УДК 517.972.9

В. В. Нестеренко (Объединен. ин-т ядерн. исслед., Дубна, Россия)

ФОРМАЛИЗМ ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ *

We generalize the Ostrogradskii method of construction of the Hamiltonian description for nondegenerate (regular) variational problem of an arbitrary order to the case of degenerate (singular) Lagrangians. The Lagrangians of just this sort are of the most interest in the contemporary theory of elementary particles. For simplicity of relations, we consider the Hamiltonization of a variational problem generated by a singular second order Lagrangian. We derive the equations of motion in the phase space by generalizing the the Ostrogradskii method. We find the complete set of relations in the theory.

Метод побудови гамільтонова опису для невиродженої (регулярної) варіаційної задачі довільного порядку, запропонований М. В. Остроградським, узагальнюється на випадок вироджених (сингулярних) лагранжіанів. Саме такі лагранжіани становлять найбільший інтерес для сучасної теорії елементарних частинок. Для спрощення формул розглядається гамільтонізація варіаційної задачі, заданої сингулярним лагранжіаном другого порядку. Рівняння руху в фазовому просторі виводяться шляхом узагальнення методу М. В. Остроградського. Знайдено повний набір зв'язків у теорії.

1. Введение. Одной из математических загадок современной теоретической физики является тот факт, что все фундаментальные физические теории описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Это касается электромагнитного поля Максвелла, неабелевых калибровочных полей, взаимодействующих со спинорными и скалярными полями материи, т. е. всего того, что входит в так называемую Стандартную Модель современной теории элементарных частиц. Соответствующие лагранжианы содержат производные полевых функций не выше первого порядка. Вариационная формулировка таких теорий была дана еще Лагранжем в его „Аналитической механике". В теоретической физике чрезвычайно полезным оказалось гамильтоново описание этой задачи (для перехода к квантовому описанию, при исследовании общих проблем статистической механики).

Однако в процессе поиска новых теорий физикам-теоретикам приходится рассматривать динамические модели, описываемые уравнениями не второго, а более высокого порядка. Например, рассматриваются калибровочные теории с высшими производными [1, 2], различные варианты гравитационных теорий с квадратичными и более высокого порядка по кривизне членами [3], модели точечных частиц с действием, зависящим от кривизны и кручения мировой траектории [4, 5], и струнные модели с высшими производными [6].

С математической точки зрения вариационные задачи с высшими производными формально ничем не выделены. Вполне правомерно рассматривать лагранжевы функции, зависящие от обобщенных координат и их производных по времени до сколь угодно большого (но конечного) порядка. Здесь естественно возникает задача гамильтонизации соответствующих уравнений движения и их интегрирования. Именно эта проблема и была впервые решена выдающимся математиком XIX столетия Михаилом Васильевичем Остроградским, научное наследие которого по праву принадлежит и Украине, и России. Результаты, о которых идет речь, изложены в его фундаментальной работе „Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрической задаче", опубликованной в Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, VI série; Sciences mathématiques, physiques et naturelles, т. VI, Premiére partie: sciences mathématiques et physiques, т. IV, Saint-Pétersbourg, 1850, с. 385 – 517. Перевод этой работы на русский язык можно найти в [7]. Метод Остроградского вошел во все классические учебники по аналитической механике [8, 9].

* Выполнена при частичной финансовой поддержке МНТЦ (проект № 840).

В современной теории элементарных частиц центральную роль играют калибровочные поля, которые описываются так называемыми *сингулярными или вырожденными* лагранжианами. Эти лагранжианы включают наряду с физическими динамическими переменными и нефизические калибровочные степени свободы, что необходимо для явно релятивистски инвариантной формулировки теории. В такой теории неизбежно возникают связи между динамическими переменными, которые в конечном счете исключают нефизические калибровочные степени свободы. К этому типу принадлежат и теории с общековариантной симметрией.

Задача построения гамильтонова формализма для теорий, описываемых сингулярными лагранжианами первого порядка, была решена Дираком [10–13]. Следующим шагом в этом направлении является обобщение формализма Остроградского на сингулярные лагранжианы с высшими производными. Один из возможных способов такого обобщения и рассматривается в данной статье на примере вырожденных лагранжианов второго порядка, зависящих от обобщенных координат и их первых и вторых производных по времени.

План изложения следующий. Во втором пункте вводятся канонические переменные (переменные Остроградского) и дается определение сингулярных лагранжианов с высшими производными. В третьем выводятся канонические уравнения движения в фазовом пространстве и методом Дирака определяются вторичные связи в теории. В четвертом пункте показано, как можно получить все вторичные связи, оставаясь в рамках лагранжева формализма и используя уравнения движения в форме Эйлера. В пятом рассмотрен пример — обобщенное действие релятивистской точечной частицы, содержащее дополнительное слагаемое, пропорциональное интегралу вдоль мировой траектории от кривизны этой траектории. В шестом пункте кратко обсуждаются задачи, представляющие интерес для дальнейших исследований в этой области.

2. Сингулярные лагранжианы второго порядка. Рассмотрим систему с конечным числом степеней свободы, равным n. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — обобщенные координаты этой системы, а

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}), \qquad \dot{x} \equiv \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.1}$$

— ее функция Лагранжа. Уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.2}$$

Канонические переменные (переменные Остроградского) в случае лагранжиана (2.1) вводятся так:

$$q_{1i} = x_i, \qquad q_{2i} = \dot{x}_i, \tag{2.3}$$

$$p_{1i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial x_j}\dot{x}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \dot{x}_j}\ddot{x}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \ddot{x}_j}\dddot{x}_j, \tag{2.4}$$

$$p_{2i} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.5}$$

Как обычно, по повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах.

Лагранжиан (2.1) называется *невырожденным*, если введенные согласно (2.3)–(2.5) переменные Остроградского q_1, q_2, p_1, p_2 являются независимыми, т. е. нет соотношений вида[1]

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \tag{2.6}$$

[1] Предполагается, что соотношения (2.6) не сводятся к виду $g(q_1, q_2) = 0$.

которые после подстановки в них определений (2.3) – (2.5) обращаются в нуль тождественно по $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$. В противном случае, т. е. когда соотношения вида (2.6) имеют место, лагранжиан (2.1) называется *вырожденным* или *сингулярным*.

