УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $G^{\kappa}|G|1$

For the queueing system $G^{\kappa}|G|1$ with group inflow of requests, we present distributions of the following characteristics: the duration of a busy period, the length of a queue in transition and stationary operating conditions of the queueing system, the summary queueing time, the virtual time of the service beginning, the entering flow of requests and leaving flow of serviced requests, and others.

Для систем обслуговування $G^{\kappa}|G|1$ з груповим надходженням вимог наведено розподіли таких характеристик: тривалості періоду зайнятості, довжини черги в перехідному і стаціонарному режимах функціонування системи обслуговування, сумарного часу простою системи обслуговування, віртуального часу чекання початку обслуговування, вхідного потоку вимог і вихідного потоку обслугованих вимог та інших.

1. Определение основных случайных процессов. Пусть $\kappa \in N^+ = \{1, 2, \ldots\}$ — положительная целочисленная случайная величина, а $\xi, \eta \in (0, \infty)$ — положительные случайные величины с абсолютно непрерывными функциями распределений

$$F(x) = \mathrm{P}[\eta < x] = \int_0^x f(u)\,du, \qquad G(y) = \mathrm{P}[\xi < y] = \int_0^y g(u)\,du.$$

Будем предполагать, что η, ξ, κ — независимые случайные величины с конечными средними значениями. Пусть $\{\eta_i', \xi_i', \kappa_i'\}$, $i \in N^+$, — взаимно независимые случайные величины такие, что

$$\eta_i' \doteq \eta, \quad \xi_i' \doteq \xi, \quad \kappa_i' \doteq \kappa,$$

где символ $\doteq$ означает совпадение распределений соответствующих случайных величин.

Пусть

$$\{\eta_n, \xi_n, \kappa_n;\, n \geq 0\} \in R_+^2 \times N, \quad n = \{0, 1, \ldots\}, \quad R_+ = [0, \infty),$$

— случайная последовательность, порожденная случайными величинами η, ξ, κ, с такими свойствами:

$$\eta_0 = \xi_0 = \kappa_0 = 0, \quad \eta_n = \sum_{i=1}^n \eta_i', \quad \xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i', \quad \kappa_n = \sum_{i=1}^n \kappa_i'. \tag{1}$$

Для $t \geq 0$ введем случайные процессы:

$$\alpha(t) = \max\{k \geq 0 : \xi_k \leq t\}, \quad \beta(t) = \max\{k \geq 0 : \eta_k \leq t\}, \quad s(t) = \kappa_{\alpha(t)} - \beta(t),$$

$$\xi(t) = \xi_{\alpha(t)+1} - t, \quad \eta(t) = \eta_{\beta(t)+1} - t, \quad S_t = \{s(t), \eta(t), \xi(t)\}.$$

Поясним вероятностный смысл введенных случайных процессов:

$\alpha(t)$, $\beta(t) \in N$, $t \geq 0$, — процессы восстановления, порожденные случайными последовательностями $\{\xi_n;\, n \geq 0\}$, $\{\eta_n;\, n \geq 0\}$;

$s(t) \in Z = \{0, \pm 1, \ldots\}$, $t \geq 0$, — разность неординарного и обычного процессов восстановления;

$\xi(t)$, $\eta(t) \in R_+$, $t \geq 0$, — убывающие линейчатые компоненты, дополняющие процессы восстановления $\alpha(t)$, $\beta(t)$ до марковских процессов;

$S_t \in Z \times R_+^2,\ t \ge 0,$ — марковский процесс, сопутствующий разности процессов восстановления $s(t),\ t \ge 0,$ с убывающими линейчатыми компонентами $\xi(t),\ \eta(t)$.

Введем случайные элементы, порожденные η, ξ, κ и случайными последовательностями (1):

1) $\{\sigma_k, T_k;\ k \ge 0\}$ — момент первого достижения уровня $k \ge 0$ случайной последовательностью $\{\kappa_n;\ n \ge 0\}$ и величина перескока через этот уровень соответственно:

$$\sigma_k = \min\{n \ge 0;\ \kappa_n \ge k\}, \quad T_k = \kappa_{\sigma_k} - k, \quad k \in N; \quad \mathrm{P}[\sigma_0 = T_0 = 0] = 1;$$

совместная производящая функция тройки $\{\sigma_k, T_k;\ k \ge 0\}$ имеет вид

$$\sum_{k \ge 0} \theta^k \mathrm{M}[t^{\sigma_k} z^{T_k}] = \frac{z}{z-\theta} - \frac{\theta}{z-\theta} \times \frac{1 - tM[z^\kappa]}{1 - tM[\theta^\kappa]}, \qquad |\theta|, |z| \le 1, \qquad t \in [0,1);$$

2) $\zeta_s^+(z) \in R_+,\ s > 0,$ — неотрицательная случайная величина с таким преобразованием Лапласа:

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda \zeta_s^+(z)}] = \frac{E(\lambda, s, z)}{E(0, s, z)},$$

$$E(\lambda, s, z) = \exp\left\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_{\kappa_n} - \xi_n)} z^{\kappa_n} e^{-s\xi_n};\ \eta_{\kappa_n} > \xi_n\right]\right\}, \quad |z| \le 1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0;$$

3) $\zeta_s^-(z) \in R_+,\ s > 0,$ — неотрицательная случайная величина такая, что

$$\mathrm{M}[e^{-\mu \zeta_s^-(z)}] = \frac{E(\mu, s, z)}{E(0, s, z)},$$

$$E(\mu, s, z) = \exp\left\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \mathrm{M}\left[e^{-\mu(\xi_n - \eta_{\kappa_n})} z^{\kappa_n} e^{-s\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n > \eta_{\kappa_n}\right]\right\}, \quad |z| \le 1, \quad \mathrm{Re}\,\mu \ge 0.$$

Будем считать, что $\zeta_s^+(z), \zeta_s^-(z)$ не зависимы от случайных последовательностей (1). Отметим, что если $\zeta^+,\ \zeta^-$ — неотрицательные случайные величины с преобразованием Лапласа

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda \zeta^+}] = \frac{E(\lambda, 0, 1)}{E(0, 0, 1)}, \quad \mathrm{M}[e^{-\lambda \zeta^-}] = \frac{F(\mu, 0, 1)}{F(0, 0, 1)}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda, \mu \ge 0,$$

то

$$\zeta^+ \doteq \sup_{n \ge 0}\{\eta_{\kappa_n} - \xi_n\}, \qquad \zeta^- \doteq \sup_{n \ge 0}\{\xi_n - \eta_{\kappa_n}\}.$$

Будем предполагать, что введенные случайные элементы, последовательности, процессы принадлежат основному вероятностному пространству (Ω, F, P).

