УДК 518.9

О. В. Остапенко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ІГРИ З ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ ТА ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

We consider differential games with a terminal payment function and pulse influence at fixed time. We construct optimal strategies of players.

Розглядаються диференціальні ігри з термінальною функцією плати та імпульсним впливом в фіксовані моменти часу. Побудовано оптимальні стратегії гравців.

У теорії диференціальних ігор найбільша увага приділяється іграм, у яких мета переслідувача полягає в тому, щоб вивести траєкторію на термінальну множину [1, 2]. У цій статті мета гравців описується за допомогою термінальної функції плати. На відміну від відомих результатів динаміка системи задається за допомогою диференціального рівняння з імпульсним впливом [3]. Отримані результати примикають до роботи [2].

Розглянемо динамічну систему, яка описується диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(u, \nu, z), \qquad z \notin \Gamma_\tau, \\ \Delta z\Big|_{(t,z)\in\Gamma_\tau} &= A_\tau z - z, \end{aligned} \tag{1}$$

де $z \in E^n$, E^n — n-вимірний евклідів простір, $u \in U$, $\nu \in V$, U та V — компакти в евклідових просторах, оператор A_τ має обернений та діє з простору E^n в E^n. Параметрами u і ν розпоряджаються відповідно гравці P (переслідувач) та E (втікач). Під допустимими керуваннями гравців P та E будемо розуміти вимірні функції $u(t)$ і $\nu(t)$ зі значеннями в U та V відповідно. Множини всіх допустимих керувань гравців P та E, визначених на відрізку $[a, b]$, позначимо відповідно через $U[a, b]$ та $V[a, b]$. Далі вважаємо, що f та множини U і V задовольняють наступні припущення: 1) функція $f(z, u, \nu)$ неперервна за сукупністю змінних та локально ліпшицева по z; 2) існує константа $C \geq 0$ така, що для всіх $z \in E^n$, $u \in U$, $\nu \in V$ виконується співвідношення $|\langle z, f(z, u, \nu)\rangle| \leq C(1 + \|z\|^2)$; 3) множина $f(z, U, \nu)$ опукла для всіх $z \in E^n$, $\nu \in V$.

Зафіксуємо момент часу θ, $0 \leq \tau \leq \theta$. Нехай $\varphi : E^n \to E^1$ — деяке відображення. Мета гравця P — мінімізувати функціонал $\varphi(z(\theta))$, який залежить від кінця траєкторії. Мета гравця E — протилежна. Функціонал φ може бути відстанню до деякої множини M. В цьому випадку мета гравця P — наблизитися в момент θ якнайближче до множини M.

Опишемо хід гри. Гравець E вибирає розбиття

$$\omega = \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq \tau_i = \tau \leq t_{i+1} \leq \ldots \leq t_{i+k} = \theta\},$$

де точки $t_1, t_2, \ldots, t_i$ вибираються в початковий момент часу, а точки t_{i+1}, $t_{i+2}, \ldots, t_{i+k}$ — в момент часу τ. На кожному інтервалі $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \ldots, i+k$, гравець E будує своє керування $\nu(t)$, користуючись знанням значення $z(t_{j-1})$. Гравець P вибирає своє керування $u(t)$ на $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \ldots, i+k$, користуючись знанням $z(t_{j-1})$ і керуванням $\nu(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j)$.

Визначимо оператор R_ε, який ставить у відповідність будь-якій неперервній функції $\psi : E^n \to E^1$ функцію

$$\psi_\varepsilon(x) = \sup_{\nu(\cdot)\in V[0,\varepsilon)} \min_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon)} \psi(z(\varepsilon|u(\cdot), \nu(\cdot), x)). \tag{2}$$

Відзначимо, що внаслідок неперервності ψ і припущення 3 мінімум в (2) досягається. Нехай $\omega = \{t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_s = \varepsilon\}$, $\delta_j = t_j - t_{j-1}$ — розбиття відрізка $[0, \varepsilon]$. Покладемо

$$R^\omega\psi = R_{\delta_1} \ldots R_{\delta_s}\psi, \qquad \tilde{R}_\varepsilon\psi = \sup_{|\omega|=\varepsilon} R^\omega\psi,$$

розуміючи під $|\omega| = \varepsilon$ розбиття відрізка $[0, \varepsilon]$.

Визначимо оператор α_τ, який ставить у відповідність будь-якій функції ψ: $E^n \to E^1$ функцію $\psi^\tau(x) = \psi(A_\tau x)$, $x \in E^n$. Вважаємо, що відображення $A_\tau z$ задовольняє умову Ліпшиця з деякою константою L_K^* на кожному компакті K. Зі зробленого припущення та з [1] випливає, що функція $\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z)$ задовольняє локальну умову Ліпшиця. Тому до цієї функції можемо застосувати оператор $\tilde{R}_\tau$.