Условие невырожденности лагранжиана, очевидно, эквивалентно требованию, чтобы формулы (2.4) и (2.5) можно было однозначно разрешить относительно переменных $\ddot{x}_i$ и $\dddot{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в виде

$$\ddot{x}_i = \ddot{x}_i(q_1, q_2, p_2), \qquad \dddot{x}_i = \dddot{x}_i(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Для этого необходимо, чтобы во всей области изменения переменных $x, \dot{x}, \ddot{x}$

$$\operatorname{rank} \left\| \Lambda_{ij} \right\| = n, \tag{2.8}$$

где

$$\Lambda_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \ddot{x}_j}, \quad 1 \le i, \; j \le n. \tag{2.9}$$

Если выполнено условие (2.8), то соотношений (2.6) нет. Чтобы доказать это, предположим противное, т. е. пусть имеется связь (2.6), причем не все производные $\dfrac{\partial f}{\partial p_{2i}}$, $1 \le i \le n$, одновременно обращаются в нуль. Подставляя в (2.6) определения (2.4) и (2.5), получаем тождество относительно $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$. Дифференцируя его по $\dddot{x}_j$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1k}} \frac{\partial p_{1k}}{\partial \dddot{x}_j} = -\frac{\partial f}{\partial p_{1k}} \Lambda_{kj} = 0, \tag{2.10}$$

что, очевидно, противоречит (2.8). Если функция f в (2.6) не зависит от p_1, то в этом случае не могут одновременно обращаться в нуль все производные $\dfrac{\partial f}{\partial p_{2k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Дифференцируя (2.6) по $\ddot{x}_j$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial p_{2k}} \frac{\partial p_{2k}}{\partial \ddot{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial p_{2k}} \Lambda_{kj} = 0, \tag{2.11}$$

что опять-таки противоречит (2.8). Таким образом, если нет связей (2.6) между каноническими переменными, то это эквивалентно условию (2.8).

Если лагранжиан (2.1) невырожден, то уравнения Эйлера (2.2) в силу условия (2.8) могут быть представлены в нормальной форме

$$\frac{d^4 x_i}{dt^4} = g_i(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}), \quad 1 \le i \le n. \tag{2.12}$$

В работе [7] М. В. Остроградский показал, что в случае невырожденных лангражианов система из n уравнений четвертого порядка (2.2) или (2.12) эквивалентна канонической системе из $4n$ уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1i} &= \frac{\partial H}{\partial p_{1i}}, \qquad \dot{q}_{2i} = \frac{\partial H}{\partial p_{2i}}, \\ \dot{p}_{1i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{1i}}, \qquad \dot{p}_{2i} = -\frac{\partial H}{\partial q_{2i}}, \quad 1 \le i \le n, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где гамильтониан H (гамильтониан Остроградского) определяется формулой

$$H = p_1 \dot{x} + p_2 \ddot{x} - L(x, \dot{x}, \ddot{x}). \tag{2.14}$$

Существенно, что H может быть представлен как функция только канонических переменных $q_1, q_2\, p_1, p_2$. Действительно, из (2.14) с учетом определения p_2 в (2.5) получаем

$$dH = dp_1\dot{x} + p_1 d\dot{x} + dp_2\ddot{x} + p_2 d\ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}d\ddot{x} =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x}dq_1 + \left(p_1 - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)dq_2 + \dot{q}_1 dp_1 + q_2 dp_2. \tag{2.15}$$

Таким образом, в dH входят дифференциалы только канонических переменных, причем это верно как для невырожденных, так и для вырожденных лагранжианов. Следовательно, в обоих случаях имеем

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2), \tag{2.16}$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2. \tag{2.17}$$

Заменим в (2.15) $p_1 - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ согласно (2.4) на $-\dot{p}_2$, а $\frac{\partial L}{\partial x}$ в силу уравнений Эйлера (2.2) на $\dot{p}_1$ и приравняем правые части (2.15) и (2.17):

$$-\dot{p}_1 dq_1 - \dot{p}_2 dq_2 + \dot{q}_1 dp_1 + \dot{q}_2 dp_2 = \frac{\partial H}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2. \tag{2.18}$$

Отсюда следует

$$-\left(\dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_1}\right)dq_1 - \left(\dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\right)dq_2 - \left(\dot{q}_1 - \frac{\partial H}{\partial p_1}\right)dp_1 - \left(\dot{q}_2 - \frac{\partial H}{\partial p_2}\right)dp_2 = 0. \tag{2.19}$$

В случае невырожденных лагранжианов канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2 являются независимыми величинами, следовательно, независимы и их дифференциалы. Это позволяет приравнять нулю коэффициент при каждом дифференциале в (2.19), что и дает канонические уравнения (2.13). Именно так уравнения (2.13) были получены М. В. Остроградским [7].

Если действие, соответствующее лагранжиану (2.1), инвариантно при сдвигах $t \to t + \varepsilon$, то согласно первой теореме Нетер [14] величина

$$E(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) = H(q_1 = x,\ q_2 = \dot{x},\ p_1 = p_1(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}),\ p_2 = p_2(x, \dot{x}, \ddot{x})) \tag{2.20}$$

сохраняется на решениях уравнений движения (2.2). Поэтому (2.20) естественно назвать энергией.

