УДК 517.983

В. А. Мозель
(Упр. по вопр. чрезв. ситуаций и граждан. защиты населения Одес. облгосадминистрации),
В. А. Чернецкий (Одес. ун-т)

АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ БЕРГМАНА С АВТОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ

We study the algebra of operators with the Bergman kernel which is extended by isometric operators of a weighted shift. Coefficients of the algebra are assumed to be automorphic with respect to a cyclic parabolic group of linear-fractional transformations of a unit disk and to be continuous on the Riemann surface of the group. By using an isometric transformation, we obtain a quasiautomorphic matrix operator on the Riemann surface with properties similar to properties of the Bergman operator. This enables us to construct the algebra of symbols and establish an effective criterion of the Fredholm properties of operators of the algebra considered.

Вивчається алгебра операторів з ядром Бергмана, розширена ізометричними операторами зваженого зсуву. Коефіцієнти алгебри вважаються автоморфними відносно циклічної параболічної групи дробно-лінійних перетворень одиничного круга і неперервними на рімановій поверхні групи. За допомогою ізометричного перетворення одержано квазіавтоморфний матричний оператор на рімановій поверхні із властивостями, аналогічними властивостям оператора Бергмана. Це дає можливість побудувати алгебру символів, дати ефективний критерій фредгольмовості та обчислити індекс операторів розглянутої алгебри.

Введение. Пусть D — единичный круг комплексной плоскости, G — дискретная циклическая параболическая группа дробно-линейных преобразований круга D. В пространстве $L_p(D)$ введем оператор с ядром Бергмана

$$(Kf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)\,dD_\zeta}{(1-\bar{\zeta}z)^2}.$$

В работе изучается алгебра $\mathfrak{R}_1 = \operatorname{alg}(\aleph, W_G)$, являющаяся расширением алгебры $\aleph$ операторов вида

$$A = a(z)I + b(z)K + L$$

с помощью изометрических операторов взвешенного сдвига

$$(Wf)(z) = |g'(z)|^{2/p} f(g(z)),$$

где L — компактный оператор, коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ являются автоморфными, удовлетворяющими условию $a(g(z)) = a(z)$, $b(g(z)) = b(z)$, функциями, непрерывными на римановой поверхности $\Delta = D/G$, $g \in G$.

Операторы алгебры $\mathfrak{R}_1$ имеют вид

$$B = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (a_j I + b_j K) W^j + L. \tag{1}$$

В алгебре $\mathfrak{R}_1$ вводится норма согласно правилу

$$|B|_1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j I + b_j K| < \infty \tag{2}$$

($|\cdot|$ — существенная норма оператора).

Операторы с ядром Бергмана изучались многими авторами [1, 2]. Хорошо разработана теория алгебр одномерных сингулярных интегральных операторов с различными группами сдвигов [3, 4]. Теория функциональных операторов приведена в монографии [4]. Алгебры же двумерных сингулярных интегральных операторов со сдвигами практически не изучались. В этой связи упомянем работы [5, 6].

В предлагаемой работе исследуемые операторы сводятся к квазиавтоморфному матричному оператору, свойства которого аналогичны свойствам оператора с ядром Бергмана. Это дает возможность построить алгебру символов, получить эффективный критерий нетеровости и вычислить индекс операторов описываемой алгебры.

1. Вспомогательные сведения. Перечислим свойства керноператора с ядром Бергмана [1]:

1) $K^2 = K$;

2) оператор K локально эквивалентен компактному во внутренних точках круга D;

3) оператор $KaI - aK$ компактен для любой функции $a \in C(\overline{D})$;

4) $K = I - S\overline{S}$, где

$$(S\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\varphi(y)\,dD_y}{(y-x)^2}, \qquad (\overline{S}\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\varphi(y)\,dD_y}{(\overline{y}-\overline{x})^2}.$$

Очевидна следующая лемма.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$W_g K W_g^{-1} = K + L,$$

где L — компактный оператор, $g \in G$.

