УДК 517.956/974

С. Г. Суворов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ПРИНЦИПЫ КОУЛМЭНА И РОД КРАСНОСЕЛЬСКОГО В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

We consider a simple semilinear elliptic eigenfunction problem. By taking it as an example, we demonstrate function-topological methods, which give the information on critical numbers in almost the same detail (qualitatively) as the variable separation in a similar linear problem.

Розглянуто просту слабко нелінійну еліптичну задачу на власні функції. На її прикладі демонструються функціонально-топологічні методи, які дають інформацію про критичні числа майже тієї ж детальності (якісно), що і розділення змінних в аналогічній лінійній задачі.

1. Введение. Целью настоящей статьи является демонстрация на простой модели

$$-\Delta u + u^3 = \lambda u, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega = \left\{0 < a \le r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \le A < \infty\right\}, \tag{2}$$

$$u\big|_{r=a} = u\big|_{r=A} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2\,dx = 1 \tag{4}$$

следующего факта: при использовании перечисленных ниже функционально-топологических методов можно получить информацию о критических числах задачи (1) – (4) почти той же детальности, что и для линейного уравнения

$$-\Delta u + u = \lambda u \tag{1'}$$

при разделении переменных в тех же условиях (2) – (4). До некоторой степени это касается и собственных функций.

К этим методам относятся: a) принцип Коулмэна [1, 2] (в нашем контексте удобно говорить „прямой принцип Коулмэна"); b) доказанный ниже дополнительный принцип Коулмэна [3]; c) методы стандартной теории Люстерника – Шнирельмана в подпространствах, выделяемых этими принципами.

Кроме этого в статье приводятся: d) функциональная характеристика и обобщение рода по М. А. Красносельскому [4, 5]; e) двойственное к обычному минимаксное определение критических уровней для нелинейных вариационных задач.

Заметим, что речь идет не об изучении простой модели (1) – (4), а о демонстрации возможностей усовершенствованной теории Люстерника – Шнирельмана. В связи с этим в пп. 2 – 4 (принципы Коулмэна, род, минимаксные принципы) изложение ведется для общей ситуации, в которой не возникают дополнительные технические трудности. Применение к задаче (1) – (4) — в п. 5.

2. Прямой и дополнительный принципы Коулмэна. Историю прямого принципа Коулмэна и точные формулировки в ситуации, несколько отличающейся от нашей, см. в [1, 2]; этот же принцип без названия см. в [6], ч. II, § 9.

Здесь рассмотрим достаточно общую и не слишком сложную задачу с гладким операторным ограничением. А именно, задано сепарабельное гильбертово пространство E, в котором действует топологическая группа линейных (обратимых) операторов G. Элементы абстрактной G и их представления в виде операторов обозначаем одной буквой g. Пространства E^* и E не отождествляются и $\langle l, u\rangle$ обозначает двойственность между ними.

Полагаем, что:

1) орбита GM любого ограниченного множества $M \subset E$ ограничена в E; орбита любой точки замкнута; отображение $R : (g, v) \in G \times E \to E$ непрерывно;

2) группа G аменабельна в смысле существования инвариантного среднего $m[\varphi(g)]$ в пространстве $CB(G)$ непрерывных ограниченных функций на G [7, 8].

***Замечание* 1.** Не исключается дискретная топология на G. Тогда $CB(G) = B(G)$ (пространство всех ограниченных функций) и аменабельность принимает обычный смысл. Конечно, это сужает класс допустимых групп.

Вариационная задача задается минимизируемым функционалом $f(u)$, ограниченным снизу, класса $C^{1,1}_{\text{loc}}$ и оператором $F: E \to E_1$, где E_1 — гильбертово пространство, $F \in C^{1,1}_{\text{loc}}$ и выполнено условие регулярности $(\forall u) \operatorname{Im} F'(u) = E_1$. Считаем, что f и F G-инвариантны: $(\forall u) f(gu) = f(u)$, $F(gu) = F(u)$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество решений уравнения Эйлера – Лагранжа

$$f'(u) + F'^*(u)p = 0, \quad p \in E_1^*. \tag{5}$$

В этой ситуации можно построить поток $D(u, t)$ как решение задачи Коши

$$\frac{dv(t)}{dt} = \Phi(v), \quad v(0) = u$$

с ограниченным полем Φ такой, что $F'(u)\Phi(u) = 0$ (т. е. $F(D(u, t)) \equiv 0$, если $u \in \{F = 0\}$) и $\langle f'(u), \Phi(u) \rangle < 0$ вне $\mathfrak{N}$ (т. е. f убывает вне $\mathfrak{N}$). Точки множества $\mathfrak{N}$ неподвижны.