3. Связи в фазовом пространстве и обобщенные гамильтоновы уравнения движения. Пусть исходный лагранжиан (2.1) вырожденный. Будем считать, что во всей области изменения переменных x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ выполнено условие

$$\operatorname{rank}\left\|\Lambda_{ij}\right\| = r = n - m_1 < n. \tag{3.1}$$

В этом случае уравнения Эйлера (2.2) представляют собой систему из r уравнений четвертого порядка, которые могут быть представлены в нормальном виде, и $m_1 = n - r$ уравнений, не содержащих четвертых производных по времени от переменных x. Эти последние m_1 уравнений будем называть *лагранжевыми связями.* Они могут быть выделены из системы (2.2) следующим образом. Пусть $\overset{a}{\xi}_i(x, \dot{x}, \ddot{x})$, $a = 1, \ldots, m_1$, $i = 1, \ldots, n$ — собственные векторы матрицы Λ, соответствующие нулевым собственным значениям

$$\overset{a}{\xi}_i(x, \dot{x}, \ddot{x})\Lambda_{ij}(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad 1 \le i,\ \ j \le n, \quad 1 \le a \le m_1. \tag{3.2}$$

Число таких векторов в силу предположения (3.1) равно m_1. Проектируя уравнения Эйлера (2.2) на эти векторы, получаем m_1 лагранжевых связей

$$B_a(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) = \overset{a}{\xi}_i\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - p_{1i}\right), \quad a = 1,\ldots,m_1. \tag{3.3}$$

Будем считать, что вся система уравнений (2.2) непротиворечива. Это будет выполнено, например, в случае, если лагранжевы связи, не содержащие четвертых производных по времени от x, определяют *инвариантное подмногообразие* для уравнений четвертого порядка в (2.2) [12].

Учитывая (3.1), можно сразу получить m_1 связей между q_1, q_2 и p_2. Для этого необходимо разрешить соотношения (2.5) относительно r переменных $\ddot{x}$ в виде

$$\ddot{x}_\alpha = \ddot{x}_\alpha\left(q_1, q_2, p_{2\beta}, \ddot{x}_{r+1},\ldots,\ddot{x}_n\right), \quad 1 \le \alpha, \quad \beta \le r. \tag{3.4}$$

Здесь для определенности предположено, что у матрицы Λ линейно независимы первые r строк и r столбцов, что, очевидно, можно сделать всегда соответствующим изменением нумерации переменных x_i, $i = 1,\ldots,n$. Подставив (3.4) в оставшиеся m_1 соотношений (2.5), получаем m_1 связей вида

$$p_{2r+a} = p_{2r+a}(q_1, q_2, p_{2\beta}), \quad a = 1,\ldots,m_1 = n-r, \quad \beta = 1,\ldots,r. \tag{3.5}$$

Связи (3.5) или набор связей, эквивалентных им, будем записывать для краткости в следующем виде:

$$\varphi_a(q_1, q_2, p_2) = 0, \quad a = 1,\ldots,m_1. \tag{3.6}$$

Эти связи по аналогии с обобщенной гамильтоновой динамикой Дирака для сингулярных лагранжианов без высших производных [10] естественно назвать *первичными связями*, так как они следуют только из условия вырожденности лагранжиана (2.1) и определения канонических импульсов (2.5) без использования уравнений движения. При подстановке определений (2.3) и (2.5) в связи (3.6) последние обращаются в m_1 *тождеств* по отношению к x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Подставляя вместо f в (2.11) первичные связи (3.6), убеждаемся в том, что нулевые векторы $\overset{a}{\xi}_i(x,\dot{x},\ddot{x})$, $1 \le a \le m_1$, $1 \le i \le n$, матрицы Λ всегда можно выбрать в таком виде, что с учетом определения (2.5) они перейдут в функции, зависящие только от q_1, q_2, p_2 (зависимость от $\ddot{x}$ исчезает). Без потери общности можно положить

$$\overset{a}{\xi}_i(q_1, q_2, p_2) = \frac{\partial\varphi_a(q_1, q_2, p_2)}{\partial p_{2i}}, \quad 1 \le a \le m_1, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.7}$$

Теперь попытаемся перенести уравнения Эйлера (2.2) для сингулярных лагранжианов в фазовое пространство. Для этого в левой и правой частях определения канонического гамильтониана

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1\dot{q}_1 + p_1\dot{q}_2 - L(q_1, q_2, \dot{q}_2) \tag{3.8}$$

заменим импульсы p_2 их выражениями через $q_1, q_2, \dot{q}_2$ согласно (2.5) и выполним подстановку $\dot{q}_1 = q_2$. Дифференцируя это тождество по $\dot{q}_2$, получаем

$$\left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial p_{2j}} - \dot{q}_{2j}\right)\frac{\partial\overline{p}_{2j}}{\partial\dot{q}_{2i}} = 0, \quad 1 \le i, \quad j \le n. \tag{3.9}$$

Черта означает описанную выше замену

$$\bar{f}(q_1, q_2, p_1, p_2) = f\left(q_1, q_2, \frac{\partial L(q_1, q_2, \dot{q}_2)}{\partial\dot{q}_2}\right) \equiv F(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2). \tag{3.10}$$

Поскольку $\dfrac{\partial\overline{p}_{2j}}{\partial\dot{q}_{2i}} \equiv \Lambda_{ij}(q_1, q_2, \dot{q}_2)$, то из (3.9) следует, что величины

$$\dot{q}_{2j} - \frac{\overline{\partial H}}{\partial p_{2j}} = 0, \quad 1 \le j \le n, \tag{3.11}$$

являются нулевым собственным вектором матрицы $\Lambda(q_1, q_2, \dot{q}_2)$. Этот вектор можно разложить по полному набору нулевых собственных векторов матрицы Λ

$$\dot{q}_{2j} - \frac{\overline{\partial H}}{\partial p_{2j}} = \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) \overset{a}{\xi}_i(q_1, q_2, \dot{q}_2) =$$
$$= \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) \frac{\overline{\partial \varphi_a(q_1, q_2, p_2)}}{\partial p_{2j}}. \tag{3.12}$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.7).