Обозначим через D_0 фундаментальную область группы G и введем преобразование $R : L_p(D) \to \bigoplus\limits_{j=-\infty}^{+\infty} L_p(D_0)$ согласно правилу

$$(Rf)(z) = \left\{(W^j f)(z)\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \quad z \in D_0.$$

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$RKR^{-1} = K_\Delta,$$

где $K_\Delta = (P_0 W^k K W^{-j} P_0)_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ — квазиавтоморфный матричный оператор на римановой поверхности Δ, P_0 — проектор пространства $L_p(D_0)$, оператор умножения на характеристическую функцию фундаментальной области D_0.

Доказательство. Имеем $L_p(D) = \bigoplus\limits_{j=-\infty}^{+\infty} L_p(D_j)$ (через D_j обозначен j-й экземпляр фундаментальной области),

$$R = \operatorname{diag}\left\{P_0 W^k\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \quad R^{-1} = \operatorname{diag}\left\{W^{-j} P_0\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \quad K = (P_k K P_j)_{j,k=-\infty}^{+\infty},$$

P_k — проектор пространства $L_p(D_k)$, оператор умножения на характеристическую функцию области D_k,

$$W^k P_k = P_0 W^k, \quad P_j W^{-j} = W^{-j} P_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $RKR^{-1} = (P_0 W^k K W^{-j} P_0)_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ и в силу равенства $\|RKR^{-1}\| = \|K\|$ ряды $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_0 W^k K W^{-j} P_0$ являются сходящимися по операторной норме в совокупности по всем целым k. Лемма доказана.

Очевидна следующая лемма.

Лемма 3. *Имеют место свойства матричного оператора RKR^{-1}:*

1) $K_\Delta^2 = K_\Delta$;

2) $\hat{K}_\Delta^2 = \hat{K}_\Delta$;

3) $(\hat{I}-\hat{K}_\Delta)^2 = \hat{I}-\hat{K}_\Delta$;

4) $(I-K_\Delta)^2 = I-K_\Delta$;

5) $(\hat{I}-\hat{K}_\Delta)\hat{K}_\Delta = \hat{K}_\Delta(\hat{I}-\hat{K}_\Delta) = \hat{0}$;

6) $(I-K_\Delta)K_\Delta = K_\Delta(I-K_\Delta) = 0$;

7) *матричный оператор* K_Δ *локально эквивалентен нулю (компактному матричному оператору) в точках внутри римановой поверхности.*

Здесь через $\hat{C}$ обозначен класс смежности оператора $C \in \aleph$ в алгебре Калкина $\hat{\aleph} = \aleph / \Im$, $\Im$ — идеал компактных операторов.

С помощью леммы 2 как следствие устанавливается следующая лемма.

Лемма 4. *Имеют место свойства*:

i) $P_{G(U_\varepsilon)}K \in \Im(D)$, $\Im(D)$ — *идеал компактных в* $L_p(D)$ *операторов,* U_ε — *окрестность в фундаментальной области*;

ii) *оператор* $KaI - aK$ *компактен для любой автоморфной функции* $a(t)$, *непрерывной на римановой поверхности* Δ.

При доказательстве утверждения i) используется следующее свойство керноператора: оператор умножения cK компактен в пространстве $L_p(D)$, если функция $c(z) \equiv 0$, $z \in \Gamma = \partial D$ [5], а при доказательстве утверждения ii) — равенство $RaR^{-1} = \operatorname{diag}\{a\}$, если a — автоморфная функция.

Из лемм 2–4 следует, что компактом максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{R}$ является риманова поверхность Δ.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$RW^kR^{-1} = (\delta_{j,j+k})_{j=-\infty}^{+\infty}$$

(δ — *символ Кронекера*).

