УДК 517.946.9

**Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, А. М. Нетесова**
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

We investigate group-theoretic properties of a nonlocal problem with free boundary for a degenerating quasilinear parabolic equation. We establish conditions of the invariant solvability of this problem, perform the reduction, and obtain the exact automodelling solution.

Досліджено теоретико-групові властивості нелокальної задачі з вільною межею для квазілінійного параболічного рівняння, що вироджується. Встановлено умови її інваріантної розв'язності, здійснено редукцію і одержано точний автомодельний розв'язок.

Описание процесса распространения электромагнитной волны в проводящей ферромагнитной среде, порожденной сосредоточенным плоским, линейным или точечным источником энергии, приводит к исследованию решений одномерного квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - g(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x, t \in R^1_+, \quad n = 1, 2, 3, \quad u > 0, \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ — некоторая функция (здесь — напряженность магнитного поля), $g(u)$, $u > 0$, — положительная, непрерывная, монотонно убывающая функция, имеющая интегрируемую особенность в точке $u = 0$.

Рассмотрим функциональное преобразование $v = f(u)$, где $f(u)$ — первообразная функции $g(u)$:

$$f(u) = \int_0^u g(u)\,du.$$

Очевидно, $f(u)$ является положительной, монотонно возрастающей функцией и имеет обратную функцию

$$u = f^{-1}(v). \tag{2}$$

В силу этого уравнение (1) для функции $v = v(x, t)$ преобразуется в квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{n-1}{x}\sigma(v)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma(v)$ — производная обратной функции $f^{-1}(v)$. Поскольку $\sigma(0) = 0$, то это уравнение является вырождающимся и, следовательно, для любого $t$ носитель его решения ограничен: $\operatorname{supp} v(x, t) = \{x, t : 0 \le x \le s(t) < \infty,\ t > 0\}$.

Уравнение (3) представляет собой волну, распространяющуюся по невозмущенному фону $v = 0$, с подлежащим определению фронтом волны $x = s(t)$. При этом

$$\sigma(v)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = s(t),$$

т. е. решение уравнения (3) — пространственно локализовано. В силу взаимно однозначного соответствия между $u$ и $v$ решение уравнения (1) также будет пространственно локализовано:

$$\operatorname{supp} u(x, t) = \{x, t : 0 \le x \le s(t) < \infty,\ t > 0\}.$$

Поскольку $f^{-1}(0) = 0$ и $\sigma(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, то на свободной границе $x = s(t)$ при $t > 0$ будут выполняться условия

$$u(s(t), t) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x} = 0.$$

Используя нелокальное по координате и времени условие, выражающее закон сохранения электромагнитной энергии, для определения функций $u(x, t)$ и $s(t)$ получаем следующую нелинейную нелокальную краевую задачу со свободной границей:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - g(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ u(s(t), t) = 0, \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \\ \int\limits_0^{s(t)} F(u)x^{n-1}\,dx - \int\limits_0^t \int\limits_0^{s(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 x^{n-1}\,dx\,dt = w_n(t), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где $F(u)$ — первообразная функции $f(u)$,

$$F(u) = \int\limits_0^u f(u)\,du = \int\limits_0^u \int\limits_0^y g(x)\,dx\,dy,$$

$w_n(t)$ — электромагнитная энергия, выделенная сосредоточенным источником к моменту времени $t$.

Аналогично, для определения функций $v(x, t)$ и $s(t)$ получим задачу со свободной границей и нелокальным условием для уравнения (3):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{n-1}{x}\sigma(v)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ v(s(t), t) = 0, \quad \frac{\partial v(s(t),t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \\ \int\limits_0^{s(t)} \Phi(v)x^{n-1}\,dx - \int\limits_0^t \int\limits_0^{s(t)} \sigma^2(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 x^{n-1}\,dx\,dt = w_n(t), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\Phi(v) = F(f^{-1}(v))$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением степенных зависимостей $f(u) = u^\beta$ и $w_n(t) = w_n t^p$, где $w_n$ и $p$ — const. Тогда

$$\begin{gathered}g(u) = \beta u^{\beta-1}, \quad f^{-1}(v) = v^{1/\beta}, \quad \sigma(v) = \frac{1}{\beta}v^{(1-\beta)/\beta}, \\ F(u) = \frac{1}{1+\beta}u^{1+\beta}, \quad \Phi(v) = \frac{\beta}{1+\beta}v^{(1+\beta)/\beta},\end{gathered} \tag{6}$$