Теперь подставим (2.5) в (3.8), продифференцируем полученное тождество по q_2 и используем равенство

$$p_1 + \dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2}, \tag{3.13}$$

следующее из (2.4) и (2.5). В результате получим

$$\dot{p}_{2i} + \frac{\overline{\partial H}}{\partial q_{2i}} = \left(\dot{q}_{2j} - \frac{\overline{\partial H}}{\partial p_{2j}} \right) \frac{\partial \overline{p}_{2j}}{\partial q_{2i}} \equiv \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) \frac{\overline{\partial \varphi_a}}{\partial p_{2j}} \frac{\partial \overline{p}_{2j}}{\partial q_{2i}}. \tag{3.14}$$

Дифференцируя по q_1 и q_2 тождества, в которые переходят первичные связи (3.6) после подстановки в них (2.5), имеем

$$\frac{\overline{\partial \varphi_a}}{\partial q_{si}} = - \frac{\overline{\partial \varphi_a}}{\partial p_{2j}} \frac{\partial \overline{p}_{2j}}{\partial q_{si}}, \quad s = 1, 2, \quad 1 \le i, \quad j \le n. \tag{3.15}$$

Теперь формулу (3.14) можно переписать так:

$$\dot{p}_{2i} + \frac{\overline{\partial H}}{\partial q_{2i}} = - \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) \frac{\overline{\partial \varphi_a}}{\partial q_{2i}}, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.16}$$

Учитывая, что уравнения Эйлера (2.2) можно представить в виде

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1}, \tag{3.17}$$

получаем

$$\dot{p}_{1i} + \frac{\overline{\partial H}}{\partial q_{1i}} = - \sum_{a=1}^{\infty} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) \frac{\overline{\partial \varphi_a}}{\partial q_{1i}}, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.18}$$

Наконец, дифференцируя (3.8) по p_1, имеем

$$\dot{q}_{1i} - \frac{\overline{\partial H}}{\partial p_{1i}} = 0, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.19}$$

Введем по обычным правилам скобки Пуассона

$$(f, g) = \frac{\partial f}{\partial q_{si}} \frac{\partial g}{\partial p_{si}} - \frac{\partial f}{\partial p_{si}} \frac{\partial g}{\partial q_{si}},$$
$$s = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$f = f(q_1, q_2, p_1, p_2), \qquad g = g(q_1, q_2, p_1, p_2). \tag{3.20}$$

С их помощью уравнения (3.12), (3.16), (3.18) и (3.19) записываются в виде

$$\dot{z} = \overline{(z, H)} + \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)\overline{(z, \varphi_a)}. \tag{3.21}$$

Здесь z — полный набор канонических переменных q_1, q_2, p_1, p_2. Напомним, что уравнения (3.21) записаны в переменных $q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2$. Выражения $\overline{(z, H)}$ и $\overline{(z, \varphi_a)}$, очевидно, трансформируются в фазовое пространство при учете (2.5). В результате получаются функции канонических переменных (z, H) и (z, φ_a) соответственно [2]. Зависимость от $\dot{q}_2$ в функциях $\lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)$ при учете (2.5) не исчезает. Чтобы убедиться в этом, достаточно подействовать на левую и правую части формулы (3.12) линейными дифференциальными операторами [15]

$$X^a = \overset{a}{\xi}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{2j}}, \quad a = 1, \ldots, m_1. \tag{3.22}$$

Это дает

$$X^a \lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2) = \delta_{ab} \neq 0. \tag{3.23}$$

Если первичные связи взять в разрешенном виде (3.5), то функции λ_a в этом случае сведутся к $\dot{q}_{2r+a}$, $a = 1, \ldots, m_1$.

Таким образом, единственный путь перенести уравнения (3.21) в фазовое пространство — это попытаться исключить функции $\lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)$, наложив дополнительные условия на решения этих уравнений. Начиная с этого момента мы имеем фактически дираковскую систему с первичными связями [10]. Но в подходе Дирака для получения уравнений движения в фазовом пространстве использовался метод неопределенных множителей Лагранжа. Поэтому функции λ_a рассматривались как неизвестные функции времени, которые определялись из дополнительных условий, накладываемых на решения уравнений движения. Требовалось, чтобы на решениях этих уравнений обращались в ноль производные по времени от первичных связей. Как известно, в конечном итоге это позволяло найти все вторичные связи в теории и выразить через канонические переменные определенное число функций $\lambda_a(t)$. Оставшиеся неопределенными функции $\lambda_a(t)$, число которых равно числу первичных связей первого рода, задают функциональный произвол в теории. В рассуждениях Дирака не было убедительно обосновано, почему при получении уравнений движения в фазовом пространстве методом неопределенных множителей Лагранжа достаточно учитывать только первичные связи. На наш взгляд, вывод этих уравнений путем дифференцирования гамильтониана восполняет данный пробел. Еще один способ получения уравнений движения в фазовом пространстве для вырожденных лагранжианов произвольного порядка, в котором не возникает этот вопрос, развит в [13].

Итак, будем следовать далее рассуждениям Дирака. Потребуем, чтобы на решениях уравнений (3.21) обращались в нуль производные по времени от первичных связей

$$\overline{\frac{d\varphi_a}{dt}} = \overline{(\varphi_a, H)} + \sum_{b=1}^{m_1} \lambda_b(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)\overline{(\varphi_a, \varphi_b)} \overset{\overline{\varphi_c}}{\approx} 0, \quad a, b, c = 1, \ldots, m_1. \tag{3.24}$$

Здесь знак $\overset{\varphi_c}{\approx}$ означает *слабое равенство*, т.е. равенство при выполнении

[2] Если бы лагранжиан L был невырожденным $\operatorname{rank}\|\Lambda_{ij}\| = n$, то из (3.9) следовало бы обращение в нуль (3.11) и в правых частях уравнений (3.12), (3.16) и (3.18) стояли бы нули. В результате мы получили бы канонические уравнения М. В. Остроградского (2.13).

условия $\varphi_c = 0$. Выражения $\overline{(\varphi_a, H)}$ и $\overline{(\varphi_a, \varphi_b)}$ трансформируются в фазовое пространство при учете определения (2.5). Поэтому из (3.24) можно выразить через канонические переменные r_1 функций λ_a, причем

$$r_1 = \operatorname{rank} \left\| (\varphi_a, \varphi_b) \right\|_{\varphi_c = 0}. \tag{3.25}$$

Оставшиеся $\mu_1 = m_1 - r_1$ уравнений в (3.24) дают μ_1 связей на канонические переменные

$$\omega_{s_1}(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad s_1 = 1, 2, \ldots, \mu_1. \tag{3.26}$$

Очевидно, как следует изменить эти рассуждения, если некоторые из уравнений (3.24) или все они выполняются тождественно. Далее необходимо потребовать, чтобы

$$\overline{\frac{d\omega_{s_1}}{dt}} \overset{\overline{\varphi}, \overline{\omega}}{\approx} 0, \qquad s_1 = 1, \ldots, \mu_1, \tag{3.27}$$

и так далее. В результате будут получены все вторичные связи и останутся не выраженными через канонические переменные столько функций $\lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)$, сколько окажется в теории первичных связей первого рода. Теория не позволяет их зафиксировать, они остаются произвольными функциями своих аргументов. Поэтому, не теряя общности, их можно считать произвольными функциями времени. Тем самым уравнения (3.21) оказываются полностью перенесенными в фазовое пространство.

