УДК 517.98

С. В. Попович (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Т. Ю. Майстренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

C^*-АЛГЕБРИ, ПОВ'ЯЗАНІ З $\mathcal{F}_{2^n}$ УНІМОДАЛЬНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

We consider C^*-algebras associated with simple unimodal one-dimensional ambiguous dynamical systems $(f, \mathbb{R})$ with some special restrictions. For these algebras, we give the complete classification of irreducible representations in Hilbert spaces and describe the dual space. As example, we consider a one-parameter family $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

Розглядаються C^*-алгебри, пов'язані з простими унімодальними одновимірними неоднозначними динамічними системами $(f, \mathbb{R})$ і з деякими спеціальними обмеженнями. Для цих алгебр наведено повну класифікацію незвідних зображень у гільбертових просторах та описано дуальний простір. Як приклад розглядається однопараметрична сім'я $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

1. Прості динамічні системи. Нагадаємо необхідні результати, наведені в літературі [1 – 3]. Під динамічною системою будемо розуміти (якщо явно не зазначено інакше, лише одновимірні неперервні системи) неперервне відображення $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, або $f: I \to I$, де $I \subset \mathbb{R}$ — замкнений обмежений інтервал. Під орбітою динамічної системи $(f, \mathbb{R})$ ми розуміємо послідовність $\delta = (x_k)_{k \in P}$, де P — одна з множин $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$, причому $f(x_k) = x_{k+1}$. Але інколи будемо розглядати орбіту як множину $\{x_k \mid k \in P\}$. Множину всіх орбіт позначимо $\mathrm{Orb}(f)$. Для $x \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mathcal{O}_+(x)$ односторонню праву орбіту, тобто $\left(f^k(x)\right)_{k \geq 0}$. Для кожної орбіти $\delta \in \mathrm{Orb}(f)$ визначимо $\omega(\delta)$ як множину точок накопичення правої півробіти і $\alpha(\delta)$ як множину точок накопичення лівої півробіти. Під позитивною орбітою $(f(), \mathbb{R})$ ми розуміємо послідовність $\omega = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ таку, що $f(x_k) = x_{k+1}$ і $x_k > 0$ для всіх k. Одностороння додатна орбіта — це послідовність $\omega = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (фоківська орбіта) така, що $x_1 = 0$ і $f(x_k) = x_{k+1}$, $x_k > 0$ для $k > 1$ або $\omega = (x_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ (антифоківська орбіта) така, що $x_{-1} = 0$ і $f(x_k) = x_{k+1}$, $x_k > 0$ для $k < -1$. Визначимо $\mathrm{Orb}_+(f)$ як множину всіх додатних орбіт. Зазначимо, що $\omega(\delta) = \varnothing$ для кожної антифоківської орбіти δ і $\alpha(\delta_1) = \varnothing$ для фоківської орбіти δ_1. Оскільки ми будемо розглядати лише обмежені зверху функції f і додатні орбіти, ми можемо розглядати динамічні системи, визначені на замкненому інтервалі $[0, \sup f]$. Ми будемо мати справу в основному з простими динамічними системами, які допускають декілька еквівалентних характеризацій.

***Означення* 1.** *Динамічна система (f, I) називається простою, якщо для кожного $x \in I$ $\omega(x) = \omega(\mathcal{O}_+(x))$ — цикл.*

Зауважимо, що простота системи еквівалентна тому, що множина $\mathrm{Per}(f)$ замкнена, а також умові, що кожна не блукаюча точка періодична (див. [2], теорема 3.14).

Функція f називається частково монотонною, якщо I розкладається в об'єднання скінченної кількості підінтервалів, на кожному з яких f монотонна. Для таких динамічних систем простота еквівалентна умові $\mathrm{Fix}\left(f^{2^{m+1}}\right) = \mathrm{Fix}\left(f^{2^m}\right)$ для деякого додатного цілого m (див. [1, с. 74], теорема 15). Клас динамічних систем з останньою умовою позначається $\mathcal{F}_{2^m}$. Зазначимо, що коли $\mathrm{Per}(f)$ замкнена, то за теоремою 3.12 [2], довжина кожного циклу є степенем 2 і не існує гомоклінічних орбіт.

2. Прості унімодальні відображення. У цій роботі будемо розглядати унімодальні відображення (означення див. в [2]) функції f на відрізку $[0,1]$ такі, що $f(0)=f(1)=0$. Зафіксуємо деякі позначення, що у подальшому будуть інтенсивно використовуватись.

$B_0=s_0$ і $B_1=s_1$ позначатимуть дві нерухомі точки. $B_{2^k}=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{2^k}\}$ позначатиме цикл довжини 2^k, де $\beta_i<\beta_j$, якщо $i<j$.

$B_{2^k}=B^-_{2^k}\dot{\bigcup}B^+_{2^k}$, де $B^-_{2^k}=\{\beta_1,\ldots,\beta_{2^{k-1}}\}$ і $B^+_{2^k}=\{\beta_{2^{k-1}},\ldots,\beta_{2^k}\}$. Позначимо через $B_{2^k}(f^2)$ цикл періоду 2^k динамічної системи (f^2,I_2), де I_2 — деякий інваріантний відносно f^2 інтервал.