Доказательство. Имеем

$$(R\varphi)(t) = \left\{(W^j\varphi)(t)\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \left\{\left|(g^j)'(t)\right|^{2/p}\varphi(g^j(t))\right\}_{j=-\infty}^{+\infty},$$

$$(R^{-1}\psi)(t) = \left\{\left|(g^{-j})'(t)\right|^{2/p}\psi_j(g^{-j}(t)),\ t \in D_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty},$$

$$(W^kR^{-1}\psi)(t) = \left\{\left|(g^k)'(t)\right|^{2/p}\left|(g^{-j})'(g^k(t))\right|^{2/p}\psi_j(g^{-j+k}(t)),\ t \in D_{j-k}\right\}_{j-k=-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \left\{\left|(g^{k-j})'(t)\right|^{2/p}\psi_j(g^{-j+k}(t)),\ t \in D_{j-k}\right\}_{j-k=-\infty}^{+\infty},$$

$$(RW^kR^{-1}\psi)(t) = \left\{\left|(g^{j-k})'(t)\right|^{2/p}\left|(g^{k-j})'(g^{j-k}(t))\right|^{2/p}\psi_j(t),\ t \in D_0\right\}_{j-k=-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \left\{\psi_j(t)\right\}_{j-k=-\infty}^{+\infty},$$

т. е. элемент ψ_j имеет номер $j-k$. Легко видеть, что это эквивалентно действию матрицы $(\delta_{j,j+k})(\psi_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$. Лемма доказана.

2. Нетеровость. Пусть G — циклическая группа, порожденная параболическим преобразованием с одной неподвижной и предельной точкой z_0 всех сдвигов, лежащей на границе единичного круга. Отождествляя эквивалентные точки D, получаем риманову поверхность Δ, которая топологически эквивалентна конусу, граница которого состоит из одной компоненты [7, 8].

С помощью преобразования $R(\cdot)R^{-1}$ оператор B сводится к эквивалентному в смысле нетеровости квазиавтоморфному матричному оператору с матричными коэффициентами, свойства которого аналогичны свойствам оператора Бергмана:

$$RBR^{-1} = A(x)I + B(x)K_\Delta + L = A(x)(I-K_\Delta) + C(x)K_\Delta + L,$$

где $A(x)$, $B(x)$ — бесконечные теплицевы матрицы-функции вида

$$A(x) = (a_{j-i}(x))_{i,j=-\infty}^{+\infty}, \quad B(x) = (b_{j-i}(x))_{i,j=-\infty}^{+\infty},$$

$$C(x) = A(x) + B(x),\ L \text{ — компактная операторная матрица.}$$

Символом оператора B назовем его образ при сквозном гомоморфизме

$$\mathfrak{R} \to \hat{\mathfrak{R}} \to \pi'(\hat{\mathfrak{R}}),$$

$$B \to \hat{B} \to \pi'(\hat{B}),$$

где

$$\pi'(\hat{B}) = \left\{\pi'_t(\hat{B}) : t \in \Delta\right\}$$

и

$$\pi'(\hat{B}) = \begin{cases} A(t), & t \in \Delta; \\ C(t), & t \in \partial\Delta \cup \{z_0\}. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что в точке $t \in \partial\Delta \cup \{z_0\}$ символом оператора B является пара матриц-функций $(A(t),\ C(t))$.

В алгебре символов $\pi'(\hat{\mathfrak{R}})$ норма определяется равенством

$$\left\|\pi'(\hat{B})\right\|_1 = \max\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in\Delta} |a_j(t)|,\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in\partial\Delta\cup\{z_0\}} |c_j(t)|\right). \tag{4}$$

Согласно результату работы [9], символьное отображение алгебры $\hat{\aleph}$ является изометрическим изоморфизмом. Отсюда легко вывести, что отображение (3) с нормой (4) является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. Таким образом, оператор B нетеров в $L_p(D)$ тогда и только тогда, когда обратима матрица вида (3). При этом $\left\|\pi'(\hat{B}^{-1})\right\|_1 < \infty$.

Действительно, согласно [10], это эквивалентно тому, что обратима пара функций

$$A(t,\zeta) \neq 0, \quad t \in \Delta, \quad \zeta \in S^1, \qquad C(t,\zeta) \neq 0, \quad t \in \partial\Delta \cup \{z_0\}, \quad \zeta \in S^1, \tag{5}$$

где

$$A(t,\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j(t)\zeta^j, \qquad C(t,\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(t)\zeta^j,$$

и согласно (4) ряды в (5) являются абсолютно сходящимися. Тогда, по известной теореме Винера о делении на абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, [11, с. 231], гл. III, § 11, п. 2, пример 1), обратные функции $1/A(t,\zeta)$, $1/C(t,\zeta)$ являются, в силу результата Бохнера и Филлипса [12], абсолютно и равномерно (по t) сходящимися рядами Фурье.

