УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКАХ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

We obtain order estimate of Kolmogorov width of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of multivariable periodic functions in the space L_q for $2 < p < q < \infty$, which supplements the preceding result obtained by the author.

Одержано порядкову оцінку колмогоровського поперечника класів Бесова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $2 < p < q < \infty$, яка доповнює раніше отриманий автором результат.

В настоящей работе дополняется один результат, относящийся к оценкам колмогоровских поперечников $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$, $2 \le p < q < \infty$ [1]. Для формулировки полученного результата напомним необходимые обозначения и определения.

Пусть R^d — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$ — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Ниже предполагаем, что для функций $f(x) \in L_p(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Для векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in Z$, и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathcal{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{k : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}\right\},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad f(x) \in L_p(\pi_d),$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы Бесова $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \,\middle|\, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

Далее, по числу M подберем μ из условия $M \asymp 2^{\mu}\mu^{\nu-1}$ и определим числа

$$M_{l,k} = \begin{cases} \left\|S_{l,k}\right\|, & d \le k \le l,\ l \le \mu; \\ \left|S_{l,k}\right| 2^{\mu+\alpha\mu-2\alpha l+\alpha k}, & d \le k \le l,\ l > \mu, \end{cases}$$

где α — число, которое будет подобрано в процессе проведения оценки. Покажем, что

$$\sum_{l \ge d} \sum_{k=d}^{l} M_{l,k} << M. \tag{3}$$

Имеем

$$\sum_{l \ge d} \sum_{k=d}^{l} M_{l,k} = \sum_{l=d}^{\mu} \sum_{k=d}^{l} M_{l,k} + \sum_{l>\mu} \sum_{k=d}^{l} M_{l,k} =$$

$$= \sum_{l=d}^{\mu} \sum_{k=d}^{l} \left\|S_{l,k}\right\| + \sum_{l>\mu} \sum_{k=d}^{l} \left|S_{l,k}\right| 2^{\mu+\alpha\mu-2\alpha l+\alpha k} \asymp$$

$$\asymp \sum_{d \le (s,\gamma) \le \mu} 2^{(s,1)} + \sum_{l>\mu} \sum_{l-1 \le (s,\gamma) < l} 2^{\mu+\alpha\mu-2\alpha l+\alpha(s,1)} = I_1 + I_2. \tag{4}$$

Оценим каждое из полученных слагаемых.

Воспользовавшись для оценки I_1 известным соотношением [2]

$$\sum_{(s,\gamma) \le n} 2^{(s,\delta)} << 2^{n} n^{\nu-1}, \tag{5}$$

где $1 = \gamma_1 = \delta_1 = \ldots = \delta_\nu$, $1 \le \delta_j < \gamma_j$, $j = \nu+1, \ldots, d$ получим

$$I_1 \le \sum_{(s,\gamma) \le \mu} 2^{(s,1)} << 2^{\mu}\mu^{\nu-1} \asymp M. \tag{6}$$

Применив оценку (5) к слагаемому I_2, будем иметь

$$I_2 \le \sum_{l>\mu} 2^{\mu+\alpha\mu-2\alpha l} \sum_{l-1 \le (s,\gamma) < l} 2^{\alpha(s,1)} << \sum_{l>\mu} 2^{\mu+\alpha\mu-\alpha l} l^{\nu-1} =$$

$$= 2^{\mu+\alpha\mu} \sum_{l>\mu} 2^{-\alpha l} l^{\nu-1} << 2^{\mu+\alpha\mu} 2^{-\alpha\mu} \mu^{\nu-1} \asymp M. \tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в (4), получим требуемую оценку (3).