Означення 2. 1. *Будемо говорити, що орбіта* $\delta=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *приклеєна до точки* β_i *циклу* B_{2^k}, *якщо існує ціле* k_0 *таке, що* $x_{k_0}=\beta_i$ *і* $x_k\notin B_{2^k}$ *для всіх* $k<k_0$. *Орбіта приклеєна до циклу, якщо вона приклеєна до деякої його точки.*

2. *Будемо говорити, що орбіта вироджена, якщо вона приклеєна до циклу не максимальної довжини.*

Нехай $\beta_i\in B_{2^m}$ і позначимо $D^{\beta_i}_{B_{2^k}}=\{\delta\in P_{B_{2^k}}\mid\delta$ приклеєна до $\beta_i\}$. Позначимо через $D^{\beta_i}_{B_{2^k}}(f^2)$ множину $D^{\beta_j}_{B_{2^{k-1}}}(f^2)$, де $j=i-2^{m-1}$ і $\beta_j\in$ $\in B_{2^{m-1}}(f^2)$.

Наступна теорема і наслідок з неї дають опис усіх додатних орбіт.

Теорема 1. *Нехай* $(f,I)\in\mathcal{F}_{2^n}$ — *динамічна система з унімодальним відображенням* f, *яке має тільки дві нерухомі точки* $s_0=0$, $0<s_1<1$, *і припустимо, що для кожного* $m\le n$ *існує лише один цикл періоду* 2^m, *котрий є відштовхуючим для* $m<n$ *і притягуючим для* $m=n$. *Покладемо* $P_B=$ $=\{\delta\mid\delta\in\mathrm{Orb}_+(f),\ \alpha(\delta)=B\}$ *для кожного циклу* B *періоду* $m<n$.

Тоді:

1. $\mathrm{Orb}_+(f)=\dot{\bigcup}_B P_B$, *де об'єднання береться по всіх відштовхуючих циклах.*

2. *Для кожного відштовхуючого циклу* B *існує* $I_B=[t_1,t_2)$ *і взаємно однозначне відображення* $\Phi:I_B\to P_B$ *таке, що* $t\in\Phi(t)$ *для кожного* $t\in I_B$. *Більш того,* I_B *може бути обраний у довільному околі* B.

3. $I_{B_1}\bigcap I_{B_2}=\varnothing$ *для* $B_1\ne B_2$.

4. *Якщо дві орбіти* P_B *мають спільну точку у* I_B, *то вони співпадають.*

Доведення. Перше твердження очевидно випливає з леми 1 [4].

1. Спочатку розглянемо випадок нерухомої точки s_0. Нехай f_+^{-1}, f_-^{-1} — дві гілки функції, оберненої до f, такі, що $f_+^{-1}(s_1)=s_1$. Для зручності читача наведемо доведення відомого факту $M=\sup_{x\in[0,1]}f(x)<1$. Припустимо, що $M\ge 1$, і позначимо $J_0=[f_+^{-1}(1),1]$, $J_k=f_-^{-1}(J_{k-1})$ для всіх $k\ge 1$. Тоді легко перевірити, що $f(J_0)=[0,1]$ і $J_k\bigcap J_s=\varnothing$, якщо $k\ne s$. Оскільки $J_k\subseteq$ $\subseteq f^{(k+1)}(J_k)=[0,1]$, то за теоремою про середнє значення, застосованою до функції $\varphi(x)=f^{(k+1)}(x)-x$, існує точка $\theta\in J_k$ така, що $f^{(k+1)}(\theta)=\theta$. Оскільки $f^{(s)}(\theta)\in J_{k-s}$, то одностороння права піворбіта точки θ є циклом періоду $k+1$. А значить, динамічна система (f,I) не є простою.

Далі покажемо, що $f_+^{-1}\left(f_-^{-1}(s_1)\right) > M = \max_{x \in I} f(x)$. Нехай $M = f(\xi)$. Якщо $M \leq \xi$, то ця властивість очевидна, отже, припустимо, що $M > \xi$. Розглянемо відображення $g(x) = f^2(x)$ і позначимо через c і d прообрази нерухомої точки s_1 відносно функції g такі, що $c < s_1 < d$, причому відрізок $[c, d]$ не містить інших прообразів точки s_1 (тобто c і d є найближчими до s_1 прообразами). Тоді $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$, де $I_3 = [0, c]$, $I_1 = [c, s_1]$, $I_2 = [s_1, d]$, $I_4 = [d, 1]$. Легко бачити, що $f(I_1) \subseteq I_2$, $f(I_2) \subseteq I_1$, $f(I_3) \cup f(I_4) \subseteq I_1 \cup I_3$. Отже, I_1 та I_2 є інваріантними відносно функції g. А оскільки $M > \xi$, то $\sup_{x \in [0,1]} g(x) = \sup_{x \in [0,1]} f^{(2)}(x) = M$. Але динамічна система $(g(\,), I_2)$ проста, а значить, $\sup_{x \in I_2} g(x) < d$. Помітивши, що $d = f_+^{-1}\left(f_-^{-1}(s_1)\right)$, маємо $f_+^{-1}\left(f_-^{-1}(s_1)\right) > M$. Тоді