Для получения конечного результата можно было бы сразу считать функции $\lambda_a(q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2)$ в (3.21) неизвестными функциями времени и перейти в фазовое пространство

$$\dot{z} = (z, H) + \sum_{a=1}^{m_1} \lambda_a(t)(z, \varphi_a). \tag{3.28}$$

Проведенное выше рассмотрение уравнений (3.21) в переменных $q_1, q_2, p_1, \dot{q}_2$ является обоснованием этой процедуры.

4. Получение вторичных связей в лагранжевом формализме. В предыдущем пункте вторичные связи в теории были получены последовательным дифференцированием по времени первичных связей с использованием уравнений движения в форме (3.21) или (3.28). Однако для этих целей можно использовать уравнения Эйлера и в форме (3.18). Как и в случае сингулярных лагранжианов первого порядка, это позволяет получить некоторую дополнительную информацию о вторичных связях [15] и проследить взаимосвязь лагранжева и гамильтонова описаний [15 – 17].

Дифференцируя по времени левые части в уравнениях первичных связей (3.6), получаем

$$\frac{d}{dt}\overline{\varphi}_a(q_1, q_2, p_2) = \overline{\frac{\partial \varphi_a}{\partial q_{1i}}}\dot{q}_{1i} + \overline{\frac{\partial \varphi_a}{\partial q_{2i}}}\dot{q}_{2i} + \overline{\frac{\partial \varphi_a}{\partial p_{2i}}}\dot{\overline{p}}_{2i}, \quad a = 1, \ldots, m_1. \tag{4.1}$$

Производные по координатам q_1 и q_2 в (4.1) заменим с помощью соотношений (3.15) и учтем (3.13). В результате будем иметь

$$\frac{d}{dt}\overline{\varphi}_a(q_1, q_2, p_2) = -\overline{\frac{\partial \varphi_a}{\partial p_{2j}}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_j \partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_j \partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + p_{1i}\right),$$
$$a = 1, \ldots, m_1. \tag{4.2}$$

Согласно определению (2.4) выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Таким образом, производная $d\varphi_a(q_1, q_2, p_2)/dt$ обращается в нуль без использования уравнений движения в лагранжевой форме (2.2). Кроме этого, уравнения

$$\frac{d}{dt}\overline{\varphi}(q_1, q_2, p_2) = 0, \quad 1 \le a \le m_1, \tag{4.3}$$

эквивалентны равенствам

$$\overset{a}{\xi}_i(q_1, q_2, p_2)\overline{p}_{1i} = \overset{a}{\xi}_i(q_1, q_2, p_2)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial x_j}\dot{x}_i - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \dot{x}_j}\ddot{x}_j\right),$$
$$a = 1, \ldots, m_1. \tag{4.4}$$

Исследуем теперь, при каких условиях равенства (4.4) переходят в силу определений (2.3) – (2.5) в уравнения, содержащие только канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2, т. е. дают вторичные гамильтоновы связи. Для этого необходимо подействовать на правую часть (4.4) операторами (3.22). В результате получим [15]

$$\overset{a}{\xi}_i\overset{b}{\xi}_j\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \ddot{x}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right) \overset{\varphi_c}{\approx} \overline{(\varphi_b, \varphi_a)}, \quad a, b, c = 1, \ldots, m_1. \tag{4.5}$$

Следовательно, если среди первичных связей есть такие, которые находятся в инволюции, хотя бы в слабом смысле, со всем набором первичных связей (3.6), то для соответствующих значений индекса a в (4.4) действие операторов (3.22) на правую часть (4.4) дает нуль[3]. В этом случае переменные $\ddot{x}$ в правой части (4.4) можно исключить в силу определения (2.5), и уравнения (4.4) дают вторичные связи на канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2, причем их число равно числу первичных связей, находящихся в инволюции в слабом смысле со всем набором первичных связей (3.6). Очевидно, что это те же самые вторичные связи (3.26), полученные в предыдущем пункте методом Дирака. Из (4.4) непосредственно следует, что по своему построению эти связи *линейны по* p_1 и получаются проектированием на нулевые векторы матрицы Λ определения (2.4).

Далее необходимо продифференцировать по времени уравнения связей (3.26)

$$\frac{d\omega_{s_1}}{dt} = \frac{\partial \omega_{s_1}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \omega_{s_1}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \omega_{s_1}}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial \omega_{s_1}}{\partial p_2}\dot{p}_2 = 0, \quad s_1 = 1, \ldots, \mu_1, \tag{4.6}$$

и воспользоваться равенством (3.13) и уравнениями движения в форме (3.17). Если с помощью (2.5) удается исключить из всех или из некоторых уравнений (4.6) переменные $\ddot{x}$, то получаем еще некоторое число вторичных связей

$$\omega_{s_2}(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad s_2 = \mu_1 + 1, \ldots, \mu_2. \tag{4.7}$$

Такую процедуру последовательного дифференцирования связей необходимо продолжать до тех пор, пока будут получаться новые связи по сравнению с предыдущими или же из всех уравнений

$$\frac{d}{dt}\omega_{s_{k+1}}(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad s_{k+1} = \mu_k + 1, \ldots, \mu_{k+1}, \tag{4.8}$$

не удастся исключить с помощью (2.5) переменные $\ddot{x}$. В результате будут найдены все вторичные связи

$$\omega(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m_2, \quad m_2 = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k. \tag{4.9}$$

Установим соотношение между гамильтоновыми и лагранжевыми связями. Покажем, что дифференцирование по времени уравнений (4.4), которые привели к первому набору вторичных связей (3.26), дает с учетом уравнений движения (2.2) лагранжевы связи (3.3). Уравнения (4.4) можно переписать так:

[3] Левую и правую части в формуле (4.5) можно одновременно рассматривать или в лагранжевых, или в гамильтоновых переменных.

$$\overset{a}{\xi}_i\left(p_{1i}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}\right)=0, \quad a=1,\ldots,m_1. \tag{4.10}$$

Дифференцируя по времени левые части этих равенств, получаем

$$\overset{a}{\xi}_i\left(\dot{p}_{1i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}\right)+\left(\frac{d}{dt}\overset{a}{\xi}_i\right)\left(p_{1i}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}\right)=0. \tag{4.11}$$

С помощью уравнений движения (2.2) в первом слагаемом выполним замену

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}=-\frac{\partial L}{\partial x_i}. \tag{4.12}$$

Второе слагаемое в (4.11) в силу определения (2.4) обращается в нуль. В результате из (4.11) следуют лагранжевы связи (3.3).