Пусть $\mathcal{T}_{l,k}$ обозначает подпространство тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из множества $Q_{l,k} = \bigcup_{s \in S_{l,k}} \rho(s)$. Тогда для $f \in \mathcal{T}_{l,k}$ и $\theta \ge \ge p$ в силу неравенства Гельдера имеем

$$\left(\sum_{s \in S_{l,k}} \|\delta_s(f,x)\|_p^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} 1 \right)^{\frac{\theta-p}{\theta p}} =$$

$$= \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left|S_{l,k}\right|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}. \tag{8}$$

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Теорема Б [3]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида*

$$f(t) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$$

и пространством $R^{2^{(s,1)}}$ *существует изоморфизм, сопоставляющий функции* $f(\cdot)$ *вектор*

$$\delta_s f^j = \left\{ f_n(\tau_j) \right\} \in R^{2^{(s,1)}},$$

$$f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = \overline{1, d}, \quad n = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in R^d,$$

$$\tau_j = \left(\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_d} j_d \right), \quad j_i = 1, \ldots, 2^{s_i - 1}, \quad i = \overline{1, d},$$

и при этом имеет место соотношение

$$\| \delta_s(f, x) \|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

Таким образом, с одной стороны, для $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}$ в силу неравенства (8) и теоремы Б имеем

$$1 \geq \| f \|_{B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}} = \left(\sum_{s \in S_{l,k}} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 l} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq 2^{r_1 l} \left| S_{l,k} \right|^{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f, x) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \left| S_{l,k} \right|^{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}} 2^{r_1 l - k/p} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда заключаем, что если $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}$, то

$$\left(\sum_{s \in S_{l,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} << 2^{-r_1 l + k/p} \left| S_{l,k} \right|^{1/p - 1/\theta}. \tag{9}$$

С другой стороны, для $g \in L_q \cap \mathcal{T}_{l,k}$, $q \geq 2$,

$$\| g \|_q << \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(g, x) \|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

и в силу неравенства Гельдера с показателем $q/2$ находим

$$\| g \|_q << \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(g, x) \|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} 1 \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \asymp \left| S_{l,k} \right|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(g, x) \|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Применив к последней сумме в (10) теорему Б, получаем оценку

$$\| g \|_q << 2^{-k/q} \left| S_{l,k} \right|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left| \delta_s g^j \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Таким образом, с помощью соотношений (9) и (11) устанавливается соответствие между классами $B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}$ и конечномерными пространствами $l_p^{\|S_{l,k}\|}$, а также между функциональными подпространствами $L_q \cap \mathcal{T}_{l,k}$ и конечномерными пространствами $l_q^{\|S_{l,k}\|}$. Следовательно, проведя соответствующую дискретизацию, получаем оценку

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \sum_{l,k} d_{M_{l,k}}\left(B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}, L_q \cap \mathcal{T}_{l,k}\right) <<$$

$$<< \sum_{l>\mu} \sum_{k=d}^{l} 2^{-r_1 l + k/p - k/q} \left|S_{l,k}\right|^{1/2 - 1/q + 1/p - 1/\theta} d_{M_{l,k}}\left(B_p^{\|S_{l,k}\|}, l_q^{\|S_{l,k}\|}\right), \tag{12}$$

где $B_p^{\|S_{l,k}\|}$ — единичный шар в пространстве $l_p^{\|S_{l,k}\|}$.

Заметим, что при установлении второго неравенства было учтено соотношение

$$d_{M_{l,k}}\left(B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}, L_q \cap \mathcal{T}_{l,k}\right) = 0, \quad d \le k \le l, \quad l < \mu.$$

Для продолжения оценки (12) нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма А [4]. *Пусть* $M < n$, $2 \le p < q < \infty$, $\beta = \dfrac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}$. *Тогда*

$$d_M\left(B_p^n, l_q^n\right) \asymp \min\left\{1, n^{2\beta/q} M^{-\beta}\right\}. \tag{13}$$

В наших условиях согласно (13) имеем

$$d_{M_{l,k}}\left(B_p^{\|S_{l,k}\|}, l_q^{\|S_{l,k}\|}\right) << \left\|S_{l,k}\right\|^{\frac{2\beta}{q}} M_{l,k}^{-\beta}. \tag{14}$$

Далее, подставляя (14) в (12) и учитывая, что $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} + \dfrac{2\beta}{q}$, получаем