$$f_+^{-1}(I_3) \subset (M, +\infty), \tag{1}$$

$$f_-^{-1}(I_3) \subset I_3. \tag{2}$$

Нехай $\delta \in \mathrm{Orb}_+(f, I)$ така, що $\delta \cap I_3 \neq \varnothing$. Тоді можна вважати, що $\delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, де $x_0 \in I_3$. З (1), (2) випливає, що $x_{-k} = f_-^{(-k)}(x_0) \in I_3$ для всіх $k \geq 0$. Кожна періодична точка, не рівна s_0, належить $I_1 \cup I_2$ (оскільки функція f монотонно зростає на інтервалі I_3 та $I_3 \cap f(I_1 \cup I_2) = \varnothing$), отже, $\alpha(\delta) = \{s_0\}$. Позначимо $B_0 = \{s_0\}$, $B_1 = \{s_1\}$ і розглянемо $\delta \in P_{B_0}$, $\delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Означення α-граничної множини дає можливість припустити, що $x_0 \in I_3$. Отже, $x_{-k} = f_-^{(-k)}(x_0)$ для довільного $k \geq 0$. Таким чином, ми довели, що орбіта $\delta \in P_{B_0}$ визначається своєю точкою $x_0 \in I_3$ за формулою

$$x_k = \begin{cases} f_-^{(k)}(x_0), & k < 0, \\ f^{(m)}(x_0), & m \geq 0. \end{cases}$$

Отже, відображення $\Phi\colon I_3 \setminus s_0 \ni x \to \delta_x \in P_{B_0}$ сюр'єктивне (δ_x — орбіта, що проходить через точку x).

Визначимо $I_{B_0} = \left(f_-^{(-2)}(s_1), f_-^{(-1)}(s_1)\right]$. Тоді $\bigcup_{n \geq 0} f_-^{(-n)}(I_{B_0}) = \left(0, f_-^{(-1)}(s_1)\right] = I_3 \setminus \{0\}$, причому множини цього об'єднання не перетинаються, тобто $f_-^{(-k)} \cap f_-^{(-m)} = \varnothing$, якщо $k \neq m$. А значить, звуження функції Φ на I_{B_0} є бієктивним відображенням на P_{B_0}.

2. У загальному випадку доведемо теорему за індукцією. Впорядкуємо цикли $B_0 < B_1 < B_2 < \ldots < B_{2^k} < \ldots$, вважаючи $B_0 = B_{2^{k-1}}$ при $k = 0$. Цей випадок було розглянуто вище: $k - 1 \to k$.

Припустимо, що для довільної динамічної системи $(\tilde{f}, I)$, яка задовольняє умови теореми при деякому n, і для довільного відштовхуючого циклу $B_{2^l}(\tilde{f})$, $l < k$, цієї системи існує інтервал $I_{B_{2^l}}(\tilde{f})$ такий, як в умові 2 теореми. Покажемо, що для динамічної системи (f, I), яка задовольняє умови теореми при деякому (можливо іншому) значенні n, і для її відштовхуючого циклу B_{2^k} існує інтервал $I_{B_{2^k}}$ такий, як в умові 2. Розглянемо динамічну систему $\left(f^{(2)}, I_2\right)$.

Означення 3. *Для* $x \in [0, M]$ *лівим продовженням* x *назвемо орбіту* $\mu_-(x) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, *коефіцієнти якої визначаються за правилом* $y_k = f^k(x)$ *при* $k \geq 0$ *і* $y_k = f_-^{-1}(y_{k+1})$ *при* $k < 0$. *Очевидно, що* $\mu_-(x) \in P_{B_0}$. *Для* $x \in [s_1, M]$ *правим продовженням* x *назвемо орбіту* $\mu_+(x) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, *для якої* $y_k = f^k(x)$ *при* $k \geq 0$, $y_{-1} = f_+^{-1}(x)$ *і* $y_{-k} = f_-^{-1}(y_{-k+1})$ *при* $k > 1$.

Теорема 2. *Нехай* (f, I) *така, як у теоремі* 1 *із мінімальним можливим* n, *і* $\beta_i \in B_{2^m}$. *Тоді:*

1. $D_{B_{2^k}}^{\beta_i} = \varnothing$, *якщо* $k \geq m$.

2. *Якщо* $\beta_i \in B_{2^m}^-$, *то* $D_{B_0}^{\beta_i} = \{\mu_-(\beta_i)\}$ *складається з однієї орбіти.* $D_{B_{2^k}}^{\beta_i} = \varnothing$, *якщо* $k \geq 0$.

3. *Якщо* $\beta_i \in B_{2^m}^+$, *то* $D_{B_0}^{\beta_i}$ *складається з* $\mu_-(x_k)$, $\mu_+(x_k)$ *для цілих* k, *де* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in D_{B_{2^l}}^{\beta_i}(f^2)$, $l < m$.

4. *Якщо* $k < m$ *і* $\beta_i \in B_{2^m}^+$, *то* $D_{B_{2^k}}^{\beta_i} = \left\{ r^{-1}(\delta) \,\middle|\, \delta \in D_{B_{2^k}}^{\beta_i}(f^2) \right\}$.