Пусть $k \in N,\ x, y \in R_+$ и

$$\tau_k(x, y) = \inf\{t > 0:\ s(t) < 0 / S_0 \doteq (k, x, y)\},$$

— момент первого перескока процессом $s(t),\ t \ge 0,$ нулевого уровня.

Процесс $X_t^{\neq} = \{S_t,\ 0 \le t < \tau_k(x, y)\}$ описывает функционирование на интервале $[0, \tau_k(x, y))$ одноканальной системы обслуживания с такими свойствами:

требования в систему обслуживания поступают группами случайного объема $\kappa_i',\ i \in N^+,$ в моменты $\{\xi_n;\ n \ge 0\}$ через независимые промежутки ξ_i',

$i \in N^+$, одинаково распределенные с ξ. Будем также предполагать, что требования внутри группы пронумерованы и располагаются в очереди согласно этой нумерации;

требования обслуживаются по одному, причем время обслуживания требований — независимые случайные величины η'_i, $i \in N^+$, одинаково распределенные с η;

дисциплина обслуживания требований прямая (согласно расположению требований в очереди), количество мест ожидания не ограничено.

Событие $\{X_t^{\neq} = (k, x, y)\}$, $k \in N$, $x, y \in R_+$, означает, что в момент времени t в системе находится $k+1$ требование (k требований в очереди и одно на обслуживающем приборе), обслуживание требования, находящегося на обслуживающем приборе, закончится в момент времени $t+x$; поступление очередной группы требований в систему произойдет в момент времени $t+y$.

Так введенную систему обслуживания будем обозначать символом $G^{\kappa}|G|1$. Индекс κ указывает на тот факт, что требования в систему поступают группами случайного объема $\kappa \in N^+$. При $\kappa \equiv 1$ получаем классическую систему обслуживания $G|G|1$.

Случайный интервал $[0, \tau_k(x, y)]$ назовем периодом занятости системы обслуживания типа (k, x, y). В частности, $[0, \tau_{\kappa-1}(\eta, \xi)]$ — канонический период занятости (в начальный момент времени $t = 0$ в свободную систему поступает группа требований случайного объема κ и $\tau_{\kappa-1}(\eta, \xi) \overset{\text{df}}{=} \tau$ — момент ее первого освобождения от требований). Ясно, что $\xi(\tau_k(x, y))$ и $\beta(\tau_k(x, y))$ — это величина простоя системы обслуживания после периода занятости и число требований, обслуженных системой на периоде занятости $[0, \tau_k(x, y)]$ соответственно. Обозначим $\tau_{\kappa}(\eta, \xi) \overset{\text{df}}{=} \tau_k$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k \in N$. *Тогда*

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau_k} e^{-\mu\xi(\tau_k)} z^{\beta(\tau_k)};\quad \tau_k < \infty\right] =$$

$$= z^{k+1}\left(\mathrm{M}\left[e^{-\mu\zeta_s^-(z)}\right]\right)^{-1} \mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{k+1}} e^{-\mu(\xi+\zeta_s^-(z)-\eta_{k+1})};\ \xi+\zeta_s^-(z) > \eta_{k+1}\right], \tag{2}$$

$$s > 0, \quad \operatorname{Re}\mu \geq 0, \quad |z| \leq 1.$$

В частности,

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau_k};\ \tau_k < \infty\right] = \mathrm{M}\left[e^{-s\eta_{k+1}};\ \xi+\zeta_s^- > \eta_{k+1}\right], \quad s > 0,$$

где

$$\zeta_s^- = \zeta_s^-(1), \quad \mathrm{M}\left[e^{-\mu\zeta_s^-}\right] = F(\mu, s, 1)F(0, s, 1)^{-1}.$$

***Следствие* 1.** *Пусть в начальный момент времени* $t = 0$ *в свободную систему* $G^{\kappa}|G|1$ *поступает группа требований случайного объема* κ *и* $[0, \tau)$ — *канонический период занятости,* ε — *величина времени простоя системы после канонического периода занятости,* d — *число требований, обслуженных системой на интервале* $[0, \tau]$.

Тогда

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\tau} e^{-\mu\varepsilon} z^d;\ \tau < \infty\right] = 1 - F(\mu, s, z)^{-1} \implies d \doteq \kappa_{\chi},\ \tau \doteq \eta_d,\ \varepsilon \doteq \xi_{\chi} - \tau, \tag{3}$$

где

$$\chi = \inf\left\{n>0:\ \xi_n - \eta_{\kappa_n} > 0\right\}$$

— момент первого выхода случайного блуждания $\left\{\xi_n - \eta_{\kappa_n};\ n\geq 0\right\}$ *в положительную полуплоскость и*

$$\mathrm{M}\left[z^{\chi};\ \chi<\infty\right] = 1-\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{z^n}{n}\mathrm{P}\left[\xi_n>\eta_{\kappa_n}\right]\right\},\qquad |z|\leq 1.$$

Если $\mathrm{M}[\xi] > \mathrm{M}[\eta\kappa]$, *то*

$$\mathrm{M}[d] = \mathrm{M}[\kappa]\mathrm{M}[\chi],\quad \mathrm{M}[\tau] = \mathrm{M}[\eta]\mathrm{M}[d],\quad \mathrm{M}[\varepsilon] = \mathrm{M}[\xi]\mathrm{M}[\chi] - \mathrm{M}[\tau],$$

где

$$\mathrm{M}[\chi] = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{P}\left[\eta_{\kappa_n}>\xi_n\right]\right\}.$$

Если в этом следствии положить $\kappa\equiv 1$, то получим основной результат монографии [1, с. 60].