в результате чего задача (4) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \beta u^{\beta-1}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ u(s(t), t) = 0, \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \\ \frac{1}{1+\beta}\int\limits_0^{s(t)} F(u)x^{n-1}\,dx - \int\limits_0^t \int\limits_0^{s(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 x^{n-1}\,dx\,dt = w_n(t), \quad t > 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Соответственно, задача (5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1}v^{(1-\beta)/\beta}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\beta\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

$$v(s(t),t) = 0, \quad \frac{\partial v(s(t),t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\frac{\beta}{1+\beta}\int\limits_0^{s(t)} v^{(1+\beta)/\beta}x^{n-1}\,dx - \frac{1}{\beta^2}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{s(t)} v^{2(1-\beta)/\beta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 x^{n-1}\,dx\right)dt = w_n t^p, \quad t > 0. \tag{10}$$

Используя теоретико-групповой подход, будем искать решение поставленной нелинейной нелокальной краевой задачи со свободной границей (8) – (10) в классе автомодельных решений. Распространение методов группового анализа [1] на краевые задачи является одной из важных проблем группового анализа среди ряда его специальных и до сих пор мало изученных задач. Известно, что автомодельное решение дифференциального уравнения является частным случаем его так называемых инвариантных H-решений (или просто инвариантных решений), если подгруппа $H$ основной группы $G$ преобразований дифференциального уравнения $(H \subset G)$ является группой масштабных преобразований.

Рассмотрим такую группу масштабных преобразований

$$H: \{\bar{x} = \alpha^a x,\ \bar{t} = \alpha^b t,\ \bar{v} = \alpha^c v\}, \tag{11}$$

где $a, b, c$ — произвольные постоянные. Этой группе преобразований соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = ax\frac{\partial}{\partial x} + bt\frac{\partial}{\partial t} + cv\frac{\partial}{\partial v},$$

с помощью которого, исходя из критерия инвариантности $XI(x,t,v) = 0$, находим ее инварианты

$$I_1 = I_1(x,t) = x^b t^{-a} = \eta, \quad I_2 = I_2(t,v) = t^{-c/b}v = \varphi.$$

Используя последние, будем искать решение задачи (8) – (10) в виде

$$v(x,t) = t^{c/b}\varphi, \quad \varphi = \varphi(\eta), \quad \eta = \frac{x^\beta}{t^a}, \tag{12}$$

означающем необходимость определения функции $\varphi$ только от одной независимой переменной: $\varphi = \varphi(\eta)$. Поскольку $\eta$ здесь выступает как независимая переменная, то фронту волны $x = s(t)$ будет соответствовать некоторое значение $\eta = \eta_0 = \text{const}$. При этом сам фронт $s(t)$ определяется через постоянные $a, b, c$ группы преобразований (11) и параметр $\eta_0$:

$$s(t) = t^{a/b}\eta_0^{1/b}. \tag{13}$$

Определим теперь условия, при которых решение (12) будет инвариантно-групповым решением поставленной задачи (8) – (10). Это означает, что необходимо определить условия, которым должны удовлетворять постоянные $a$, $b$, и $c$ группы преобразований (11) для того, чтобы данная группа была группой инвариантности рассматриваемой краевой задачи.

Заменив в уравнении (8) переменные $x$ и $t$ переменной $\eta$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} = \left|\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{bx^{b-1}}{t^a} = b\eta^{1-1/b}t^{-a/b}\right| = bt^{-a/b}\eta^{1-1/b}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta} = \left|\frac{\partial\eta}{\partial t} = -a\frac{x^b}{t^{a+1}} = -a\eta t^{-1}\right| = -at^{-1}\eta\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = t^{c/b}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = bt^{c/b-a/b}\eta^{1-1/b}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c}{b}t^{c/b-1}\varphi + t^{c/b}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = t^{c/b-1}\left[\frac{c}{b}\varphi(\eta) - a\eta\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\right],$$

$$x^{n-1}v^{(1-\beta)/\beta}\frac{\partial v}{\partial x} = \eta^{(n-1)/b}t^{a(n-1)/b+c/b}\varphi^{(1-\beta)/\beta}b\eta^{1-1/b}t^{c/b-a/b}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} =$$

$$= bt^{2c/b+a(n-2)/b}\eta^{1+(n-2)/b}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta},$$

$$\frac{1}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1}v^{(1-\beta)/\beta}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$=\frac{1}{\eta^{(n-1)/b}t^{a(n-1)/b}}b\eta^{1-1/b}t^{-a/b}\frac{d}{d\eta}\left(bt^{(c-a)/b+a(n-1)/b+c(1-\beta)/b\beta}\eta^{1+(n-2)/b}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\right)=$$

$$= b^2t^{c/b\beta-2a/b}\eta^{1-n/b}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{1+(n-2)/b}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\right).$$