Доведення. Будемо використовувати позначення, введені у теоремі 1. Якщо $\beta_i \in B_{2^m}^-$, то $f_+^{-1}(\beta_i)$, що лежить в I_2, є точкою циклу B_{2^m} (оскільки $f_-^{-1}(\beta_i) \in I_3$). Звідси випливає, що якщо орбіта $\delta = (x_l)_{l\in\mathbb{Z}} \in D_B^{\beta_i}$ і $x_0 = \beta_i$, то $x_{-1} = f_-^{-1}(x_0) \in \left(0, f_-^{-1}(s_1)\right]$, а отже, $x_{-s} = f_-^{-1}(y_{-s+1})$ для $s = 2, 3, \ldots$ (див. доведення теореми 1). Таким чином, єдиним можливим елементом множини $D_B^{\beta_i}$ є орбіта $\delta = \mu_-(\beta_i)$. Оскільки α-граничною множиною цієї орбіти є точка s_0, то $D_B^{\beta_i} = \varnothing$, якщо $B \neq B_0$ і $D_{B_0}^{\beta_i} = \{\mu_-(\beta_i)\}$.

Нехай $\beta_i \in B_{2^m}^+$ і $\delta = (x_l) \in D_{B_0}^{\beta_i}$. Тоді існує ціле l_0 таке, що $x_{l_0} \in I_2$, але $x_l \notin I_2$ при $l < l_0$. Оскільки $f_-^{-1}(x_{l_0})$, $f_+^{-1}(x_{l_0}) \in I_1$, то x_{l_0-1} може бути одним із цих значень. За припущенням $x_{l_0-2} \notin I_2$, отже, $x_{l_0-2} = f_-^{-1}(x_{l_0-1}) \in \left(0, f_-^{-1}(s_1)\right]$, а значить, для довільної підпослідовності коефіцієнтів x_l, $l < l_0 - 2$, маємо $x_l = f_-^{-1}(x_{l+1})$ (див. доведення теореми 1). Оскільки $f^2 : I_2 \to I_2$, $x_{l_0+2l} \in I_2$ для довільного $l \geq 0$ і $x_{l_0} \leq M$, то існує одностороння орбіта $\gamma = (y_s)$ динамічної системи $\left(f^2, I_2\right)$ така, що $y_s = x_{l_0+2s}$. Очевидно, що γ приклеєна до точки β_i. Це доводить твердження 3 теореми.

Нехай $\beta_i \in B_{2^m}^+$ і $\delta = (x_l) \in D_{B_{2^k}}^{\beta_i}$. Без втрати загальності можемо покласти $x_0 \in I_2$. Тоді $x_{2l} \in I_2$ при всіх цілих l та $\delta = r^{-1}(\gamma)$, де $\gamma = (x_{2l})_{l\in\mathbb{Z}} \in D_{B_{2^k}}^{\beta_i}(f^2)$. Теорему доведено.

Нехай H — гільбертовий простір з ортогональним базисом $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, U — унітарний оператор, визначений як $Ue_k = e_{k+1}$. Для кожної орбіти $\delta = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Orb}_+(f)$ існує відштовхуючий цикл B такий, що $\delta \in P_B$. Надалі будемо завжди вважати, що $x_0 \in I_B$. Визначимо оператор C_δ за правилом $C_\delta e_k = x_k e_k$. Нехай Z позначає множину неперіодичних орбіт. Покладемо

Легко бачити, що динамічна система $\left(\tilde{f},[0,1]\right)$, де $\tilde{f} = f^{(2)}((d-s_1)x+s_1)-s_1$, задовольняє всі умови теореми, а значення n цієї системи на одиницю менше, ніж значення n для системи (f,I). При цьому динамічні системи $\left(f^{(2)},I_2\right)$ та $\left(\tilde{f},[0,1]\right)$ є спряженими. Оскільки $B_{2^{k-1}}(f^2)$ є відштовхуючим циклом системи $\left(f^{(2)},I_2\right)$ періоду 2^{k-1}, то за припущенням індукції існує інтервал $I_{B_{2^{k-1}}(f^2)}$ і біективне відображення $\tilde{\Phi}\colon I_{B_{2^{k-1}}(f^2)} \to P_{B_{2^{k-1}}(f^2)}$. Оскільки $f(I_1)\subseteq I_2$, $f(I_2)\subseteq I_1$, то орбіта $\delta=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in P_{B_{2^k}}\subseteq \mathrm{Orb}_+(f,I)$ розбивається на дві частини $\delta=\delta_1\cup\delta_2$, одна з яких належить множині $\mathrm{Orb}_+\left(f^2,I_2\right)$. Нехай $\delta_1=(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ та $\delta_2=(x_{2k})_{k\in\mathbb{Z}}$ (припускаємо, що $x_0\in I_2$). Оскільки $x_{2k+1} = f(x_{2k})$, відображення $r\colon\delta\to\delta_2$ є біекцією з $P_{B_{2^k}}$ в $P_{B_{2^{k-1}}}(f^2)$. Отже, покладемо $I_{B_{2^k}} = I_{B_{2^{k-1}}}(f^2)$ та $\Phi = r^{(-1)}\circ\tilde{\Phi}$. Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Відображення $\Phi\colon \bigcup_B I_B \ni t \to \delta_t$, побудоване при доведенні теореми, є біекцією між об'єднанням n копій інтервалу $[0,1)$ і множиною нециклічних додатних орбіт.*

3. Обгортуюча C^*-алгебра. В роботі В. Л. Островського і Ю. С. Самойленка (теореми 16, 20 [1]) встановлено зв'язок між незвідною парою операторів X, X^*, пов'язаних співвідношенням $XX^* = f\left(X^*X\right)$, і орбітами динамічної системи $(f,\mathbb{R}_+)$. Теорема 3 [4], яка є наслідком цього факту для випадку, коли f — поліном, описує незвідні зображення $*$-алгебри

$$A_f = \mathbb{C}\langle X, X^* \mid XX^* = f(X^*X)\rangle.$$

Зокрема, можуть виникати фоківські, антифоківські та скінченновимірні зображення.