2. Решение основного уравнения. Введем случайный процесс $X_t \in N\times\times R_+^2 \cup R_+$, $t\geq 0$; $X_0 \doteq (\kappa-1,\eta,\xi)$ посредством стохастического реккурентного соотношения

$$X_t = \begin{cases} X_t^{\neq}, & 0\leq t<\tau;\\ \tau+\varepsilon-t, & \tau\leq t<\tau+\varepsilon;\\ X_{t-(\tau+\varepsilon)}, & t\geq\tau+\varepsilon.\end{cases}$$

Так введенный процесс описывает функционирование системы обслуживания $G^{\kappa}|G|1$ для всех $t\geq 0$. Событие $\{X_t=(k,x,y)\}$, $k\in N$, $x,y\in R_+$, означает, что в момент времени t в системе находится $k+1$ требование (k в очереди и одно на обслуживающем приборе); очередное поступление группы требований произойдет в момент $t+y$, обслуживание требования, находящегося на обслуживающем приборе, закончится в момент времени $t+x$. Событие $\{X_t=y\}$, $y\in R_+$, означает, что в момент времени t система свободна от требований и очередное поступление группы требований произойдет в момент $t+y$. В частности, событие $B_t = \{X_t\in N\times R_+^2\}$ означает, что в момент времени t система находится в занятом состоянии, а событие $A_t = \{X_t\in R_+\}$ означает, что в момент времени t система свободна от требований. Таким образом,

$$X_t(\omega) = \begin{cases}[l(t,\omega),\xi(t,\omega),\eta(t,\omega)], & \omega\in B_t;\\ \xi(t,\omega), & \omega\in A_t,\end{cases}$$

где $l(t)$ — длина очереди в системе обслуживания в момент времени t; $\eta(t)$ — время, через которое завершится обслуживание требования, находящегося в момент времени t на обслуживающем приборе; $\xi(t)$ — время, через которое в систему поступит очередная группа требований.

Пусть $d(t)$ — число требований, обслуженных системой на интервале $[0,t]$, включая и требование, находящееся в момент времени t на обслуживающем приборе. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в начальный момент времени* $t=0$ *в свободную систему обслуживания* $G^{\kappa}|G|1$ *поступает группа требований случайного объема* κ,

ν_s — *показательно распределенная случайная величина с параметром* $s > 0$, $\mathrm{P}[\nu_s > t] = \exp\{-ts\},\ t \ge 0$.

Тогда

$$\frac{s-\lambda-\mu}{s}\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\quad \tau > \nu_s\right] =$$

$$= F(\mu,s,z)^{-1} - (1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^{\kappa}])E(\lambda,s,z) - \left(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right)(1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]) \times$$

$$\times E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z)+\psi_k(\mu,s,z)], \tag{4}$$

$$\frac{s-\lambda-\mu}{s}\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};B_{\nu_s}\right] = \frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)} - \frac{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}{1-\tilde{g}(s)\mathrm{M}[z^{\kappa}]}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda\zeta_s^+(z)}\right] -$$

$$-\frac{\left(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right)(1-\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^{\kappa}])}{1-\tilde{g}(s)\,\mathrm{M}[z^{\kappa}]}\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z)+\psi_k(\mu,s,z)], \tag{5}$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ A_{\nu_s}\right] = \frac{s}{s-\mu}\left\{1-\frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)}\right\}, \tag{6}$$

$$\mathrm{P}[B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)},\quad \mathrm{P}[A_{\nu_s}] = 1-\frac{F(s,s)}{F(0,s)}\qquad (s>0;\ \mathrm{Re}\,\lambda,\mu\ge 0,\ |\theta|,|z|\le 1),$$

где

$$\varphi_k(\lambda,s,z) = \mathrm{M}\left[z^{T_k}e^{-\lambda(\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})}e^{-s\xi_{\sigma_k}};\quad \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}\right],\quad k\in N^+,$$

$$\psi_k(\mu,s,z) = \mathrm{M}\left[z^{T_k}e^{-\mu(\xi_{\sigma_k}-\zeta_s^+(z)-\eta_{T_k})}e^{-s(\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k})};\ \xi_{\sigma_k} > \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}\right],\ k\in N^+,$$

$$F(\mu,s) = F(\mu,s,1),\quad E(\lambda,s) = E(\lambda,s,1),\quad \tilde{f}(\lambda) = \mathrm{M}[e^{-\lambda\eta}],\quad \tilde{g}(\mu) = \mathrm{M}[e^{-\mu\xi}].$$

***Доказательство* теорем 1, 2.** Пусть $X_0^{\neq} \doteq (k_0,\eta,\xi),\ k_0\in N$, и

$$L_k^t(x,y,z) = \mathrm{M}\left[z^{d(t)},\quad l(t)=k,\quad \eta(t)<x,\quad \xi(t)<y;\quad \tau_{k_0}>t\right],\quad |z|\le 1.$$

Рассматривая возможные переходы процесса $X_t^{\neq},\ t\ge 0$, в течение малого промежутка времени $\Delta\downarrow 0$, приходим к равенству

$$L_k^{t+\Delta}(x,y,z) = L_k^t(x+\Delta,\ y+\Delta,\ z) - L_k^t(x+\Delta,\ \Delta,\ z) - L_k^t(\Delta,\ y+\Delta,\ z) +$$

$$+\ L_k^t(\Delta,\ \Delta,\ z) + z\int_0^{\Delta} d_u L_{k+1}^t(u,\ y+\Delta,\ z)[F(x+\Delta-u)-F(\Delta-u)] +$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1}\int_0^{\Delta}\mathrm{P}[\kappa=k-r]\,d_u L_r^t(x+\Delta,\ u,\ z)[G(y+\Delta-u)-G(\Delta-u)] + o(\Delta), \tag{7}$$

где

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Можно показать, что если функции $F(x)$, $G(y)$ и начальное распределение процесса $X_t^{\neq},\ t\ge 0$, являются абсолютно непрерывными, то существуют частные производные функции $L_k^t(x, y, z)$ по переменным t, x, y. Стандартным образом из (7) получаем прямые уравнения Колмогорова для переходной функции $L_k^t(x, y, z)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_k^t(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} L_k^t(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} L_k^t(x, y, z) =$$

$$= -r_k^t(x, z) - q_k^t(y, z) + zF(x) q_{k+1}^t(y, z) + G(y) \sum_{r=0}^{k-1} r_r^t(x, z) \, \mathrm{P}[\kappa = k - r] \qquad (8)$$

с начальным условием

$$L_k^0(x, y, z) = z \delta_{k_0, k} F(x) G(y), \qquad (9)$$

где

$$r_k^t(x, z) = \frac{\partial}{\partial y} L_k^t(x, y, z) \bigg|_{y=0}, \qquad q_k^t(y, z) = \frac{\partial}{\partial x} L_k^t(x, y, z) \bigg|_{x=0},$$

$\delta_{k,r}$ — символ Кронекера.