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \sum_{l>\mu} 2^{-r_1 l} \sum_{k=d}^{l} 2^{k/p - k/q} \left|S_{l,k}\right|^{1/2 - 1/q + 1/p - 1/\theta} \left\|S_{l,k}\right\|^{2\beta/q} M_{l,k}^{-\beta} <<$$

$$<< \sum_{l>\mu} 2^{-r_1 l - \mu\beta - \beta\alpha\mu + 2\alpha l\beta} \sum_{k=d}^{l} 2^{k\beta - \beta\alpha k} \left|S_{l,k}\right|^{1/2 - 1/\theta}. \tag{15}$$

Для того чтобы продолжить оценку (15), оценим внутреннюю сумму в этом соотношении. С этой целью представим ее в виде

$$\sum_{k=d}^{l} 2^{k\beta - \beta\alpha k} \left|S_{l,k}\right|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{k=d}^{l}{}' + \sum_{k=d}^{l}{}''\right) 2^{k\beta - \beta\alpha k} \left|S_{l,k}\right|^{1/2 - 1/\theta}, \tag{16}$$

где в $\sum_{k=d}^{l}{}'$ суммирование ведется по тем k, для которых $\left|S_{l,k}\right| \le l^{\nu - 1}$, а в $\sum_{k=d}^{l}{}''$ — по тем k, для которых $\left|S_{l,k}\right| > l^{\nu - 1}$.

Тогда для произвольного $0 < \alpha < 1$ имеем

$$\sum_{k=d}^{l}{}' 2^{k\beta(1-\alpha)} \left|S_{l,k}\right|^{1/2-1/\theta} \le l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \sum_{k=d}^{l}{}' 2^{k\beta(1-\alpha)} \ll$$

$$\ll 2^{l\beta(1-\alpha)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{17}$$

Если $\left|S_{l,k}\right| > l^{\nu-1}$, то

$$\sum_{k=d}^{l}{}'' 2^{k\beta(1-\alpha)} \left|S_{l,k}\right|^{1/2-1/\theta} = \sum_{k=d}^{l}{}'' 2^{k\beta(1-\alpha)} \left|S_{l,k}\right| \left|S_{l,k}\right|^{-1/2-1/\theta} <$$

$$< l^{-(\nu-1)(1/2+1/\theta)} \sum_{k=d}^{l}{}'' 2^{k\beta(1-\alpha)} \left|S_{l,k}\right| \le l^{-(\nu-1)(1/2+1/\theta)} \sum_{(s,\gamma)\le l} 2^{\beta(1-\alpha)(s,1)} \ll$$

$$\ll l^{-(\nu-1)(1/2+1/\theta)} 2^{\beta l(1-\alpha)} l^{(\nu-1)} = 2^{\beta l(1-\alpha)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{18}$$

Таким образом, подставляя (17) и (18) в (16), получаем оценку

$$\sum_{k=d} 2^{k\beta-\beta\alpha k} \left|S_{l,k}\right|^{1/2-1/\theta} \ll 2^{\beta l(1-\alpha)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Теперь, возвращаясь к (15), имеем

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \ll 2^{-\mu\beta+\alpha\beta\mu} \sum_{l>\mu} 2^{-r_1 l + l\beta + \alpha l\beta} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{19}$$

Наконец, выбрав $0 < \alpha < 1$ таким, чтобы было выполнено условие $r_1 > (1 + \alpha)\beta$ (такое α всегда существует, поскольку по условию теоремы $r_1 > \beta$), из (19) получаем требуемую оценку:

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \ll 2^{-\mu r_1} \mu^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Оценка сверху, а вместе с ней и теорема доказаны.

Замечание. Оценка сверху поперечника $d_M\left(H^r_p, L_q\right)$, $2 \le p < q < \infty$, $\beta < r_1$ ранее получена Э. М. Галеевым [3].

Пользуясь случаем, выражаю благодарность проф. Sun Yongsheng и Wang Heping, обратившим в [5] внимание на неточность в формулировке условия на r_1 в теореме А.

1. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663 – 675.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
3. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}^\alpha_p$ и $\tilde{H}^\alpha_p$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
4. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Там же. – 1977. – **41**, № 2. – С. 334 – 351.
5. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representations and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.

Получено 21.01.2000,
после доработки — 23.11.2000