Нехай f — обмежений зверху ермітовий поліном (отже, відображення f частково монотонне й неперервне). Покладемо $C=\sup f$. Тоді для кожного зображення π $*$-алгебри A_f маємо $\|X\|\le\sqrt{C}$. Отже, існує обгортуюча C^*-алгебра, яку ми позначимо через $C^*(A_f)$. Зауважимо, що за теоремою 3.3 [2] для $f\in C^1(I,I)$ простота динамічної системи еквівалентна умові $(f,I)\in\mathcal{F}_{2^m}$ для деякого цілого m.

В наступних теоремах, у випадку, коли f не поліном, під $C^*(A_f)$ ми розуміємо C^*-алгебру, що отримується з вільної $*$-алгебри $\mathcal{F}\left(X,X^*\right)$, породженої X з переднормою $\|b\| = \sup_\pi\|\pi(b)\|$, де супремум береться за всіма $\pi\in\mathrm{Rep}\left(\mathcal{F}\left(X,X^*\right)\right)$ такими, що $\pi\left(XX^*\right) = f\left(\pi\left(X^*X\right)\right)$ за стандартною процедурою факторизації і поповнення. Ця C^*-алгебра має очевидні універсальні властивості, подібні до тих, які мають місце у випадку, коли f — поліном.

4. Опис двоїстого простору $C^*(A_f)$. З приводу означення спектра C^*-алгебри див. гл. 3 [4].

При доведенні попередньої теореми було побудовано відображення $r\colon \bigcup_{k\ge1}P_{B_{2^k}}\to\bigcup_{k\ge1}P_{B_{2^{k-1}}}(f^2)$ таке, що $r\colon P_{B_{2^k}}\to P_{B_{2^{k-1}}}(f^2)$, де f^2 розглядається як відображення I_2. Якщо $\delta=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ і нумерація обрана так, що $x_0\in I_2$, то, очевидно, $r(\delta)=(x_{2k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Якщо $\delta=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Orb}_+\left(f^2,I_2\right)$, то, як легко бачити, $\left(r^{-1}(\delta)\right)_{2k}=y_k$, $\left(r^{-1}(\delta)\right)_{2k+1}=f(y_k)$.

$(\Psi(X))(\delta) = U\sqrt{C_\delta}$ і продовжимо на $C^*(\mathcal{A}_f)$. Ми маємо зображення Ψ: $C^*(\mathcal{A}_f) \to B(H)^Z$ елементів обгортуючої алгебри операторнозначними функціями на Z. Далі ми побачимо, що коли Z наділена топологією, індукованою з двоїстого простору, $\hat{C}^*(\mathcal{A}_f)$ і R позначає підпростір невироджених орбіт, то для всіх $y \in C^*(\mathcal{A}_f)$ $\Psi(y)$ є неперервною на R в топології норми $B(H)$ і неперервною на Z у сильній топології.

Опишемо тепер двоїстий простір обгортуючої C^*-алгебри $C^*(\mathcal{A}_f)$. В наступних теоремах ми позначаємо через $[X]$ замикання X у топології $\hat{C}^*(\mathcal{A}_f)$, де підмножина $X \subset \mathrm{Orb}_+(f)$ ототожнюється з множиною відповідних зображень. Якщо $Y \subset \mathbb{R}$, то $\overline{Y}$ позначає замикання в топології дійсних чисел $\mathbb{R}$. Множина циклічних орбіт, яку будемо позначати $\mathrm{Cyc}(f)$, природним чином ототожнюється з $\mathrm{Per}(f)/_\sim$, де $x \sim y$, якщо x і y належать одній орбіті.

Лема 1. *Нехай динамічна система* (f, I) *така, як у теоремі* 1, *і* $\delta \in \mathrm{Orb}_+(f)$ *і* $\delta \cap I_B \neq \varnothing$. *Тоді* $|\alpha(\delta)| \le |B|$.

Доведення. Якщо $B = B_0$ і $\delta \cap I_3$, то $\alpha(\delta) = B_0$. Припустимо, що теорема вірна для $B_{2^{k-1}}$, і доведемо її для B_{2^k}. Якщо $\alpha(\delta) = B_0$, то все доведено, інакше $r(\delta) \in \mathrm{Orb}_+\left(f^{(2)}, I_2\right)$ і $r(\delta) \cap r(B) \neq \varnothing$. Оскільки $r(B)$ є циклом періоду $1/2|B|$, ми можемо застосувати припущення індукції $|\alpha(r(\delta))| \le |r(B)|$, але $|\alpha(r(\delta))| = 1/2|\alpha(\delta)|$. Це завершує доведення.