Введем обозначения

$$\tilde{L}_\theta^s(\lambda, \mu, z) = \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{M}\left[\theta^{l(t)} e^{-\lambda\eta(t) - \mu\xi(t)} z^{d(t)}; \quad \tau_{k_0} > t\right] dt,$$

$$R_\theta^s(\lambda, z) = \sum_{k \ge 0} \theta^k \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st - \lambda x} \, d_x r_k^t(x, z) \, dt,$$

$$Q_\theta^s(\mu, z) = \sum_{k \ge 0} \theta^k \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st - \mu y} \, d_y q_k^t(y, z) \, dt,$$

$$s > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda, \mu \ge 0, \quad |\theta|, |z| \le 1.$$

Переходя в уравнении (8) к преобразованиям Лапласа и производящим функциям и используя начальное условие (9), получаем для введенных функций следующее уравнение:

$$(s - \lambda - \mu) \tilde{L}_\theta^s(\lambda, \mu, z) = z \theta^{k_0} \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\mu) - R_\theta^s(\lambda, z)\left(1 - \tilde{g}(\mu) \, \mathrm{M}[\theta^\kappa]\right) -$$

$$- Q_\theta^s(\mu, z)\left(1 - \frac{z}{\theta} \tilde{f}(\lambda)\right) - \frac{z}{\theta} \tilde{f}(\lambda) Q_\theta^s(\mu, z). \qquad (10)$$

Далее будем предполагать, что для переменных s, λ, μ, выполняется равенство

$$s - \lambda - \mu = 0, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda, \mu \in [0, s]. \qquad (11)$$

Тогда из равенств (10), (11) следует уравнение $(k_0 \overset{\text{df}}{=} k)$

$$z \theta^k \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\mu) = R_\theta^s(\lambda, z)\left(1 - \tilde{g}(\mu) \mathrm{M}[\theta^\kappa]\right) + Q_\theta^s(\mu, z)\left(1 - \frac{z}{\theta} \tilde{f}(\lambda)\right) + \frac{z}{\theta} \tilde{f}(\lambda) Q_0^s(\mu, z). \qquad (12)$$

Полагая в этом равенстве $\theta = z \tilde{f}(\lambda)$, получаем

$$z^{k+1} \mathrm{M}\left[e^{-\lambda \eta_{k+1} - \mu \xi}\right] = R_{z\tilde{f}(\lambda)}^s(\lambda, z)\left(1 - \mathrm{M}[z^\kappa e^{-\mu\xi - \lambda\eta_\kappa}]\right) + Q_0^s(\mu, z). \qquad (13)$$

В силу равенства (11) справедливо факторизационное разложение

$$(1-\mathrm{M}[z^{\kappa}e^{-\lambda\eta_\kappa-\mu\xi}])^{-1} = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[z^{\kappa_n}e^{-\lambda\eta_{\kappa_n}-\mu\xi_n}]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[z^{\kappa_n}e^{-\lambda(\eta_{\kappa_n}-\xi_n)}e^{-s\xi_n};\ \eta_{\kappa_n}>\xi_n]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[z^{\kappa_n}e^{-\mu(\xi_n-\eta_{\kappa_n})}e^{-s\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n>\eta_{\kappa_n}]\right\} = E(\lambda,s,z)\,F(\mu,s,z), \tag{14}$$

$$s>0, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda,\mu\in[0,s].$$

Согласно формуле полной вероятности

$$Q_0^s(\mu,z) = \mathrm{M}[z^{d(\tau_\kappa)}e^{-s\tau_\kappa}e^{-\mu\xi(\tau_\kappa)};\ \tau_\kappa<\infty]. \tag{15}$$

Используя факторизационное разложение (14), из уравнения (13) получаем

$$Q_0^s(\mu,z) = (\mathrm{M}[e^{-\mu\zeta_s^-(z)}])^{-1}z^{k+1}\,\mathrm{M}\left[e^{-\mu(\xi+\zeta_s^-(z)-\eta_{k+1})}e^{-s\eta_{k+1}};\ \xi+\zeta_s^-(z)>\eta_{k+1}\right], \tag{16}$$

$$R^s_{z\tilde f(\lambda)}(\lambda,z) = E(\lambda,s,z)F(0,s,z)z^{k+1}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_{k+1}-\xi-\zeta_s^-(z))}e^{-s(\xi+\zeta_s^-(z))};\ \eta_{k+1}>\xi+\zeta_s^-(z)\right]. \tag{17}$$

Из равенств (15), (16) следует равенство (2) теоремы 1.

Введем обозначения

$$A_\theta(\lambda,\mu,z) = \left\{\left(1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\right)(1-\tilde g(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa])\right\}^{-1}, \qquad |\theta| = 1,$$

$$A(\lambda,\mu,z) = (1-\tilde g(\mu)\,\mathrm{M}[z^\kappa e^{-\lambda\eta_\kappa}])^{-1}.$$

$$a_\theta^0(\lambda,\mu,z) = \sum_{k\ge0}\theta^k\,\mathrm{M}[z^{T_k}e^{-\mu\xi_{\sigma_k}}e^{-\lambda\eta_{T_k}}], \qquad a_\theta(\lambda,\mu,z) = a_\theta^0(\lambda,\mu,z)-1.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$A_\theta(\lambda,\mu,z) = A(\lambda,\mu,z)a_\theta^0(\lambda,\mu,z) + A(\lambda,\mu,z)\frac{\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)}, \quad |\theta| = 1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda,\mu\ge0,$$

$$(1-\tilde g(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa])^{-1} = A(\lambda,\mu,z)\left\{a_\theta^0(\lambda,\mu,z)-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\,a_\theta(\lambda,\mu,z)\right\},$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda,\mu\ge0, \qquad |\theta|,|z|\le1.$$

Доказательство леммы в случае, когда $\eta,\zeta\in N^+$, приведено в [2] и естественным образом переносится на случай, когда $\eta,\ \xi\in R_+$.

Продолжим анализ рассматриваемых уравнений в предположении, что имеет место каноническое начальное условие $X_0^{\neq} \doteq (\kappa-1,\eta,\xi)$ (в начальный момент времени $t=0$ в свободную систему поступает группа требований случайного объема κ). Для дифференциального уравнения (8) получим новое начальное условие

$$L_k^0(x,y,z) = z\,\mathrm{P}[\kappa=k+1]\,F(x)G(y),$$

а уравнение (10) примет вид

$$(s-\lambda-\mu)\,\tilde{L}^s_\theta(\lambda,\mu,z) = \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa] - R^s_\theta(\lambda,z)\big(1-\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa]\big) -$$

$$- Q^s_\theta(\mu,z)\left(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right) - \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)Q^s_0(\mu,z). \tag{18}$$

С учетом нового начального условия и факторизационного разложения (14) равенства (16), (17) принимают вид

$$Q^s_0(\mu,z) = \mathrm{M}[z^d e^{-s\tau}e^{-\xi(\tau)};\ \tau<\infty] = 1-F(\mu,s,z)^{-1};\quad R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z) = E(\lambda,s,z)-1. \tag{19}$$

Равенство (3) следует из первого равенства в (19).