Для задач с функционалом F, как это будет в нашем примере (1) – (4), такие построения проводились многократно (см. обзор [9]) и вкратце будут повторены в п. 5. В операторном случае — см. в [5].

***Замечание* 2.** Отметим только то, что потребуется в дополнительном принципе Коулмэна: поле $\Phi(u)$ в общей ситуации локально липшицево вне $\mathfrak{N}$ и „на подходах" к $\mathfrak{N}$, т. е. когда одна из точек входит в $\mathfrak{N}$. Этого достаточно для существования потока $D(u, t)$ [5].

Антиградиентный поток $D(u, t)$ эквивариантным априори может не быть, но его легко таким сделать при линейных g. Для этого достаточно положить $D_0(u, t) = m[g^{-1}D(gu, t)]$. Это понимается аналогично интегралу Гельфанда – Петтиса:

$$(\forall l \in E^*) \quad \langle l, D_0(u, t) \rangle = m\langle l, g^{-1}D(gu, t) \rangle.$$

Поток $D_0(u, t)$ и новое поле

$$\Phi_0(u) = \frac{d}{dt} D_0(u, t) \Big|_{t=0}$$

эквивариантны; F не изменяется, а f уменьшается вдоль D_0. Все это тривиально проверяется — ограничимся лишь эквивариантностью D_0:

$$(\forall g_0 \in G), \quad (\forall l \in E^*) \quad \langle l, D_0(g_0 u, t) \rangle = m\langle l, g^{-1}D(gg_0 u, t) \rangle =$$
$$= m\langle g_0^* l, (gg_0)^{-1} D(gg_0 u, t) \rangle = m\langle g_0^* l, g^{-1} D(gu, t) \rangle =$$
$$= \langle g_0^* l, D_0(u, t) \rangle = \langle l, g_0 D(u, t) \rangle.$$

В дальнейшем предполагаем, что переход $D \to D_0$ уже сделан и оставляем обозначения Φ, D за эквивариантным полем и потоком.

Из усреднений нам потребуется еще $m[gu]$, определяемое условием $(\forall l \in E^*)$ $\langle l, mgu \rangle = m\langle l, gu \rangle$. Очевидно, что $mgu \in I(G)$. Здесь и далее $I(G)$ обозначает множество G-инвариантных точек в E.

Поскольку при $u \in I(G)$ для произвольного g $D(u, t) = D(gu, t) = gD(u, t)$, то $D(I(G), t) \subset I(G)$. Фактически, это утверждение прямого принципа Коулмэна (с небольшими отличиями от приведенного в [1]).

Теорема 1. *Если точка*

$$u_0 \in I(G) \bigcap \{F=0\} \overset{\text{den}}{=} I_0$$

является стационарной для f в I_0, то $u_0 \in \mathfrak{N}$.

Здесь слова „является стационарной для f в I_0" можно понимать двояко и в обоих случаях теорема верна:

1) в смысле „не существует гладкой $u(t) \subset I_0, u(0)=u_0$, чтобы $\dfrac{d}{dt} f(u(t)) \neq \neq 0$"; теорема верна, ибо если $u_0 \notin \mathfrak{N}$, то такой кривой будет $D(u_0, t)$;

2) в смысле „уравнение (5) выполняется лишь в проекции на касательное пространство $T_{u_0}(I_0)$"; теорема верна, ибо если $u_0 \notin \mathfrak{N}$, то $\Phi(u_0)$ — ненулевой вектор из $T_{u_0}(I_0)$, при этом

$$\langle f'(u_0) + F'^*(u_0)p, \Phi(u_0)\rangle = \langle f'(u_0), \Phi(u_0)\rangle + \langle p, F'(u_0)\Phi(u_0)\rangle < 0 .$$

***Замечание* 3.** В контрпримерах из [1]: в первом — G-орбиты неограничены; во втором — регулярность F нарушена.

Введенное выше $I(G)$ является линейным пространством и пусть $E(G)$ — его дополнение, характеризуемое (очевидно) условием $m[gu]=0$ $(\forall u \in E(G))$. (В условиях основного примера это ортогональное дополнение.)