Процедура дифференцирования по времени лагранжевых связей важна и для самого лагранжева формализма [17]. Фактически это есть поиск *инвариантного подмногообразия* в пространстве $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}\}$, которому должны принадлежать данные Коши для уравнений Эйлера (2.2). Только для этого ограниченного набора начальных данных можно непротиворечиво сформулировать задачу Коши в рассматриваемой задаче.

Из построения видно, что для первичных связей (3.6) и для первой группы вторичных связей (3.26) нет соответствующих лагранжевых связей, так как после подстановки (2.4) и (2.5) в (3.6) и (3.26) получаем тождества.

5. Обобщенное действие для точечной релятивистской частицы. В качестве примера рассмотрим следующее обобщение для действия точечной частицы:

$$S=-m\int ds+\alpha\int k\,ds, \tag{5.1}$$

где m — параметр с размерностью массы, ds — элемент длины мировой траектории частицы: $ds^2=dx_\mu dx^\mu$, k — кривизна этой траектории $k^2=$ $=(d^2x/ds^2)^2$, α — безразмерная константа. При произвольной параметризации траектории $x^\mu(\tau)$, $\mu=0,1,2,\ldots,D-1$, действие (5.1) записывается так:

$$S=-m\int\sqrt{\dot{x}^2}\,d\tau+\alpha\int\frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{x})^2-\dot{x}^2\ddot{x}^2}}{\dot{x}^2}\,d\tau, \quad \dot{x}=\frac{dx}{d\tau}. \tag{5.2}$$

Используется метрика с сигнатурой $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(+,-,-,-)$.

Матрица Λ, определенная в формуле (2.9), в данном случае имеет вид

$$\Lambda_{\mu\nu}=\frac{\alpha}{\dot{x}^2\sqrt{g}}\left[\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu-\dot{x}^2\eta_{\mu\nu}-\frac{l_\mu l_\nu}{g}\right], \tag{5.3}$$

где $l_\mu=(\dot{x}\ddot{x})\dot{x}_\mu-\dot{x}^2\ddot{x}_\mu$, $g=(\dot{x}\ddot{x})^2-\dot{x}^2\ddot{x}^2$. Поскольку

$$\dot{x}^\mu l_\mu=0, \quad l_\mu l^\mu=-g\dot{x}^2, \tag{5.4}$$

то легко убедиться в том, что матрица Λ имеет два собственных вектора с нулевым собственным значением: $\dot{x}$ и l^μ. Следовательно, в теории должны быть две первичные связи. Используя определение [4]

$$p_{2\mu}=-\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu}=-\frac{\alpha}{\dot{x}^2}\frac{l_\mu}{\sqrt{g}} \tag{5.5}$$

и равенства (5.4), получаем первичные связи, соответствующие (3.6):

[4] Знак минус здесь введен для того, чтобы пространственные компоненты p_2 определялись формулой (2.5).

$$\varphi_1 = p_2 q_2 = 0, \tag{5.6}$$

$$\varphi_2 = p_2^2 q_2^2 + \alpha^2 = 0, \tag{5.7}$$

где $q_{2\mu} = \dot{x}_\mu$.

Вторичные связи в рассматриваемой модели вначале найдем способом, описанным в п. 4. Скобки Пуассона определим так:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i^\mu} \frac{\partial g}{\partial q_{i\mu}} - \frac{\partial f}{\partial q_i^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_{i\mu}} \right). \tag{5.8}$$

Первичные связи (5.6) и (5.7) находятся в инволюции между собой в сильном смысле $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Поэтому должны существовать вторичные связи, которые получаются проектированием определения

$$p_{1\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \dot{p}_{2\mu} \tag{5.9}$$

на нулевые векторы матрицы Λ: $\overset{1}{\xi}_\mu = \dot{x}_\mu, = q_{2\mu}$, $\overset{2}{\xi}_\mu = l_\mu \sim p_{2\mu}$. Проектируя (5.9) на $q_{2\mu}$, получаем

$$\omega_1 = p_1 q_2 - m\sqrt{q_2^2} = 0. \tag{5.10}$$

Наконец, умножая (5.9) на $p_{2\mu}$, имеем

$$\omega_2 = p_1 p_2 = 0. \tag{5.11}$$

Дифференцирование по времени (5.10) не дает новых связей, а дифференцирование по времени (5.11) с учетом уравнений движения

$$\dot{p}_1 = 0 \tag{5.12}$$

и связей (5.6) – (5.10) приводит к выражению, из которого нельзя исключить зависимость от $\ddot{x}_\mu$:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = p_1 \dot{p}_2 = -p_1\left(p_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -p_1^2 + m^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{q_2^2}}(p_1 q_2)\sqrt{g}. \tag{5.13}$$

Действительно,

$$\ddot{x}_\mu \frac{\partial g}{\partial \ddot{x}_\mu} = 2g \neq 0. \tag{5.14}$$

Таким образом, связи (5.6), (5.7), (5.10) и (5.11) исчерпывают весь набор связей в рассматриваемой теории. Вопреки утверждениям, сделанным в работах [18, 19], мы имеем здесь *четыре* связи.