Умножая уравнение (12) на $A_\theta(\lambda,\mu,z)$ (с учетом новых начальных условий), получаем

$$\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]A_\theta(\lambda,\mu,z) = \frac{R^s_\theta(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)}+\frac{Q^s_\theta(\mu,z)}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]}+\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)A_\theta(\lambda,\mu,z)Q^s_0(\mu,z),$$

$$s>0,\quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\in[0,s],\quad |\theta|=1,\quad |z|\le 1. \tag{20}$$

Это равенство — суть равенство рядов Лорана по переменной θ. Приравнивая правильные части рядов Лорана, находящихся в левой и правой частях этого уравнения, получаем

$$\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z) = \frac{R^s_\theta(\lambda,z)-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)}+\frac{Q^s_\theta(\mu,z)}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]}+$$

$$+\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z)Q^s_0(\mu,z),\qquad s>0,\quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\in[0,s],\quad |\theta|\le 1. \tag{21}$$

Умножая уравнение (13) на $A(\lambda,\mu,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z)$, с учетом новых начальных условий находим

$$\big(A(\lambda,\mu,z)-1\big)a^0_\theta(\lambda,\mu,z) = R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z) + Q^s_0(\mu,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z). \tag{22}$$

Вычитая из (21) равенство (22), учитывая второе равенство в утверждении леммы и равенства (19), получаем уравнение

$$a^0_\theta(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z)-\frac{1}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]} = \frac{R^s_\theta(\lambda,z)-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)}+$$

$$+\frac{Q^s_\theta(\mu,z)-Q^s_0(\mu,z)}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]},\qquad s>0,\quad \operatorname{Re}\lambda,\mu\in[0,s],\quad |\theta|,|z|\le 1. \tag{23}$$

Пусть функция $A(x)$, $x\in R$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A(x)|dx<\infty.$$

Введем проекторы для преобразований Лапласа от этих функций:

$$I_\lambda^+\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x}A(x)\,dx\right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}A(x)\,dx, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,$$

$$I_\lambda^-\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x}A(x)\,dx\right] = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda x}A(x)\,dx, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leq 0.$$

Проверяется, что (напомним, что выполняется равенство $s-\lambda-\mu = 0$)

$$I_\lambda^+\left[a_\theta^0(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z) - \frac{1}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]}\right] = E(\lambda,s,z)-1+E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\varphi_k(\lambda,s,z),$$

$$I_\mu^+\left[a_\theta^0(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z) - \frac{1}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]}\right] = E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\psi_k(\mu,s,z) - \frac{\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]}{1-\tilde{g}(\mu)\mathrm{M}[\theta^\kappa]},$$

где

$$\varphi_k(\lambda,s,z) = \mathrm{M}\left[z^{T_k}e^{-\lambda(\zeta_s^+ +\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})}e^{-s\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}\right],$$

$$\psi_k(\mu,s,z) = \mathrm{M}\left[z^{T_k}e^{-\mu(\xi_{\sigma_k}-\zeta_s^+ +\eta_{T_k})}e^{-s(\zeta_s^+ +\eta_{T_k})};\ \xi_{\sigma_k} > \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}\right],$$

$$s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \geq 0, \quad k \in N.$$

Проводя стандартные факторизационные рассуждения (следуя при этом [3, с. 115]), из равенства (23) находим

$$R_\theta^s(\lambda,z) = \left(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right)E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\varphi_k(\lambda,s,z) + E(\lambda,s,z) - 1,$$

$$Q_0^s(\mu,z) = 1 - F^{-1}(\mu,s,z),$$

$$Q_\theta^s(\mu,z) = \left(1-\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right)E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\psi_k(\mu,s,z) - \tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa] + Q_0^s(\mu,z).$$

Подставляя найденные выражения для функций $R_\theta^s(\lambda,z)$, $Q_\theta^s(\mu,z)$, $Q_0^s(\mu,z)$ в уравнение (18), получаем

$$(s-\lambda-\mu)\,\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z) = F^{-1}(\mu,s,z) - E(\lambda,s,z)\left(1-\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right) -$$

$$- \left(1-\tilde{g}(\mu)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right)\left(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\right)E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z)+\psi_k(\mu,s,z)], \tag{24}$$

$$s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \geq 0, \quad |\theta|, |z| \leq 1.$$

Этим равенством определена функция

$$s\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z) = \mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\quad \tau > \nu_s],$$

$$s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \geq 0, \quad |\theta|, |z| \leq 1,$$

и мы получили равенство (4).

Согласно формуле полной вероятности

$$\mathrm{M}[z^{d(t)}\theta^{l(t)}e^{-\lambda\eta(t)}e^{-\mu\xi(t)};\ B_t] = \mathrm{M}[z^{d(t)}\theta^{l(t)}e^{-\lambda\eta(t)}e^{\mu\xi(t)};\quad \tau > t] +$$

$$+ \int_0^t \mathrm{M}[z^{d(\tau)},\ \tau+\varepsilon \in du]\,\mathrm{M}[z^{d(t-u)}\theta^{l(t-u)}e^{-\lambda\eta(t-u)}e^{-\mu\xi(t-u)};\ B_{t-u}],$$

$$\mathrm{M}\left[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)};\ A_t\right] = \mathrm{M}\left[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)};\ \tau<t<\tau+\varepsilon\right] +$$

$$+\int_0^t \mathrm{M}\left[z^{d(\tau)},\ \tau+\varepsilon\in du\right]\mathrm{M}\left[z^{d(t-u)}e^{-\mu\xi(t-u)};\ A_{t-u}\right].$$

Из (3) следует равенство

$$\mathrm{M}\left[z^{d(\tau)}e^{-s(\tau+\varepsilon)};\ \tau<\infty\right] = 1 - F(s,s,z)^{-1}.$$

Поэтому

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ B_{\nu_s}] = s\Big(1-\mathrm{M}[z^{d(\tau)}e^{-s(\tau+\varepsilon)};\ \tau<\infty]\Big)^{-1}\tilde{L}^s_\theta(\lambda,\mu,z) =$$

$$= F(s,s,z)\,\mathrm{M}\left[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\quad \tau>\nu_s\right], \tag{25}$$

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] = sF(s,s,z)\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{M}\left[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)};\ \tau<t<\tau+\varepsilon\right]dt =$$

$$= F(s,s,z)\frac{s}{s-\mu}\left\{F(s,s,z)^{-1}-F(\mu,s,z)^{-1}\right\} = \frac{s}{s-\mu}\left\{1-\frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)}\right\}.$$

Из факторизационного разложения (14) следует равенство

$$F(s,s,z)\,F(0,s,z) = \left(1-\tilde{g}(s)\,\mathrm{M}[\theta^\kappa]\right)^{-1}.$$

Используя это равенство, из (24), (25) получаем формулу (5). Теорема 2 доказана.