Дополнительный принцип Коулмэна сводит задачу в пространство $E(G)$ в отличие от прямого, сводящего задачу в $I(G)$. Дополнительный принцип требует более жестких условий на f, F, G и не дает столько же информации, сколько прямой — в связи с гораздо более обширным пространством $E(G)$ по сравнению с $I(G)$ (как правило). Однако применение обоих принципов вместе с манипулированием подгруппами группы G, как мы увидим, дает информации очень много.

Введем два новых условия:

d.1) $m[gu]=0 \Rightarrow m[F'(gu)]=0$. Строго это записывается так:

$$(\forall l \in E^*),\ (\forall l_1 \in E_1^*),\ (\forall h \in E) \quad [m\langle l, gu\rangle = 0] \Rightarrow [m\langle l_1, F'(gu)h\rangle = 0].$$

Ясно, что это верно, например, в случае квадратичного F, т. е. линейного по u оператора $F'(\cdot)h$, так как в этом случае

$$m\langle l_1, F'(gu)h\rangle = m\langle [F'(\cdot)h]^* l_1, gu\rangle = 0.$$

d.2) Для введенного выше поля Φ требуем, чтобы

$$(\forall u \in E(G)\setminus\mathfrak{N}) \qquad |m\langle f'(u), \Phi(g^{-1}u)\rangle| < |\langle f'(u), \Phi(u)\rangle|.$$

Это довольно ограничительное требование. Оно тривиально для квадратичных f, но проверяемо (хотя и не тривиально) в таких ситуациях, как в основном примере (см. п. 5).

Теорема 2 (дополнительный принцип Коулмэна). 1. *Существует эквивариантный поток $D_\perp(u,t)$, оставляющий инвариантным подпространство $E(G)$ и такой, что*:

а) $F(D_\perp(u,t)) \equiv 0$, *если* $F(u)=0$; b) $f(D_\perp(u,t))$ *убывает для* $u \in \in E(G)\setminus\mathfrak{N}$.

2. *Как следствие, если $E_0 = E(G) \bigcap \{F=0\}$ и точка $u_0 \in E_0$ стационарна для f в E_0, то $u_0 \in \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Докажем только первое утверждение, так как второе — очевидное его следствие в обоих смыслах теоремы 1. Для построения $D_\perp$ определим подходящее поле $\Phi_\perp(u)$. Пусть далее $m[\varphi(g)] \equiv m_{\text{new}}[\varphi(g)]$ — инверсионно инвариантное среднее [8] (п. 17.19), равное

$$\frac{1}{2}\left(m_{\text{old}}[\varphi(g)] + m_{\text{old}}[\varphi(g^{-1})]\right).$$

Определим поле:

$$(\forall l \in E^*) \quad \langle l, \Phi_\perp(u)\rangle = \langle l, \Phi(u)\rangle - m\langle l, \Phi(g^{-1}u)\rangle.$$

Проверим эквивариантность:

$$\langle l, g_0\Phi_\perp(u)\rangle = \langle g_0^* l, \Phi_\perp(u)\rangle = \langle g_0^* l, \Phi(u)\rangle - m\langle g_0^* l, \Phi(g^{-1}u)\rangle =$$

$$= \langle l, g_0\Phi(u)\rangle - m\langle l, g_0\Phi(g^{-1}u)\rangle = \langle l, \Phi(g_0u)\rangle - m\langle l, \Phi([gg_0^{-1}]^{-1}u)\rangle \overset{\text{inv}}{=}$$

$$\overset{\text{inv}}{=} \langle l, \Phi(g_0u)\rangle - m\langle l, \Phi(g^{-1}u)\rangle = \langle l, \Phi(g_0u)\rangle - m\langle l, \Phi([g_0g]^{-1}g_0u)\rangle \overset{\text{inv}}{=}$$

$$\overset{\text{inv}}{=} \langle l, \Phi(g_0u)\rangle - m\langle l, \Phi(g^{-1}g_0u)\rangle = \langle l, \Phi_\perp(g_0u)\rangle.$$

(Дважды использовалась инвариантность среднего.)