На множині підмножин множини нециклічних орбіт Z розглянемо операцію $\mathrm{cl}(X)$, де $X \subseteq Z$, визначену за правилом $\mathrm{cl}(X) = \left\{\delta \in Z \,\middle|\, \delta \subseteq \overline{\bigcup_{\tau \in X} \tau}\right\}$.

Лема 2. *Для довільної підмножини* $\Sigma \subseteq Z$ *орбіта* $\delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *належить* $\mathrm{cl}(\Sigma)$ *тоді і тільки тоді, коли множина* $\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x_k \in \overline{\bigcup_{\tau \in \Sigma} \tau}\right\}$ *містить нескінченно багато від'ємних цілих чисел. При цьому знайдеться послідовність орбіт* $\delta_l = \left(y_k^l\right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ *така, що* $\lim_{l \to \infty} y_k^l = x_k$ *для всіх цілих* k.

Доведення. Оскільки f, а отже, і всі її ітерації неперервні, з умови, що множина $\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x_k \in \overline{\bigcup_{\tau \in \Sigma} \tau}\right\}$ містить нескінченно багато від'ємних цілих чисел, випливає, що ця множина є множиною всіх цілих чисел. Доведемо другу частину.

Знайдеться послідовність $(\varepsilon_k)_{k \ge 0}$ така, що

$$f^s\left(O_{\varepsilon_k}(x_{-k})\right) \subset O_{2^{-k}}(x_{-k+s}), \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Оскільки $\delta \in \mathrm{cl}(\Sigma)$, то існують $\delta_l = \left(y_k^l\right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ такі, що $y_{-k}^k \in O_{\varepsilon_k}(x_{-k})$. Покажемо, що $\lim_{l \to \infty} y_k^l = x_k$ для всіх цілих k. Справді, $y_0^l = f^l\left(y_{-l}^l\right) \in f^l\left(O_{\varepsilon_l}(x_{-l})\right) \subseteq O_{2^{-l}}(x_0)$, отже, $\lim_{l \to \infty} y_0^l = x_0$ і, отже, $\lim_{l \to \infty} y_k^l = x_k$ для всіх додатних цілих k. Далі $y_{-k}^{l+k} = f^l\left(y_{-(l+k)}^{l+k}\right) \in f^l\left(O_{\varepsilon_{l+k}}\left(x_{-(l+k)}\right)\right) \subseteq O_{2^{-l-k}}(x_k)$, тому $\lim_{l \to \infty} y_{-k}^l = x_{-k}$. Цим завершується доведення.

Теорема 3. *Множина* Z *з операцією замикання* $\mathrm{cl}(\cdot)$ *є топологічним простором. Клас гомеоморфізму таких просторів визначається лише цілим числом* n.

$\to J^k_{B_1}(f_2)$ за формулами $\varphi_k^{-1}(f_2)\circ F\circ\varphi_k(f_1)$. Ми вже визначили F на $I_{B_0}\cup$ $\cup I_{B_1}\setminus((a_1,b_1)\cup\{b\})$. Покладемо $F(b_{f_1})=b_{f_2}$ і розглянемо довільний зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм на (a_1,b_1). Таким чином, ми визначили гомеоморфізм $I_{B_0}(f_1)\cup I_{B_1}(f_1)$ на $I_{B_0}(f_2)\cup I_{B_1}(f_2)$ відносно топології $\mathrm{cl}(\cdot)$.

Теорема 4. *Нехай динамічна система* (f,I) *така, як у теоремі* 1. *Тоді:*

Двоїстий простір (спектр) $C^*(A_f)$ *гомеоморфний* $\mathrm{Orb}_+(f)\,\dot\cup_\theta$ $\dot\cup_\theta\,(\mathrm{Cyc}(f)\times\mathbb{T})$, *де* $\theta\colon \mathrm{Cyc}(f)\times\mathbb{T}\to\mathrm{Orb}_+(f)$ *визначена за правилом* $\theta(x,\varphi)$ *— циклічна орбіта* x. *Топологія на* $\mathrm{Orb}_+(f)$ *задається такою сукупністю замкнених множин:* $\left\{\overline{\Sigma}=\left\{\gamma\in\mathrm{Orb}_+(f)\,\middle|\,\gamma\in\overline{\bigcup_{\delta\in\Sigma}\delta}\right\};\ \Sigma\subseteq\mathrm{Orb}_+(f)\right\}$ *і простір* $\mathrm{Orb}_+(f)\ \dot\cup_\theta\ (\mathrm{Cyc}(f)\times\mathbb{T})$ *є фактор-множиною незв'язного об'єднання* $\mathrm{Orb}_+(f)\,\dot\cup\,(\mathrm{Cyc}(f)\times\mathbb{T})$ *за відношенням еквівалентності, яке ототожнює циклічну орбіту* x *із* $(x,1)\in\mathrm{Per}(f)/_\sim\times\mathbb{T}$, *де топологія задається сукупністю замкнених множин.*

S замкнена у $\mathrm{Cyc}(f)\times\mathbb{T}$ *і* $\overline{\Sigma}\cup\theta^{-1}(\overline{\Sigma})$, *де* $\Sigma\subseteq\mathrm{Orb}_+(f)$. *Топологія на* $\mathrm{Cyc}(f)=\mathrm{Per}(f)/_\sim$ *— фактор-топологія, де* $\mathrm{Per}(f)\subseteq\mathbb{R}$ *наділено індукованою топологією з дійсних чисел. Більш того, спектр визначається з точністю до гомеоморфізму цілим* n.