Замечание. Если функции распределения $F(x)$, $G(y)$ или начальное распределение процесса $X_t^{\neq}$, $t\ge 0$, не являются абсолютно непрерывными, то частные производные в уравнении (8) существуют в обобщенном смысле [4, с. 253]. Этот факт не является препятствием для применения преобразований Лапласа к уравнению (8) и последующего решения методом, предложенным в настоящей работе.

3. Распределение основных характеристик системы обслуживания $G^\kappa|G|1$. Приведем ряд следствий теоремы 2 в предположении, что система обслуживания начинает эволюцию из канонического начального состояния (в начальный момент времени $t\ge 0$ в свободную систему поступает группа требований случайного объема κ).

Следствие 2. *Пусть $l(t)$ — длина очереди в системе обслуживания $G^\kappa|G|1$ в момент времени $t\ge 0$.*

Тогда

$$\mathrm{P}\left[l(\nu_s)=k;\ \tau>\nu_s\right] = F(s,s)^{-1}\mathrm{P}\left[l(\nu_s)=k;\ B_{\nu_s}\right],\qquad k\in N,$$

$$\mathrm{P}\left[l(\nu_s)=0;\ B_{\nu_s}\right] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)}+\frac{1}{1-\tilde{g}(s)}\{b_1(s)-1\},$$

$$\mathrm{P}\left[l(\nu_s)=k;\ B_{\nu_s}\right] = \frac{1}{1-\tilde{g}(s)}\{\mathrm{P}[\kappa=k]+b_{k+1}(s)-b_k(s)\},\qquad k\in N^+,$$

$$\mathrm{P}[B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)},\qquad \mathrm{P}[A_{\nu_s}] = 1-\frac{F(s,s)}{F(0,s)},$$

где

$$F(\mu,s) = F(\mu,s,1),\qquad E(\lambda,s) = E(\lambda,s,1),$$

$$b_k(s) = a_k(s) - \sum_{r=1}^{k-1} \mathrm{P}[\kappa = r] a_{k-r}(s), \qquad k \in N^+,$$

$$a_k(s) = \mathrm{M}\left[e^{-s\min\{\xi_{\sigma_k}, \zeta_s^+ + \eta_{T_k}\}}\right], \qquad k \in N.$$

Если загрузка системы $\rho = \mathrm{M}[\kappa\eta](\mathrm{M}[\xi])^{-1} < 1$, *то существует*

$$\lim_{t\to\infty} l(t) = l$$

— *длина очереди в системе обслуживания, находящейся в стационарном режиме и*

$$\mathrm{P}[l=0;\ B] = \rho - (\mathrm{M}[\xi])^{-1} b_1, \quad \mathrm{P}[l=k;\ B] = (\mathrm{M}[\xi])^{-1}(b_k - b_{k+1}), \quad k \in N^+,$$

$$\mathrm{P}[A] = 1 - \rho, \quad \mathrm{P}[B] = \rho,$$

где

$$b_k = a_k - \sum_{r=1}^{k-1} \mathrm{P}[\kappa = r] a_{k-r}, \qquad k \in N_+.$$

$$a_k = \mathrm{M}\left[\min\left\{\xi_{\sigma_k},\ \zeta^+ + \eta_{T_k}\right\}\right], \qquad k \in N,$$

$\mathrm{P}[A]$ $(\mathrm{P}[B])$ — *вероятность застать в стационарном режиме систему свободной (занятой).*

Для доказательства следствия в равенстве (6) необходимо положить $z = 1$, $\mu = 0$, а в (4), (5) — $\lambda = \mu = 0$, $z = 1$ и приравнять коэффициенты при θ^k в правой и левой частях полученных равенств.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\kappa \equiv 1$ *и загрузка классической системы обслуживания* $G|G|1$ $\rho = \mathrm{M}[\eta](\mathrm{M}[\xi])^{-1} < 1$.

Тогда

$$\mathrm{P}[l=0;\ B] = \rho - (\mathrm{M}[\xi])^{-1} b_1, \quad \mathrm{P}[l=k;\ B] = (\mathrm{M}[\xi])^{-1}(b_k - b_{k+1}),$$

$$\mathrm{P}[A] = 1 - \rho, \quad \mathrm{P}[B] = \rho,$$

где

$$b_k = a_k - a_{k-1}, \qquad k \in N_+.$$

$$a_k = \mathrm{M}\left[\min\left\{\xi_k,\ \zeta^+\right\}\right], \qquad k \in N,$$

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} \mathrm{M}\left[\left(e^{-\lambda(\eta_n - \xi_n)} - 1;\ \eta_n > \xi_n\right)\right]\right\}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0.$$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что при $\kappa \equiv 1$

$$\kappa_n = n, \quad n \in N, \quad \sigma_k = k, \quad T_k = 0, \quad k \in N.$$

***Следствие* 4.** *Пусть* $d(t)$ — *число требований, обслуженных системой* $G^\kappa|G|1$ *на интервале* $[0, t]$, *включая и требование, находящееся в момент времени* t *на обслуживающем приборе. Тогда*

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ B_{\nu_s}] = z \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} \frac{1-\tilde{f}(s)}{1-z\tilde{f}(s)}, \qquad \mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] = 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)},$$

$$\mathrm{M}[z^{d(\nu_s)}] = 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} \frac{1-z}{1-z\tilde{f}(s)}, \qquad \mathrm{M}[z^{d(\nu_s)};\ \tau > \nu_s] = zF(0,s,z)^{-1} \frac{1-\tilde{f}(s)}{1-z\tilde{f}(s)},$$

$$\mathrm{M}[z^{d(\tau)} e^{-s\tau};\ \tau < \infty] = 1 - F(0,s,z)^{-1}. \tag{26}$$

Для доказательства следствия в равенствах (4) – (6) необходимо положить $\lambda = \mu = 0,\ \theta = 1$.