Далее, с учетом условия d. 1) и инвариантности F получим

$$(\forall l_1 \in E_1^*) \quad \langle l_1, F'(u)\Phi_\perp(u)\rangle =$$

$$= \langle F'^*(u)l_1, \Phi(u)\rangle - m\langle F'^*(u)l_1, \Phi(g^{-1}u)\rangle =$$

$$= \langle l_1, F'(u)\Phi_\perp(u)\rangle - m\langle l_1, F'(u)\Phi(g^{-1}u)\rangle =$$

$$= -m\langle l_1, F'(gu)g\Phi(g^{-1}u)\rangle = -m\langle l_1, F'(gu)\Phi(u)\rangle = 0.$$

Утверждение $\langle f'(u), \Phi_\perp(u)\rangle < 0$ для $u \notin \mathfrak{N}$ сразу же следует из d. 2).

Отметим, что ограниченность орбит Gu — это, в частности, посылка принципа равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза [10] (гл. III, § 4) как для множества операторов $\{g\}$, так и для множества $\{g^{-1}\}$. Поэтому нормы $\|g^{-1}\|$ равномерно ограничены.

Следовательно, сохраняются области липшицевости при переходах от Φ к $\Phi_\perp$: было ли Φ локально липшицевым при стандартных построениях с парой функционалов f, F, либо это общая ситуация с липшицевостью, как в замечании 2, изменяются лишь константы липшицевости. Значит, существует поток $D_\perp(u,t)$ вдоль поля $\Phi_\perp(u)$. Легко проверяется, что

$$D_\perp(u,t) = D(u,t) - mD(g^{-1}u,t) = D(u,t) - m[g^{-1}D(u,t)].$$

В то же время

$$m_{g_1}[g_1D_\perp(u,t)] = m_{g_1}[D(g_1u,t)] - m_{g_1}\left[g_1m_g[g^{-1}D(u,t)]\right] =$$

$$= m_{g_1}[D(g_1u,t)] - m_g[g^{-1}D(u,t)] = 0$$

в силу инверсионной инвариантности m. Таким образом, $D_\perp$ сохраняет $E(G)$.

Остальные свойства $D_\perp$, очевидно, следуют из доказанного для поля $\Phi_\perp$. Теорема доказана.

3. Обобщение рода Красносельского. Обозначим через H пространство всех функционалов в E, непрерывных, ограниченных на ограниченных множествах (кратко — „ограниченных") со следующим свойством: $(\forall u \in E)$ $m[h(gu)] = 0$. Легко видеть, что для любого равномерно непрерывного на ограниченных множествах функционала φ среднее $m[\varphi(gu)]$ определено (см. условия на G и ее представление в E). При этом $\varphi(u) - m[\varphi(gu)] \in H$.

Определение 1. *Родом множества $M \subset E$ относительно группы G назовем число CrM такое, что:*

1) $CrM = 0 \Leftrightarrow M = \varnothing$;

2) $CrM = k \Leftrightarrow$ *существует минимальное количество k функционалов из H (называемых достаточным набором функционалов) таких, что* $\sum_{i=1}^{k} h_i^2(u) > 0$ *на M;*

3) $CrM = \infty$, *если нет конечного достаточного набора для M.*

Рассмотрим группу $C = \{g_1, g_{-1}\}$, где $g_1 u = u$, $g_{-1} u = -u$. Тогда CrM совпадает с родом по Красносельскому для компактов M.

Функциональное определение рода — частный случай более общего определения, применяемого в [5]. Спецификация определения для полугрупп кратко дана в [11]. Однако отметим, что такая конструкция для группы C неявно (как элемент доказательств) появилась еще в ранних работах М. А. Красносельского. И среди дальнейших многочисленных обобщений рода разными авторами есть определения, легко переводимые в форму определения 1. (Хотя есть и существенно отличающиеся даже для конечных групп.)

Таким образом, переход к функциональной формулировке это, в основном, вопрос формы. Однако именно такая форма позволила ввести двойственный к обычному минимаксный принцип в нелинейных задачах. Он же, в свою очередь, дает существенные теоретические и вычислительные преимущества по сравнению с традиционным даже для группы C.