Доведення. 1. За теоремою 3 [4] ми можемо ототожнити множину нескінченновимірних зображень з Z і множину скінченновимірних із $\mathrm{Per}(f)/_\sim\times\mathbb{T}$. Розглянемо довільну $\gamma\in\mathrm{Orb}_+(f)$. Якщо π_γ належить замиканню Σ в топології двоїстого простору, то

$$\mathrm{spec}\left(\pi_\gamma\left((XX^*)^{1/2}\right)\right)\subseteq\overline{\bigcup_{\delta\in\Sigma}\mathrm{spec}\left(\pi_\delta\left((XX^*)^{1/2}\right)\right)}.$$

Оскільки $\overline{\gamma}=\mathrm{spec}\left(\pi_\gamma\left((XX^*)^{1/2}\right)\right)$, маємо $\gamma\in\overline{\Sigma}$. Доведемо обернене твердження, тобто якщо $\gamma\in\overline{\Sigma}$, то $\pi_\gamma\in[\Sigma]$. Нехай нециклічна орбіта $\gamma\in\overline{\Sigma}$. За лемою 2 існують $\delta_l=\left(y_k^l\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\Sigma$ такі, що $\lim_{l\to\infty}y_k^l=x_k$ для всіх цілих k. Нехай H — сепарабельний гільбертовий простір з ортогональним $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Тоді $\pi_\gamma(U)=\pi_\delta(U)$, $\pi_\gamma(C^2)e_k=x_ke_{k+1}$ і $\pi_\delta\left(C^2\right)e_k=y_ke_{k+1}$. Оскільки $y_k^l\to x_k$, ми бачимо, що $\pi_{\delta_l}(C^2)$ збігається сильно до $\pi_\gamma(C^2)$. Тому $\pi_{\delta_l}(X)$ і $\pi_{\delta_l}(X^*)$ збігаються сильно до $\pi_\gamma(X)$ і $\pi_\gamma(X^*)$ відповідно. Отже, для довільного елемента f у $*$-алгебрі (A_f) послідовність $\pi_{\delta_l}(f)$ збігається сильно до $\pi_\gamma(f)$. Тому $\sup_{l\ge0}\left\|\pi_{\delta_l}(f)\right\|\ge\left\|\pi_\gamma(f)\right\|$. Це доводить, що $\pi_\gamma\in[\Sigma]$.

2. Нехай $\Sigma\subseteq Z$. Якщо $(A_f)B_{2^m}\in\overline{\bigcup_{\delta\in\Sigma}\delta}$, то існує нециклічна орбіта $\gamma\in\mathrm{cl}(\Sigma)$ така, що $B_{2^m}=\omega(\gamma)$ або $B_{2^m}=\alpha(\gamma)$. Дійсно, існує послідовність орбіт $\gamma_k\in\Sigma$ та цикл B_{2^i} такі, що $\alpha(\gamma_n)=B_{2^i}$. Внаслідок леми 1 $m\ge i$. Якщо $m=i$, то можна покласти γ рівною довільній орбіті γ_k. Нехай $m>i$, тоді існує точка накопичення $x\in I_{B_{2^i}}$ для множини $\left\{\gamma_k\cap I_{B_{2^i}}\,|\,k\ge1\right\}$ така, що $\omega(x)=B_{2^m}$. Покладемо $\gamma=\varphi(x)$. Тоді $\gamma\in\mathrm{cl}(\{\gamma_k\,|\,k\ge1\})$, що й доводить твердження. Звідси і з теореми 4 [4] випливає, що скінченновимірне зображення $\pi_{B,\varphi}\in[\Sigma]$

тоді і тільки тоді, якщо існує нескінченновимірне $\pi_\gamma \in [\Sigma]$ таке, що цикл $B = \omega(\gamma)$, або $B = \alpha(\gamma)$. Якщо $B \in [\Sigma]$, то $B \in \overline{\Sigma}$, і за теоремою 4 [4] $\theta^{-1}(B) \in [\Sigma]$, що й завершує доведення теореми.

Наслідок 2. *Зображення $\oplus_{\delta \in R_{B_0}} \pi_\delta$ алгебри $C^*(A_f)$ точне.*

Якщо $\delta \in R_{B_0}$, то $X = \overline{\{x \mid x \in \delta\}}$ є компактним підпростором у $\mathbb{R}$ і R_{B_0} є локально компактним простором. $C^*(A_f)$ є C^*-підалгеброю у C^*-алгебрі $C\left(R_{B_0}, \mathbb{Z} \times_\psi C(X)\right)$ всіх неперервних відображень із R_{B_0} в C^*-алгебру, що є схрещеним добутком $\mathbb{Z} \times_\psi C(X)$ (ψ — деякий автоморфізм $C(X)$). Гомоморфізм $\Psi: \hat{C}(A_f) \to B(H)$ є неперервним, коли $B(H)$ наділено сильною операторною топологією.