Из определения (5.5) следует

$$p_2 \ddot{x} = -\frac{\alpha}{\dot{x}^2}\sqrt{g}. \tag{5.15}$$

В результате для канонического гамильтониана получаем выражение[5]

$$H = -p_1 \dot{x} - p_2 \ddot{x} - L = -p_2 q_2 + m\sqrt{q_2^2} = -\omega_1. \tag{5.16}$$

Построим из скобок Пуассона между всеми связями матрицу Δ:

[5] В лагранжевых переменных H и, следовательно, ω_1 обращаются в нуль в силу репараметризационной инвариантности действия (5.1). Это иллюстрирует утверждение из предыдущего пункта о том, что у вторичных гамильтоновых связей первого этапа (3.26) нет соответствующих лагранжевых связей.

$$\Delta_{AB} = (\theta_A, \theta_B), \quad 1 \le A, \quad B \le 4, \qquad (5.17)$$
$$\theta_1 = \varphi_1, \quad \theta_2 = \varphi_2, \quad \theta_3 = \omega_1, \quad \theta_4 = \omega_2.$$

На подмногообразии $\mathcal{M}$ фазового пространства, задаваемом уравнениями связей

$$\theta_A(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0, \quad A = 1, \dots, 4, \qquad (5.18)$$

отличны от нуля следующие элементы матрицы Δ:

$$\Delta_{24} = (\theta_2, \theta_4) = (\varphi_2, \omega_2) = -2p_2^2(p_1q_2), \qquad (5.19)$$
$$\Delta_{34} = (\theta_3, \theta_4) = (\omega_1, \omega_2) = m^2 - p_1^2\,. .$$

Таким образом, на $\mathcal{M}$ rank $\Delta = 2$. Следовательно, в теории есть две связи первого рода и две связи второго рода. Выделим явно эти связи. Для этого перейдем к эквивалентному набору связей [12]

$$\phi_s = \overset{s}{\xi}_A \theta_A, \quad s = 1, 2, \qquad (5.20)$$
$$\phi_3 = \theta_3 = \omega_1, \quad \phi_4 = \theta_4 = \omega_2,$$

где $\overset{s}{\xi}_A$, $s = 1, 2$, $A = 1, \dots, 4$, — два нулевых вектора матрицы Δ. Эти векторы можно выбрать в следующем виде:

$$\overset{1}{\xi}_1 = 1, \quad \overset{1}{\xi}_2 = \overset{1}{\xi}_3 = \overset{1}{\xi}_4 = 0, \qquad (5.21)$$
$$\overset{2}{\xi}_1 = 0, \quad \overset{2}{\xi}_2 = m^2 - p_1^2, \quad \overset{2}{\xi}_3 = 2p_2^2(p_1q_2), \quad \overset{2}{\xi}_4 = 0.$$

В результате получаем набор связей

$$\phi_1 = p_2q_2 = 0,$$
$$\phi_2 = -(p_1^2 - m^2)(p_2^2q_2^2 + \alpha^2) + 2p_2^2(p_1q_2)\left(p_1q_2 - m\sqrt{q_2^2}\right) = 0, \qquad (5.22)$$
$$\phi_3 = p_1q_2 - m\sqrt{q_2^2} = 0, \quad \phi_4 = p_1p_2 = 0,$$

эквивалентный исходным связям $\theta_a = 0$, $A = 1, \dots, 4$, т. е. уравнения (5.22) задают в фазовом пространстве то же подмногообразие $\mathcal{M}$. Но для связей ϕ_A, $A = 1, \dots, 4$, отличны от нуля на $\mathcal{M}$ только единственные скобки Пуассона

$$(\phi_3, \phi_4) = m^2 - p_1^2. \qquad (5.23)$$

Таким образом, связи ϕ_1, ϕ_2 являются связями первого рода, а связи ϕ_3, ϕ_4 — связями второго рода.

Интересно отметить, что в фазовом пространстве есть инвариантное подмногообразие, определяемое связями (5.22) и уравнением

$$\phi_5 = p_1^2 - m^2, \quad (\phi_\alpha, \phi_\beta) \approx 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 5. \qquad (5.24)$$

Получим теперь вторичные связи методом Дирака. Учитывая (5.16), имеем

$$(\varphi_1, H) + \sum_{a=1}^{2} \lambda_a(\varphi_1, \varphi_a) = (\varphi_1, H) = -\omega_1 = 0,$$
$$(\varphi_2, H) + \sum_{a=1}^{2} \lambda_a(\varphi_2, \varphi_a) = (\varphi_2, H) = -2q_2^2(p_1p_2) + \qquad (5.25)$$
$$+ 2q_2^2\frac{(p_2q_2)}{\sqrt{q_2^2}} \overset{\varphi_1}{\approx} -2(p_1p_2)q_2^2 = -2q_2^2\omega_2 = 0.$$

Требование стационарности вторичных связей ω_1 и ω_2 позволяет выразить через канонические переменные λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{p_1^2 - m^2}{2p_2^2(p_1q_2)}.$$

Гамильтониан, задающий динамику в фазовом пространстве, имеет вид

$$H_T = H + \lambda_1(t)\varphi_1 + \frac{p_1^2 - m^2}{2p_2^2(p_1q_2)}\varphi_2.$$

Квантование данной модели проводится точно также, как квантуются гамильтоновы системы со связями первого порядка [10 – 13].

6. Заключение. Таким образом, мы показали, как можно обобщить на случай вырожденных лагранжианов метод Остроградского, развитый им для построения гамильтонова описания вариационных задач с высшими производными [6]. Вырожденные лагранжианы приводят к связям в фазовом пространстве, структура которых чрезвычайно разнообразна. Эта структура задается бинарной антисимметричной операцией — скобками Пуассона, по отношению к которой связи подразделяются на связи первого рода (находящиеся в инволюции со всем набором связей) и второго рода („некоммутирующие" связи). Такое подразделение связей важно в физических приложениях: связи первого рода порождаются калибровочными симметриями исходной теории (исходного лагранжиана), а связи второго рода только понижают число физических переменных в теории и с локальными симметриями не связаны. Здесь возникает следующая математическая задача: как найти эту структуру связей, т. е. их разбиение на упомянутые выше два класса, исследуя свойства исходного сингулярного лагранжиана? Конечно, в каждом конкретном случае можно явно определить эти связи и прямыми вычислениями разделить их на связи первого и второго рода, как это сделано в п. 5. Но известно, что одной из задач математики является замена конкретных расчетов рассуждениями.

