулю идеала I тогда и только тогда, когда нормально слово $\overset{\$}{\varphi}(u)$ по модулю идеала $\varphi(I)$.

Пусть теперь слово $w \in \mathrm{F}_n$ содержит в качестве подслова слово w', т. е. $w = g w' h$ для некоторых слов g и h. Тогда $\overset{\$}{\varphi}(w) = \overset{\$}{\varphi}(g) \overset{\$}{\varphi}(w') \overset{\$}{\varphi}(h)$, т. е. слово

$\overset{\$}{\varphi}(w)$ содержит в качестве подслова слово $\overset{\$}{\varphi}(w')$. Но φ является изоморфизмом, поэтому w содержит w' в качестве подслова тогда и только тогда, когда слово $\overset{\$}{\varphi}(w)$ содержит $\overset{\$}{\varphi}(w')$.

Согласно предыдущей лемме нормальными словами по модулю идеала I являются все слова, не содержащие элементов множества $G' = \{p_n,\ p_k^2\ (k = 1,\ldots,n-1),\ p_{n-1}p_{n-2},\ p_{n-1}p_{n-3}p_{n-2}\}$ в качестве подслов, и только они. Следовательно, нормальными словами по модулю $\varphi(I)$ являются слова, не содержащие элементов множества $\overset{\$}{\varphi}(G')$ в качестве подслов, т. е. элементов множества G, и теорема доказана, так как $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda} = \mathbb{C}\langle q_1,\ldots,q_n\rangle / \varphi(I)$.

***Следствие* 1.** *Все алгебры* $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$, $n \geq 4$, *бесконечномерны.*

Действительно, в силу предыдущей теоремы слово $(q_{n-3}q_{n-2})^m$ является элементом линейного базиса при любом натуральном m, и, значит, указанные алгебры бесконечномерны.

***Следствие* 2.** *Алгебра* $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$, $n \geq 5$, *не может быть PI-алгеброй ни при каком* λ.

Доказательство. Достаточно показать, что гомоморфизм $\varphi : \mathrm{F}_2 = \mathbb{C}\langle z_1, z_2\rangle \to \mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$, действующий на образующих по правилу

$$z_1 \mapsto q_{n-1}q_{n-4}, \quad z_2 \mapsto q_{n-2}q_{n-3},$$

является вложением (т. е. его ядро нулевое).

Линейным базисом в F_2 являются все возможные слова, составленные из букв z_1 и z_2, т. е. все слова вида

$$w = z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_1^{k_3}z_2^{k_4}\ldots z_1^{k_m},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$, кроме того, k_1 и k_m могут быть равны нулю.

Если мы покажем, что произвольное слово w переходит в элемент базиса алгебры $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$, то тогда произвольный ненулевой элемент алгебры F_2 перейдет в линейную комбинацию базисных элементов алгебры $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$, т. е. в ненулевой элемент, и следовательно, гомоморфизм φ инъективен.

Итак, слово w переходит в слово

$$(q_{n-1}q_{n-4})^{k_1}(q_{n-2}q_{n-3})^{k_2}(q_{n-1}q_{n-4})^{k_3}(q_{n-2}q_{n-3})^{k_4}\ldots(q_{n-1}q_{n-4})^{k_m}.$$

„Запрещенные" слова q_n, q_k^2, $k = 1,\ldots,n-1$, очевидно, в этом слове не встречаются. Также очевидно, что в нем после q_{n-1} всегда идет q_{n-4}, следовательно, и два оставшихся „запрещенных" слова $q_{n-1}q_{n-2}$ и $q_{n-1}q_{n-3}q_{n-2}$ встретиться не могут. Следовательно, образ слова w всегда является элементом базиса алгебры $\mathbf{Q}_{\mathbf{n},\lambda}$.

Авторы выражают благодарность С. В. Поповичу за полезные обсуждения.

1. *Böttcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., Krupnik N., Roch S., Silberman B., Spitkovsky I.* Banach algebras generated by N idempotents and applications // Operator Theory Adv. Appl. – 1996. – **90**. – P. 19–54.
2. *Bergman G.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. – 1978. – **29**, № 2. – P. 178–218.
3. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – 1990. – **57**. – С. 5–177.
4. *Stankus, Sloboda.* Sum of three idempotents equals a constant // http://math.ucsd.edu./~ncalg/Bart/index.html.
5. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры – М.: Мир, 1986. – 541 с.
6. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu.S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1–261.

Получено 19.12.2000