Свойства рода почти очевидны; их доказательства практически не отличаются от случая рода Красносельского. Приведем основные свойства без доказательств [5, 12, 13], за исключением первого, где проявляется специфика общей группы и доказательство не полностью очевидно.

I. *Род конечного множества M точек, не пересекающегося с $I(G)$, равен* 1; *род компакта M, $M \cap I(G) = \varnothing$, конечен.*

Доказательство. 1. Пусть точка $u_0 \in E \setminus I(G)$. Рассмотрим малую окрестность $U \ni u_0$ такую, что $Gu_0 \not\subset U$ и функционал $h(u) \geq 0$ всюду, $h(u_0) = 1$, $h|_{E \setminus U} = 0$. Определим $h_1(u) = h(u) - m[h(gu)] \in H$. Поскольку h непостоянен на Gu_0, то непостоянен и h_1. Если $h_1(u_0) \neq 0$, то достаточный набор для множества $\{u_0\}$ построен. Если $h_1(u_0) = 0$, то достаточно положить $\tilde{h}_1(u) = h_1(gu)$ с подходящим $g \in G$ — хотя бы один из них не равен нулю на u_0.

2. Если есть k точек $u_1, \ldots, u_k$, причем $Gu_i \cap Gu_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то аналогично можно определить h_i так, чтобы $h_i(u_i) \neq 0$, $h_i(u_j) = 0$ при $i \neq j$ (в силу замкнутости орбит точки отделены окрестностями от орбит других точек). Достаточный набор

$$\tilde{h}_1(u) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} h_i(u).$$

3. Пусть $u_1, \ldots, u_k \in Gu_1$. Построим h_i для каждой точки, как на первом шаге (для простоты обозначений опускаем тильды). Рассмотрим h_1. Поскольку $h_1(u_1) > 0$, то (возможный) первый номер $r_1 \in \{1, \ldots, k\}$, где $h_1(u_{r_1}) = 0$, будет больше 1. Однако известно, что $h_{r_1}(u_{r_1}) > 0$ и можно положить $h_1^1 = h_1 + \varepsilon_1 h_{r_1}$ с настолько малым $\varepsilon_1 > 0$, чтобы $h_1^1(u_1), \ldots, h_1^1(u_{r_1-1})$ не были равны нулю. После этого данный процесс возобновляется с функционалом h_1^1 вместо h_1. Ясно, что он оборвется на конечном шаге.

4. Общий случай получается комбинацией шагов 2 и 3. Сначала строим индивидуальные h_i для поднаборов точек, входящих в одну орбиту, — по методу шага 3, выбирая исходные функционалы с носителями, орбиты которых не пересекаются с „чужими" орбитами. Далее — конец шага 2.

5. Если $M \subset E \setminus I(G)$ — компакт, то, определив для каждой его точки v функционал $h_v(u)$ (как на первом шаге $\tilde{h}_1(u)$ для u_0), получим покрытие M открытыми множествами $\{h_v \neq 0\}$. После этого выбираем конечное подпокрытие и соответствующий ему конечный набор функционалов в качестве достаточного. Свойство I доказано.

II. $A \subset B \Rightarrow CrA \leq CrB$.

III. *Cr не изменяется при сдвигах множеств потоками D, $D_\perp$.*

IV. $Cr(A \cup B) \leq CrA + CrB$.

V. *Если M — компакт в $E \setminus I(G)$, то существует такая его окрестность $U(M, \varepsilon)$, что $CrM = Cr\,U(M, \varepsilon)$.*

4. Двойственные минимаксные принципы. Для линейных задач хорошо известны две (двойственные) формы минимаксного принципа Куранта для определения очередного собственного числа: через подпространства и через линейные функционалы. (Термин минимакс здесь применяется как к $\inf\sup$, так и к $\sup\inf$.) Со времени первых работ Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана определение через подпространства распространялось на нелинейный случай следующим образом (в рассматриваемой ситуации):

p-е критическое число

$$c_p = \inf_{CrA \geq p} \sup_{u \in A \subset \{F=0\}} f(u). \tag{6}$$

Используя введенный выше класс H, теперь можем привести двойственное определение (при $p > 1$):

$$c_p^1 = \sup_{h_1, \ldots, h_{p-1} \in H} \inf_{u \in \{F=0\};\, \mathbf{h}(u)=0} f(u), \tag{7}$$

где $\mathbf{h} = \{h_1, \ldots, h_{p-1}\}$. (При $p = 1$ в (6) останется только внешний $\inf$ за счет одноточечных множеств, а в (7) — только внутренний, если использовать формальное понятие пустого условия.)