Теорема. 1. *Існує* ε*-стратегія гравця* P *така, що для відповідної траєкторії* $z(t)$ *з початком в* z_0

$$\varphi(z(\theta)) \le \tilde{R}_\tau\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

2. *Для будь-якого* $\delta > 0$ *існує* ε*-стратегія гравця* E *така, що для відповідної траєкторії* $z(t)$ *з початком в* z_0

$$\varphi(z(\theta)) \ge \tilde{R}_\tau\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) - \delta.$$

Доведення. 1. Припустимо, що гравець E у момент часу $t = 0$ обирає розбиття $\omega_0 = \{t_0 = 0 \le t_1 \le \ldots \le t_{k_1} = \tau\}$ відрізка $[0, \tau]$. Нехай $\nu_1(\cdot) \in V[0, t_1)$ — керування гравця E на проміжку $[0, t_1)$. З [1] випливає, що

$$\tilde{R}_\tau\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) = \tilde{R}_{t_1}\tilde{R}_{\tau-t_1}\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) \ge R_{t_1}\tilde{R}_{\tau-t_1}\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

Звідси та з визначення оператора $\tilde{R}_\varepsilon$ випливає

$$\min_{u(\cdot)\in U[0,t_1)} \tilde{R}_{\tau-t_1}\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(t_1|u(\cdot), \nu_1(\cdot), z_0)) \le \tilde{R}_\tau\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

Як керування гравця P на проміжку $[0, t_1)$ оберемо функцію $u_1(\cdot)$, на якій досягається мінімум:

$$\tilde{R}_{\tau-t_1}\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(t_1|u(\cdot), \nu_1(\cdot), z_0)) =$$
$$= \min_{u(\cdot)\in U[0,t_1)} \tilde{R}_{\tau-t_1}\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(t_1|u(\cdot), \nu_1(\cdot), z_0)).$$

Продовжуючи процес далі, на k_1-му кроці побудуємо керування гравця P: $u_1(\cdot) \in U[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, k_1$, і для відповідної траєкторії будемо мати

$$\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(\tau-)) \le \tilde{R}_\tau\alpha_\tau\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

З визначення α_τ маємо

$$\tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(\tau+)) \leq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

В момент часу τ гравець E обирає розбиття проміжку $[\tau, \theta]$. Аналогічно тому, як це було зроблено на проміжку $[0, \tau)$, будуємо керування гравця P на проміжку $[\tau, \theta]$. В результаті отримаємо

$$\varphi(z(\theta)) \leq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

2. Нехай $\delta > 0$. В момент часу $t = 0$ гравець E обирає розбиття

$$\omega_0 = \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k_1} = \tau\}, \quad \varepsilon_i = t_i - t_{i-1}$$

відрізка $[0, \tau]$ таке, що

$$R^{\omega_0}\alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) \geq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0).$$

На першому проміжку $[0, t_1)$ гравець E обирає керування $\nu_1(\cdot)$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\min_{u(\cdot)\in U[0, t_1)} R_{\varepsilon_2}\ldots R_{\varepsilon_{k_1}}\alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(t_1|u(\cdot), \nu_1(\cdot), z_0)) \geq$$

$$\geq \sup_{\nu(\cdot)\in V[0, t_1)} \min_{u(\cdot)\in U[0, t_1)} R_{\varepsilon_2}\ldots R_{\varepsilon_{k_1}}\alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z(t_1|u(\cdot), \nu_1(\cdot), z_0)) - \frac{\delta}{4k_1}.$$

Тому для будь-якого $u(\cdot) \in U[0, t_1)$ маємо

$$R_{\varepsilon_2}\ldots R_{\varepsilon_{k_1}}\alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}(z(t_1)) \geq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4k_1}.$$

Аналогічно обираємо $\nu_2(\cdot) \in V[t_1, t_2)$ і зрештою на k_1-му кроці одержуємо

$$\alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}(z(\tau-)) \geq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) - \frac{\delta}{2}$$

або

$$\tilde{R}_{\theta-\tau}(z(\tau+)) \geq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) - \frac{\delta}{2}.$$

В момент часу $t = \tau$ гравець E обирає розбиття відрізка $[\tau, 0]$ і, як вище, будує своє керування. В результаті одержимо

$$\varphi(z(\theta)) \geq \tilde{R}_\tau \alpha_\tau \tilde{R}_{\theta-\tau}\varphi(z_0) - \delta.$$

Теорему доведено.

1. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
2. *Перестюк Н. А., Остапенко Е. В.* Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1112 – 1118.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.

Одержано 05.09.2000