По функциям $1/A(t,\zeta)$, $1/C(t,\zeta)$ восстанавливается регуляризатор, также принадлежащий алгебре $\mathfrak{R}_1$.

3. Индекс. Вычислим индекс нетерового оператора B. Воспользуемся формулой Атьи – Зингера [13]:

$$\operatorname{Ind} A = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{S(M)} \operatorname{Sp}(\sigma^{-1} d\sigma)^{2n-1},$$

где M — k-мерное многообразие, $n = [(k+1)/2]$ (т. е. $k = 2n$ или $k = 2n-1$), $S(M)$ — расслоение кокасательного расслоения $T(M)$ на единичные сферы (т. е. каноническое сечение многообразия M), Sp — след матрицы, σ — символ эллиптического оператора A.

Введем еще одно отображение

$$\mu : \pi'(\hat{\mathfrak{R}}_1) \to \mu(\hat{\mathfrak{R}}_1)$$

по правилу

$$\mu : A(t) \to A(t, \zeta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j(t)\zeta^j,$$

$$\mu : C(t) \to C(t, \zeta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(t)\zeta^j;$$

в алгебре $\mu(\hat{\mathfrak{R}}_1)$ введена норма

$$\| \mu(A(t), C(t)) \| = \| (A(t), C(t)) \|_1 .$$

Пара функций $(A(t, \zeta), C(t, \zeta))$, согласно результатам [10], является преобразованием Гельфанда алгебры $\pi'(\hat{\mathfrak{R}}_1)$. Очевидно, что отображение μ является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. Поэтому символом оператора B наряду с (3) будем считать пару функций

$$(A(t, \zeta),\ t \in \Delta,\ \zeta \in S^1;\ \ C(t, \zeta),\ t \in \partial\Delta \cup \{z_0\},\ \zeta \in S^1).$$

Имеем

$$\sigma = \begin{cases} A(t,\zeta), & t \in \Delta,\ \zeta \in S^1; \\ A(t,\zeta) + B(t,\zeta), & t \in \partial\Delta \cup \{z_0\},\ \zeta \in S^1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} A(t,\zeta) + \frac{1}{2}B(t,\zeta) - \frac{1}{2}B(t,\zeta), & t \in \Delta,\ \zeta \in S^1; \\ A(t,\zeta) + \frac{1}{2}B(t,\zeta) + \frac{1}{2}B(t,\zeta), & t \in \partial\Delta \cup \{z_0\},\ \zeta \in S^1, \end{cases} =$$

$$= \left\{ A(t,\zeta) + \frac{1}{2}B(t,\zeta) - \xi \cdot \frac{1}{2}B(t,\zeta), \quad \begin{array}{ll} \xi = +1, & t \in \Delta,\ \zeta \in S^1; \\ \xi = -1, & t \in \partial\Delta \cup \{z_0\},\ \zeta \in S^1. \end{array} \right.$$

Многообразие M в данном случае — риманова поверхность Δ. Сечение $S(M)$ состоит из двух экземпляров топологической границы римановой поверхности $\partial\Delta$, соответствующих точкам $\xi = +1$ и $\xi = -1$. Итак, $S(M) = \partial\Delta \times S^0$. Размерность $k = 2n = 2$, $n = 1$. Тогда

$$\mathrm{Ind}\, B = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\partial\Delta \times S^0} \mathrm{Sp}\, \sigma^{-1} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} d\xi \int_{\partial\Delta} \mathrm{Sp}\, \sigma^{-1} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \mathrm{Sp}\, \sigma^{-1} d\sigma \Big|_{\xi=+1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \mathrm{Sp}\, \sigma^{-1} d\sigma \Big|_{\xi=-1}.$$