Как и в линейном случае, это одно и то же число.

Теорема 3. *При $p > 1$ $c_p = c_p^1$.*

Доказательство. Непосредственно из (6) следует, что при произвольном

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad Cr(\{f \leq c_p - \varepsilon\} \cap \{F = 0\} < p, \quad \text{т. е.} \leq p - 1.$$

Поэтому найдется для этого множества (обозначенного B_ε) такой достаточный набор

$$h_1^\varepsilon, \ldots, h_{p-1}^\varepsilon \subset H, \quad \text{что} \quad \sum_{i=1}^{p-1} (h_i^\varepsilon(u))^2 > 0 \quad \text{на } B_\varepsilon.$$

Следовательно, $c_p^1 \geq c_p - \varepsilon$, т. е. $c_p^1 \geq c_p$.

Пусть $c_p^1 > c_p$, т. е. $c_p^1 = c_p + \delta$, $\delta > 0$. Тогда найдется такой набор $h_1^\delta, \ldots$ $\ldots, h_{p-1}^\delta$, что

$$\{\inf f(u) \mid F(u) = 0,\ h_1^\delta = \ldots = h_{p-1}^\delta = 0\} \geq c_p + \frac{\delta}{2},$$

т. е. на

$$\left\{f \leq c_p + \frac{\delta}{4}\right\} \cap \{F = 0\} \overset{\text{den}}{=} A_\delta$$

$$f(u) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^4\right)dx, \quad F(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2 dx - 1.$$

Группа $G = T \times C$, дискретная C состоит из тождественного оператора и инволюции. Для всей G и тех ее подгрупп, которые потребуются (C, T и дискретные подгруппы T) определен интеграл Хаара, который и принимается как соответствующее среднее (инверсионно инвариантное). Термин „подгруппа" используется далее только для подгрупп $K \subset G$ и m_K — соответствующее среднее.

Для подобных пар f, F многократно проверялось выполнение условия компактности Пале – Смейла и строились потоки $D(u, t)$. Последнее, однако, придется повторить, чтобы убедиться в применимости дополнительного принципа Коулмэна.

Шаг 2. Пусть $T(n)$ и $T(2n)$ — две подгруппы, функция $u \in I(T(n)) \cap \cap E(T(2n))$, т. е. она инвариантна при поворотах на углы $2\pi k/n$ и ее $m_{T(2n)}$-среднее равно нулю. Для этой функции рассмотрим любую лебегову точку $x_0 \in \Omega$ и любую неотрицательную непрерывную функцию $h_\varepsilon(x)$ (как элемент W_2^{-1}) с носителем в малой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$. В этом случае

$$\langle h_\varepsilon(x), u \rangle = \langle h_\varepsilon(x), gu \rangle = \langle g^* h_\varepsilon(x), u \rangle, \quad g \in T(n),$$

откуда (в силу произвольности h) следует повторяемость значений (существенных) функции u в $2\pi k/n$-поворотах точки x_0. Повернем x_0 на $2\pi/2n$ — это будет точка x_1 — и так же получим повторяемость функции u в $2\pi k/n$-поворотах точки x_1.

Однако в силу нулевого $m_{T(2n)}$-среднего значения u в x_0 и x_1 отличаются знаком, совпадая по модулю. Следовательно, то же самое верно и для u^3. Поэтому если вложить u^3 в W_2^{-1}, то

$$m_{T(2n)}[g^* u^3] = 0 \quad \text{при} \quad u \in E(T(2n)) \cap I(T(n)). \tag{8}$$

Шаг 3. Для справедливости дополнительного принципа Коулмэна достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. *Для* $f(u)$ *выполняется условие* d. 2) *из п.* 2.

Доказательство до последнего момента не требует выполнения (8) и проводится для несколько более общей ситуации.