Отметим, что равенства (26) задают распределения процесса $d(t),\ t \geq 0$, который описывает выходящий поток требований в системе обслуживания $G^{\kappa}|G|1$.

***Следствие* 5.** *Пусть* $h(t)$ *— число требований, поступивших в систему обслуживания* $G^{\kappa}|G|1$ *на интервале* $[0, t]$.

Тогда

$$\mathrm{M}[z^{h(\nu_s)};\, B_{\nu_s}] \;=\; \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} - \frac{1-\mathrm{M}[z^{\kappa}]}{1-\tilde{g}(s)\,\mathrm{M}[z^{\kappa}]}, \qquad \mathrm{M}[z^{h(\nu_s)};\, A_{\nu_s}] \;=\; 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)},$$

$$\mathrm{M}[z^{h(\nu_s)}] \;=\; \mathrm{M}[z^{\kappa}]\frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{g}(s)\,\mathrm{M}[z^{\kappa}]}, \qquad \mathrm{M}[z^{h(\tau)}e^{-s\tau};\, \tau < \infty] \;=\; 1 - F(0,s,z)^{-1},$$

$$\mathrm{M}[z^{h(\nu_s)};\, \tau > \nu_s] \;=\; F(0,s,z)^{-1} - F(s,s,z)^{-1}\frac{1-\mathrm{M}[z^{\kappa}]}{1-\tilde{g}(s)\,\mathrm{M}[z^{\kappa}]}. \tag{27}$$

Для доказательства следствия в равенствах (4) – (6) необходимо положить $\lambda = \mu = 0,\ \theta = z$.

Равенства (27) задают распределения процесса $h(t),\ t \geq 0$, который описывает входящий поток требований в системе обслуживания $G^{\kappa}|G|1$.

Предположим, что в момент времени $t \geq 0$ в систему обслуживания поступает группа требований. Через $w(t)$ обозначим длительность времени ожидания начала обслуживания первого требования из этой группы. Случайную величину $w(t)$ называют также виртуальным временем ожидания.

***Следствие* 6.** *Пусть* $w(t)$ *— виртуальное время ожидания начала обслуживания для первого требования в группе, поступившей в момент времени* $t \geq 0$ *в систему обслуживания* $G^{\kappa}|G|1$ *с каноническим начальным условием.*

Тогда

$$\mathrm{P}[w(\nu_s)=0] \;=\; 1 - \frac{F(s,s)}{F(0,s)},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda w(\nu_s)};\, B_{\nu_s}] \;=\; \frac{s}{s-\lambda}\left\{\frac{F(s,s)}{F(0,s)} - \mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta_s^+}]\frac{1-\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_\kappa}]}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda w(\nu_s)}] \;=\; 1 + \frac{\lambda}{s-\lambda}\frac{F(s,s)}{F(0,s)} - \frac{s}{s-\lambda}\mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta_s^+}]\frac{1-\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta_\kappa}]}{1-\tilde{g}(s)}, \quad s > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0.$$

Если загрузка системы $\rho = \mathrm{M}[\eta\kappa]\left(\mathrm{M}[\xi]\right)^{-1} < 1$, *то существует*

$$\lim_{t\to\infty} w(t) \;=\; w$$

— виртуальное время ожидания в системе обслуживания, находящейся в стационарном режиме, и

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda w}] \;=\; 1 - \rho + \rho\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\zeta^+ + \hat{\eta}_\kappa)}\right], \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0,$$

где

$$\zeta^+ \;\doteq\; \sup_{n\geq 0}\left\{\eta_{\kappa n} - \xi_n\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda\zeta^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}\left[e^{-\lambda(\eta_{\kappa_n}-\xi_n)}-1;\quad \eta_{\kappa_n}>\xi_n\right]\right\}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,$$

$$\mathrm{P}[\hat{\eta}_\kappa < x] = \frac{1}{\mathrm{M}[\eta\kappa]}\int_0^x \mathrm{P}[\eta_\kappa > u]\,du.$$

Для доказательства следствия в равенствах (5), (6) необходимо положить $\mu = 0$, $z = 1$, $\theta = \tilde{f}(\lambda)$. Отметим, что виртуальное время ожидания для системы $G|G|1$ изучалось в [5].

***Следствие* 7.** *Пусть* $\xi(t)$ *— время, через которое после момента* $t \geq 0$ *в систему обслуживания поступит очередная группа требований.*

Тогда

$$\mathrm{M}[e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ \tau > \nu_s] = \frac{s}{s-\mu}\left\{F(\mu, s)^{-1} - F(s, s)^{-1}\frac{1-\tilde{g}(\mu)}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ B_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\mu}\left\{\frac{F(s,s)}{F(\mu,s)} - \frac{1-\tilde{g}(\mu)}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\mu\xi(\nu_s)};\ A_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\mu}\left\{1 - \frac{F(s,s)}{F(\mu,s)}\right\}, \quad \mathrm{M}[e^{-\mu\xi(\nu_s)}] = \frac{s}{s-\mu}\frac{\tilde{g}(\mu)-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{g}(s)}.$$

Если загрузка системы $\rho < 1$, *то существует* $\lim_{t\to\infty}\xi(t) = \xi^*$ *— время, через которое поступит группа требований в систему, находящуюся в стационарном режиме и*

$$\xi^* \doteq \hat{\xi},\ \mathrm{M}[e^{-\mu\xi^*};\ B] = \mathrm{M}[e^{-\mu\hat{\xi}}] - (1-\rho)\mathrm{M}[e^{-\mu\hat{\varepsilon}}],$$

$$\mathrm{M}[e^{-\mu\xi^*};\ A] = (1-\rho)\mathrm{M}[e^{-\mu\hat{\varepsilon}}],$$

где

$$\mathrm{P}[\hat{\varepsilon} < y] = \frac{1}{\mathrm{M}[\varepsilon]}\int_0^y \mathrm{P}[\varepsilon > u]\,du, \quad \mathrm{M}[e^{-\mu\varepsilon}] = 1 - F(\mu, 0)^{-1},$$

$$\mathrm{P}[\hat{\xi} < y] = \frac{1}{\mathrm{M}[\xi]}\int_0^y \mathrm{P}[\xi > u]\,du.$$

Для доказательства следствия в равенствах (4) – (6) необходимо положить $\theta = z = 1$, $\lambda = 0$.