Доведення. R_{B_0} є скрізь щільним у спектрі $C^*(A_f)$, тому зображення $\oplus_{\delta \in R_{B_0}} \pi_\delta$ — точне. Якщо $n = 1$, то R_{B_0} — це внутрішність I_{B_0}. Отже, R_{B_0} з топологією, індукованою з Z, є локально-компактним простором, ізоморфним $(0,1)$. Якщо $x \in R_{B_0}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $O_\eta(x) \subset R_{B_0}$ і ціле m таке, що $f^{(m)}(y) \in O_\varepsilon(B_2)$ для всіх $y \in O_\eta(x)$. Звідси дістаємо, що послідовність $\Phi(y)$ (нагадаємо, що $\Phi(y)_0 \in I_{B_0}$) рівномірно збігається до $\Phi(x)$, коли $y \to x$, $y \in O_\eta(x)$, тому оператор $\pi_{\Phi(y)}(X)$ рівномірно збігається до $\pi_{\Phi(x)}(X)$ ($\pi_{\Phi(y)}(X^*)$ відповідно до $\pi_{\Phi(x)}(X^*)$). Отже, для довільного $g \in A_f$ відображення $x \to \pi_{\Phi(x)}(g)$ є неперервним відображенням з R_{B_0} у $B(H)$, наділеному топологією норми. Твердження про те, що образ відображення належить схрещеному добутку, доведено у теоремі 3 [3].

Перед тим як перейти до розгляду прикладів, зауважимо наступне.

Зауваження. Клас $\mathcal{F}_{2^n}$ унімодальних динамічних систем з від'ємним шварціаном, тобто $\mathcal{F}_{2^n} \cap SU$, задовольняє всі умови, накладені в цьому пункті.

Розглянемо більш детально випадок $n = 0$.

Твердження. *Для довільної функції $f \in \mathcal{F}_1 \cap SU$ в позначеннях попереднього наслідку $C^*(A_f) \simeq C_{\pi_0, \pi_1}\left(\mathbb{T}, \mathbb{Z} \times_\psi C(X)\right)$, де π_0, π_1 — одновимірні зображення $\mathbb{Z} \times_\psi C(X)$, що відповідають різним нерухомим точкам s_0 і s_1, а нижній індекс C_{π_0, π_1} позначає підалгебру тих відображень f, що $\pi_0(f(t))$ і $\pi_1(f(t))$ є константними відображеннями для всіх $t \in \mathbb{T}$. Зокрема, всі C^*-алгебри $C^*(A_f)$ із $f \in \mathcal{F}_1 \cap SU$ ізоморфні.*

Доведення. У цьому випадку (f, I) задовольняє умови попередньої теореми з $n = 0$. Крім того, $\mathrm{Orb}_+(f) = R_{B_0}$ є компактним хаусдорфовим простором, гомеоморфним колу $\mathbb{T}$. Точний гомоморфізм Ψ відображає $C^*(A_f)$ у підалгебру $C_{\pi_0, \pi_1}\left(\mathbb{T}, \mathbb{Z} \times_\psi C(X)\right)$, причому його образ — масивна підалгебра у GCR-алгебрі $C_{\pi_0, \pi_1}\left(\mathbb{T}, \mathbb{Z} \times_\psi C(X)\right)$, отже, за теоремою 11.1.6 [5] Ψ — ізоморфізм.

Зазначимо, що у випадку $n = 0$ існують не орбітно-еквівалентні системи, але ми бачили, що вони мають ізоморфні обгортуючі C^*-алгебри.

Приклад. Розглянемо сім'ю квадратичних відображень $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, де $\mu > 0$. Відомо, що $f_\mu \in SU$. Для $\mu < \mu^* \approx 3{,}57$ динамічна система $\left(f_\mu, \mathbb{R}\right)$ є

$\mathcal{F}_{2^n}$ для деякого n. Позначимо через $\mu_n > 0$ найбільше значення, для якого $(f_\mu, \mathbb{R}) \in \mathcal{F}_{2^n}$ [2]. Тоді динамічна система $(f_\mu, \mathbb{R})$ для $0 < \mu \le \mu_1$ має дві нерухомі точки і не має інших циклів, для $\mu_1 < \mu \le \mu_2$ — дві нерухомі точки й один цикл періоду 2, для $\mu_n < \mu \le \mu_{n+1}$ — дві нерухомі точки і один відштовхуючий цикл періоду 2^m для $m < n+1$ і один притягуючий цикл періоду 2^{n+1} і не має інших циклів.

1. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely-presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators. – Amsterdam: The Gordon and Breach Publ., 1999. – 261 p.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
3. *Jonker L., Rand D.* Bifurcations in one dimention. I, II // Invent. math. – 1981. – **62**. – P. 347 – 365; **65**. – P. 1 – 16.
4. *Popovych S. V., Maistrenko T. Yu.* C^*-algebras associated with quadratic dynamical system // Proc. Third Int. Conf. Symmentry in Nonlinear Mathematical Physics. II. – Kyiv, 2000. – P. 364 – 370.
5. *Диксьме Дж.* C^*-алгебры и их представления. – М.: Наука, 1974. – 400 с.

Одержано 14.11.2000