В этой связи не лишне напомнить, что вариационная формулировка является естественной не только в задачах фундаментальной физики, но и в теории управления, математической экономике и т. д. Однако, как признают сами математики [20], вариационные задачи оказываются чрезвычайно трудными с точки зрения современного изложения (безкоординатный инвариантный метод). Вероятно, построение адекватного математического формализма для этих задач — дело будущего.

1. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. – М.: Наука, 1978. – 240 с.
2. *Kaku M.* Superconformal gravity in Hamiltonian form: Another approach to the renormalization of gravitation // Phys. Rev. D. – 1983. – **27**, № 12. – P. 2809 – 2818.
3. *Podolsky B., Schwed P.* Rewiew of generalized electrodynamics // Rev. Mod. Phys. – 1948. – **20**, № 1. – P. 40 – 50.
4. *Utiyama R.,De Witt B. S.* Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields // J. Math. Phys. – 1962. – **3**, № 4. – P. 608 – 618.
5. *Stelle K. S.* Renormalization of higher-derivative quantum gravity // Phys. Rev. D. – 1997. – **16**, № 4. – P. 953 – 969.
6. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity // Nucl. Phys. B. – 1982. – **201**, № 3. – P. 469 – 491.
7. *Boulware D. G., Deser S.* String generated gravity models // Phys. Rev. Lett. – 1985. – **55**, № 24. – P. 2656 – 2660.
8. *Zwiebach B.* Curvature squared terms and string theories // Phys. Lett. B. – 1985. – **156**, № 5,6. – P. 315 – 317.

[6] Во времена М. В. Остроградского вариационные задачи общего вида назывались изопериметрическими. Позднее этот термин стал обозначать интегральные условия, вводимые в вариационную задачу.

9. *Boulware D. G.* Quantization of higher derivative theories of gravity // Quantum Theory of Gravity. – Bristol: Adam Hilger, 1984. – P. 267 – 294.
10. *Hawking S. W.* Who's afraid of (higher derivative) ghosts? // Quantum Field Theory and Quantum Statistics. – Bristol: Adam Hilger, 1987. – **2**. – P. 129 – 139.
11. *Nesterenko V. V.* Curvature and torsion of the world curve in the action of the relativistic particle // J. Math. Phys. – 1992. – **32**, № 12. – P. 3315 – 3320.
12. *Nesterenko V. V.* Torsion in the action of the relativistic particle // Class. Quant. Grav. – 1992. – **9**. – P. 1101 – 1114.
13. *Nesterenko V. V.* Canonical quantization of a relativistic particle with torsion // Mod. Phys. Lett. A. – 1991. – **6**. – P. 719 – 726.
14. *Nesterenko V. V.* Relativistic particle with curvature in an external electromagnetic field // Int. J. Mod. Phys. A. – 1991. – **6**. – P. 3989 – 3996.
15. *Nesterenko V. V.* On a model of a relativistic particle with curvature and torsion // J. Math. Phys. – 1993. – **34**. – P. 5589 – 5595.
16. *Nesterenko V. V.* On squaring the primary constraints in a generalised Hamiltonian dynamics // Phys. Lett. B. – 1994. – **327**. – P. 50 – 55.
17. *Plyushchay M. S.* Massive relativistic point particle with rigidity // Int. J. Mod. Phys. A. – 1989. – **4**, № 15. – P. 3851 – 3865.
18. *Plyushchay M. S.* Massless particle with rigidity as a model for the description of bosons and fermions // Phys. Lett. B. – 1990. – **243**, № 4. – P. 383 – 388.
19. *Plyushchay M. S.* The model of the relativistic particle with torsion // Nucl. Phys. B. – 1991. – **362**, № 1,2. – P. 54 – 72.
20. *Kuznetsov Yu. A., Plyushchay M. S.* The model of the relativistic particle with curvature and torsion // Nucl. Phys. – 1993. – **389**, № 1. – P. 181 – 205.
21. *Nesterenko V. V., Nguyen Suan Han.* The Hamiltonian formalism in the model of the relativistic string with rigidity // Int. J. Mod. Phys. A. – 1988. – **3**, № 10. – P. 2315 – 2329.
22. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. Т.2. Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрической задаче. – Киев: Изд-во АН УССР, 1961. – С. 139 – 233. (См. еще Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 315 – 387).
23. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.;Л.: Техтеоретиздат, 1937. – 500 с.
24. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
25. *Дирак П.* Лекции по квантовой механике // Принципы квантовой механики. – М.: Наука, 1979. – С. 407 – 475.
26. *Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C.* Constrained Hamiltonian systems. – Rome: Acad. Naz. dei Lincei, 1976. – 115 p.
27. *Нестеренко В. В., Червяков А. М.* Сингулярные лагранжианы: классическая динамика и квантование. – Дубна, 1986. – 101 с. – (Препринт / ОИЯИ; Р2-86-323).
28. *Гитман Д. М., Тютин И. В.* Каноническое квантование полей со связями. – М.: Наука, 1986. – 216 с.
29. *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* Continuous symmetries in field theory // Fortsch. Phys. – 1983. – **31**, № 10. – P. 535 – 567.
30. *Нестеренко В. В., Червяков А. М.* Некоторые свойства связей в теориях с вырожденными лагранжианами // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **64**, № 1. – С. 82 – 91.
31. *Battle C., Gomis J., Pons J. M., Roman N.* Lagrangian and Hamiltonian constraints // Lett. Math. Phys. – 1987. – **13**, № 1. – P. 17 – 23.
32. *Kamimura K.* Singular Lagrangian and constrained Hamiltonian systems, generalized canonixcal foprmalism // Nuovo cim. B. – 1982. – **68**, № 1. – P. 33 – 54.
33. *Pisarski R.* Field theory of paths with a curvature-dependent term // Phys. Rev. D. – 1986. – **34**, № 2. – P. 670 – 673.
34. *Alonso F., Espriu D.* On the fine structure of strings // Nucl. Phys. B. – 1987. – **283**, № 3,4. – P. 393 – 412.
35. *Гриффитс Ф.* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

Получено 25.04.2001