1. Поскольку $n(u) = 1/2\|u\|^2$ — инвариантный функционал, то дуальный оператор $J(u) = n'(u): E \to E^*$ имеет свойство $J(gu) = (g^*)^{-1} J(u)$. Пусть теперь K — подгруппа, $w \in I(K)$, $u \in E(K)$, тогда

$$0 = \langle Jw, m_K[gu] \rangle = m_K \langle Jw, gu \rangle = m_K \langle g^* Jw, u \rangle =$$

$$= m_K \langle Jg^{-1} w, u \rangle = m_K \langle Jw, u \rangle = \langle Jw, u \rangle.$$

Значит, $I(K) \perp E(K)$, а операторы $u \to m_K[gu]$, $u \to u - m_K[gu]$ — ортопроекторы. Аналогично ортопроектором будет $m_K[g^* v]: E^* \to (I(K))^*$.

2. Операторы $g \in K$ унитарны, что дает возможность непосредственного построения эквивариантного поля $\Phi(u)$, как проекции $-f'(u)$ на $\operatorname{Ker} F'(u)$. Эта проекция есть

$$\Phi(u) = -\left(J^{-1} f'(u) - \left\langle f'(u), \frac{J^{-1}F'(u)}{\|F'(u)\|_*}\right\rangle \frac{J^{-1}F'(u)}{\|F'(u)\|_*}\right).$$

Поскольку

$$f'(gu) = (g^*)^{-1}f'(u), \quad F'(gu) = (g^*)^{-1}F'(u),$$
$$J^{-1}(g^*v) = g^{-1}J^{-1}(v), \quad \left\|(g^*)^{-1}v\right\|_* = \|v\|_*,$$

то, очевидно, $\Phi(gu) = g\Phi(u)$.

3. i) $$\left|\langle f'(u), \Phi(u)\rangle\right| = \left|\langle f'(u), \Pi_{\operatorname{Ker} F'(u)} f'(u)\rangle\right| =$$
$$= \|\Pi f'(u)\|^2 = \|\Phi(u)\|^2 \text{ (}\Pi\text{ — проекция);}$$

ii) Поскольку при

$$u \in E(K) \quad m_K[(g^*)^{-1}F'(u)] = m_K[F'(gu)] = 0$$

(очевидное свойство d. 1 для подгруппы), то $F'(u) \in (E(K))^*$. Следовательно, $F'(u) \perp I(K)$, т. е. $I(K) \subset \operatorname{Ker} F'(u)$.

В таком случае $m_K[f'(gu)] = m_K[(g^*)^{-1}f'(u)]$ — проекция $f'(u)$ на $(I(K))^*$ или (перенося из E^* и E) проекция $f'(u)$ на подпространство $I(K)$ пространства $\operatorname{Ker} F'(u)$. Значит,

$$\|m_K[f'(gu)]\| \le \|\Pi_{\operatorname{Ker} F'(u)} f'(u)\| = \|\Phi(u)\|,$$

откуда

$$|m_K\langle f'(u), \Phi(g^{-1}u)\rangle| = |m_K\langle f'(gu), \Phi(u)\rangle| \le$$
$$\le \|m_K[f'(gu)]\| \, \|\Phi(u)\| \le \|\Phi(u)\|^2 = |\langle f'(u), \Phi(u)\rangle|.$$

4. Для доказательства леммы осталось выяснить, в каком случае здесь возможно равенство, и только в этом месте существенно условие (8), т. е. конкретизация $f(u)$ и подгрупп. (В шаге 5 доказательства теоремы условие (8) еще раз потребуется.)

Считаем, что

$$K = T(2n), \quad u \in E(T(2n)), \quad m = m_{T(2n)}.$$

Равенство возможно, если

$$\Pi_{\operatorname{Ker} F'(u)} f'(u) = \Pi_{I(T(2n))} f'(u) \in I(T(2n)).$$

Однако f' содержит линейный член L, для которого всегда

$$m[gu] = 0 \Rightarrow m[g^*Lu] = m[Lgu] = 0,$$

и кубический, для которого среднее равно нулю согласно условию (8). Значит, $\Pi_{I(T(2n))} f'(u) = 0$ и равенство возможно лишь при $f'(u) \perp \operatorname{Ker} F'(u)$, т. е. на собственных функциях (на $\mathfrak{R}$). Это доказывает лемму.