***Следствие* 8.** *Пусть* $\eta(t)$ *— время, через которое закончится обслуживание требования, находящегося в момент времени* $t \geq 0$ *на обслуживающем приборе.*

Тогда

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta(\nu_s)};\ \tau > \nu_s] = \frac{s}{s-\lambda}F(0, s)^{-1}\frac{\tilde{f}(\lambda)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)},$$

$$\mathrm{M}[e^{-\lambda\eta(\nu_s)};\ B_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\lambda}\frac{F(s,s)}{F(0,s)}\frac{\tilde{f}(\lambda)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}.$$

Если загрузка системы $\rho < 1$, *то существует* $\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \eta^*$ *— время, через которое закончится обслуживание требования в системе, находящейся в стационарном режиме и*

$$M[e^{-\lambda\eta^*}; B] = \rho M[e^{-\lambda\hat{\eta}}],$$

где

$$P[\hat{\eta} < x] = \frac{1}{M[\eta]}\int_0^x P[\eta > u]\,du.$$

Для доказательства следствия в равенствах (4), (5) необходимо положить $\theta = z = 1,\ \mu = 0$.

Следствие 9. *Пусть* $\varepsilon(t)$ *— суммарное время простоя системы обслуживания* $G^{\kappa}|G|1$ *на интервале* $[0, t]$.
Тогда

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}\right] = \frac{s}{s+\mu}\left\{1-\frac{F(s+\mu, s)}{F(0, s)}\right\}, \qquad M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}\right] = \frac{F(s+\mu, s)}{F(0, s)},$$

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}\right] = \frac{s}{s+\mu} + \frac{\mu}{s+\mu}\frac{F(s+\mu, s)}{F(0, s)}, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\mu \ge 0.$$

При $M[\xi] < M[\eta\kappa]$ *существует* $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \varepsilon^*$ *— суммарное время простоя системы обслуживания на бесконечном интервале и*

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon^*}\right] = \frac{F(\mu, 0)}{F(0, 0)} \implies \varepsilon^* \doteq \zeta^- = \sup_{n\ge 0}\{\xi_n - \eta_{\kappa_n}\},$$

где

$$M\left[e^{-\mu\zeta^-}\right] = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M\left[e^{-\mu(\xi_n-\eta_{\kappa_n})}-1;\ \xi_n > \eta_{\kappa_n}\right]\right\}, \quad \operatorname{Re}\mu \ge 0.$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(t)}; B_t\right] = P[\tau > t] + \int_0^t M\left[e^{-\mu\varepsilon},\ \tau+\varepsilon \in du\right] M\left[e^{-\mu\varepsilon(t-u)}; B_{t-u}\right],$$

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(t)}; A_t\right] = M\left[e^{-\mu(t-\tau)}; \tau<t<\tau+\varepsilon\right] + \int_0^t M\left[e^{-\mu\varepsilon},\ \tau+\varepsilon \in du\right] M\left[e^{-\mu\varepsilon(t-u)}; A_{t-u}\right].$$

Но согласно (3)

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}e^{-s(t+\varepsilon)};\ \tau < \infty\right] = 1 - F(s+\mu, s)^{-1}.$$

Поэтому

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}\right] = sF(s+\mu, s)\int_0^\infty e^{-st}P[\tau > t]\,dt = \frac{F(s+\mu, s)}{F(0, s)},$$

$$M\left[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}\right] = sF(s+\mu, s)\int_0^\infty e^{-st}M\left[e^{-\mu(t-\tau)};\ \tau < t < \tau+\varepsilon\right]dt =$$

$$= \frac{s}{s+\mu}F(s+\mu, s)\left\{F(s+\mu, s)^{-1} - F(0, s)^{-1}\right\}.$$

Для классической системы обслуживания $G|G|1$, которая является частным случаем системы $G^{\kappa}|G|1$ при $\kappa \equiv 1$, формулировки теорем и следствий упрощаются, так как в этом случае

$$\kappa_n = n, \quad n \in N, \quad \sigma_k = k, \quad T_k = 0, \quad k \in N.$$

В качестве примера таких упрощений приведено следствие 3.

Отметим основные составляющие разработанного нами метода решения уравнений, возникающих при исследовании систем обслуживания общего вида [6 – 8] и граничных функционалов для разности процессов восстановления [2, 9. 10]:

1) в качестве математической модели используется трехкомпонентный марковский процесс с двумя линейчатыми компонентами (в данной работе — с двумя убывающими линейчатыми компонентами);

2) применяются замены переменных

$$s - \lambda - \mu = 0, \quad s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \mu \in [0, s], \quad \theta = z\tilde{f}(\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \quad z \leq 1,$$

при использовании которых уравнения первоначально упрощаются и ядро факторизации появляется автоматически;

3) основное значение при решении уравнений имеет лемма

$$A_\theta(\lambda, \mu, z) = A(\lambda, \mu, z) \sum_{k \geq 0} \theta^k M\left[z^{T_k} e^{-\mu\xi_{\sigma_k}} e^{-\lambda\eta_{T_k}}\right] + A(\lambda, \mu, z) \frac{z\theta^{-1}\tilde{f}(\lambda)}{1 - z\theta^{-1}\tilde{f}(\lambda)},$$

которая позволяет эффективно решать уравнения и получать распределения искомых функционалов в явном виде.

1. *Прабху Н.* Стохастические процессы теории запасов. – М.: Мир, 1984. – 184 с.
2. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О распределении максимума разности независимых процессов восстановления с дискретным временем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1426 – 1432.
3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
4. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
5. *Lindley D. V.* The theory of queues with a single server // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1952. – **48**, № 2. – P. 277 – 287.
6. *Ежов И. И.* О распределении длины очереди в классической системе $G|G|1$ с дискретным временем // Докл. РАН. – 1993. – **332**, № 4. – С. 408 – 410.
7. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О распределении числа требований в системе обслуживания $D_\eta \left| D_\xi^\kappa \right| 1$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1075 – 1081.
8. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* Граничные функционалы для разности неординарных процессов восстановления с дискретным временем // Там же. – № 10. – С. 1345 – 1356.
9. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* Граничные функционалы для полунепрерывной разности процессов восстановления с дискретным временем // Там же. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1710 – 1713.
10. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О производящей функции времени достижения границы полунепрерывной разностью независимых процессов восстановления с дискретным временем // Там же. – 2000. – **52**, № 4. – С. 553 – 561.

Получено 24.04.2000,
после доработки — 05.03.2001