Очевидно, $\mathrm{Sp}\, \sigma^{-1} d\sigma = \dfrac{d\sigma(t,\zeta)}{\sigma(t,\zeta)}$. Теперь

$$\mathrm{Ind}\, B = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{dA(z,\zeta)}{A(z,\zeta)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{dC(z,\zeta)}{C(z,\zeta)}.$$

Покажем, что первый из интегралов равен нулю. Действительно, оператор B нетеров, следовательно, его символ отличен от нуля всюду в $\Delta \times S^1$. Тогда матрица $A(z)$ невырождена всюду в Δ, поэтому символ $A(z, \zeta)$ является отличной от нуля непрерывной функцией всюду в Δ. Имеем

$$\operatorname{Ind} B = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{dC(z,\zeta)}{C(z,\zeta)} = -\frac{i}{2\pi i}\{\arg C(z,\zeta)\}_{z\in\partial\Delta} = -\frac{1}{2\pi}\{\arg C(z,\zeta)\}_{z\in\partial\Delta}. \quad (6)$$

Итак, получена следующая теорема.

Теорема. *Символьное отображение* $\pi' : \hat{\mathfrak{R}}_1 \to \pi'(\hat{\mathfrak{R}}_1)$, *введенное формулой* (3) *с нормой* (4), *является изометрическим изоморфизмом алгебры* $\hat{\mathfrak{R}}_1 = \mathfrak{R}_1 / \mathfrak{F}$ *на алгебру* $\pi'(\hat{\mathfrak{R}}_1)$. *Оператор* B *алгебры* $\mathfrak{R}_1$ *нетеров в пространстве* $L_p(D)$, $p > 1$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (5). *При этом левый регуляризатор является правым (двусторонним) и входит в алгебру* $\mathfrak{R}_1$.

Индекс нетерового оператора B *алгебры* $\mathfrak{R}_1$ *подсчитывается по формуле* (6).

4. Вычисление регуляризатора. Обозначим через $a_{j,-1}(t)$ и $c_{j,-1}(t)$ коэффициенты Фурье соответственно функций $1/A(t, \zeta)$ и $1/C(t, \zeta)$. Матрицы

$$A^{-1}(t) = (a_{j-i,-1}(t))_{i,j\in Z}, \qquad C^{-1}(t) = (c_{j-i,-1}(t))_{i,j\in Z}$$

являются обратными матрицами к матрицам $A(t)$ и $C(t)$. Обозначим через $c_j'(x)$ непрерывные на римановой поверхности функции, совпадающие с функциями $c_{j,-1}(x)$ на множестве $\partial\Delta \cup \{z_0\}$. Введем обозначение $b_j'(x) = c_j'(x) - a_{j,-1}(x)$. Из лемм 2 – 5 следует, что оператор

$$B' = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (a_{j,-1}(x)I + b_j'(x)K)W^j$$

является регуляризатором оператора B.

1. *Джураев А. Д.* Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
2. *Василевский Н. Л.* Многомерные сингулярные интегральные операторы с разрывными классическими символами. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1985. – 297 с.
3. *Карлович Ю. И.* Алгебры операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1990. – 353 с.
4. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. – Минск: Университетское, 1988. – 212 с.
5. *Джангибеков Г.* Об алгебре, порожденной поликернооператорами со сдвигом // Докл. АН Тадж ССР. – 1991. – **34**, № 7. – С. 399–403.
6. *Duduchava R., Saginashvili A., Shargorodsky E.* On two-dimensional singular integral operators with Carleman shift // J. Operator Theory. – 1997. – **37**. – P. 263–279.
7. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
8. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 344 с.
9. *Крупник Н. Я.* Точная константа в теореме И. Б. Симоненко об огибающей семейства операторов локального типа // Функцион. анализ и его прил. – 1986. – **20**, вып. 2. – С. 70–72.
10. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнение в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
11. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
12. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansion for noncommutative normed rings // Ann. Math. – 1942. – **43**, № 2. – P. 409–418.
13. *Федосов Б. В.* Об индексе эллиптической системы на многообразии // Функцион. анализ и его прил. – 1970. – **4**, вып. 4. – С. 57–67.

Получено 27.12.99,
после доработки — 03.01.2001