Шаг 4. Продолжим доказательство теоремы. Применим прямой принцип Коулмэна к подгруппе T. (Собственно, не сам принцип, а факт движения траекторий $D(I(T), t)$ по $I(T)$.) В линейном пространстве $I(T)$ имеем вариационную задачу с теми же f, F и потоком, эквивариантным относительно группы C. Пространство $I(T)$ бесконечномерно, т. е. род $Cr[\{F = 0\} \cap I(T)] = \infty$. Условие компактности Пале – Смейла легко проверяется (и многократно проверено в аналогичных задачах в разных работах). Следовательно, применим стандартный вариант теории Люстерника – Шнирельмана: каждому критическому числу $c_{0,k}$ соответствует решение задачи (1) – (4) на поверхности $\{f = c_{0,k}\}$.

Если $c_{0,p} = c_{0,p+1} = \ldots = c_{0,p+k}$, то уровню $\{f = c_{0,p}\}$ соответствует множество решений $A_{c_{0,p}}$, род которого не меньше $k+1$. Поэтому не может совпадать бесконечное число разных $c_{0,p}$, ибо по условию Пале – Смейла множество $A_{c_{0,p}}$ компактно и не может иметь бесконечный род. Это — утверждение A) теоремы.

Шаг 5. Для доказательства утверждений B) и C) сначала применяем прямой принцип Коулмэна к группе $T(n)$, переводя, тем самым, задачу в подпространство $I(T(n))$. Затем в этом подпространстве применяем дополнительный принцип к группе $T(2n)$. Таким образом, задача сводится к $E^{n,2n}$ — прямому дополнению к $I(T(2n))$ в $I(T(n))$. Утверждение C) теоремы теперь очевидно. Пространство $E^{n,2n}$ бесконечномерно (в него входят, например, для $n = 3$ функции, указанные в комментариях к теореме). В нем действует группа C.

В связи с тем, что выполнено не только d.2), но и условие (8), сохраняется квалифицированное убывание f вдоль $D_{\perp}$ вне окрестностей множества решений (1) – (4). Это следует из формулы, определяющей поле $\Phi_{\perp}$ в теореме 2, и это — по сути — условие Пале – Смейла.

Теперь применяем стандартную теорию Люстерника – Шнирельмана и выводим утверждение B) теоремы

***Замечание* 4.** Применение данного метода к линейным задачам значительно расширяет возможности в силу легкости проверки условия d.2) при более сложных сочетаниях групп. Это можно использовать как альтернативу разделению переменных, конечно, в качественном плане.

Наконец отметим, что методы теории Морса для более-менее сложных групп активно используются в последние два десятилетия (подробнее см. [15]). Однако теория Морса не дает таких численных возможностей, как теория Люстерника – Шнирельмана с подходящим понятием рода и вычислениями по формуле (7).

1. *Капитанский Л. В., Ладыженская О. А.* О принципе Коулмэна нахождения стационарных точек инвариантных функционалов // Докл. АН СССР. – 1983. – **270**, № 3. – С. 529–532.
2. *Ladyženskaya O.* On finding symmetrical solutions of field theory variational problems // Proc. Int. Congr. Math., Aug. 16–24, Warszawa. – 1983. – P. 1315–1329.
3. *Суворов С. Г.* Критические точки функционалов с полугрупповой инвариантностью // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 185.
4. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 392 с.
5. *Суворов С. Г.* Собственные функции нелинейных эллиптических операторов. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. – 94 с.
6. *Шварц А. С.* Квантовая теория поля и топология. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
7. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. – М.: Мир, 1973. – 136 с.
8. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 654 с.
9. *Скрыпник И. В.* Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Совр. пробл. математики. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – 1976. – **9**. – С. 131–254.
10. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
11. *Суворов С. Г.* Задача Стокса с нелинейным источником // Функцион. и числ. методы мат. физики. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 230–233.
12. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
13. *Fučik S., Nečas J., Souček J., Souček V.* Spectral analysis of nonlinear operators. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973. – 288 p.
14. *СМБ.* Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
15. *Parker T. H.* A Morse theory for equivariant Yang–Mills // Duke Math. J. – 1992. – **66**, № 2. – P. 337–356.

Получено 17.07.2000