При этом уравнение (8) трансформируется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{b^2}{a\beta}t^{\mu}\eta^{1-n/b}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - t^{\nu}\left(h\varphi - \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = 0,$$

где

$$\mu = \frac{c}{b\beta} - \frac{2a}{b}, \quad \nu = \frac{c}{b} - 1, \quad h = \frac{c}{ab}. \tag{14}$$

Из полученного уравнения следует, что группа масштабных преобразований (11) будет группой инвариантности нелинейного уравнения задачи (8), если выполняется условие

$$\mu = \nu, \quad \text{т. е.} \quad \frac{c}{b\beta} - \frac{2a}{b} = \frac{c}{b} - 1. \tag{15}$$

Из равенства (15) постоянная $a$ группы преобразований (10) определяется через произвольные постоянные $b$ и $c$:

$$a = \frac{c(1-\beta)+b\beta}{2\beta}. \tag{16}$$

Тогда можем записать редуцированное уравнение

$$\frac{b^2}{a\beta}\eta^{1-n/b}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \left(h\varphi - \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = 0,$$

где инвариант $\eta$, как независимая переменная, изменяется (согласно его определению) в области $0 < \eta < \eta_0$. При этом $\eta_0$ — неизвестная постоянная, которая совместно с произвольными постоянными $b$ и $c$ группы преобразований (11) согласно (13) определяет свободную границу $x = s(t)$ рассматриваемой задачи.

Исследуем теперь инвариантность относительно группы преобразований (11) условий (9) и (10).

Легко проверить, что при выполнении условия (15) краевые условия (9) будут инвариантны относительно данной группы преобразований. Действительно, согласно (12) они трансформируются в равенства

$$v(s(t), t) = t^{c/b}\varphi(\eta_0), \quad t > 0,$$

и

$$\frac{\partial v(s(t),t)}{\partial x} = t^{c/b}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = bt^{(c+a)/b}\eta^{(b-1)/b}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad t > 0,$$

откуда

$$\varphi(\eta_0) = 0, \qquad \frac{d\varphi(\eta_0)}{d\eta} = 0, \quad t > 0.$$

Переходя в условии (10) от переменных $x$, $t$ и $v$ к переменным $\eta$ и $\varphi$, после несложных преобразований и интегрирования по $t$ с учетом (6), (7) и (16) получаем

$$\frac{\beta}{b(1+\beta)}t^{\rho}\int_0^{\eta_0}\eta^{n/b-1}\varphi^{(\beta+1)/\beta}\,d\eta - \frac{b}{\rho\beta^2}t^{\rho}\int_0^{\eta_0}\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{2(1-\beta)/\beta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 d\eta = w_n t^p,$$

где

$$\rho = \frac{2c(1+\beta)+nc(1-\beta)+nb\beta}{2b\beta} = \frac{n}{2}+\frac{2c(1+\beta)+nc(1-\beta)}{2b\beta} =$$

$$= \frac{n}{2}+\frac{c}{b}\frac{(2-n)\beta+2+n}{2\beta} = \frac{n}{2}+\frac{c[2+n+(2-n)\beta]}{2b\beta}. \tag{17}$$

Тогда при выполнении равенства

$$\rho = p \tag{18}$$

нелокальное условие (10) краевой задачи (8) – (10) будет инвариантно относительно группы преобразований (11), в которой постоянная $a$ определена равенством (16), и трансформируется в условие

$$\frac{\beta}{b(1+\beta)}\int_0^{\eta_0}\eta^{n/b-1}\varphi^{(\beta+1)/\beta}\,d\eta - \frac{b}{\rho\beta^2}\int_0^{\eta_0}\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{2(1-\beta)/\beta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 d\eta = w_n.$$

Из равенств (17) и (18) следует выражение для постоянной $b$ группы преобразований (11):

$$b = \frac{[2(1+\beta)+n(1-\beta)]}{(2p-n)\beta}c. \tag{19}$$

С учетом этого, исходя из (16), можем записать следующее выражение для постоянной $a$ группы преобразований (11):

$$a = \frac{p(1-\beta)+1+\beta}{(2p-n)\beta}c. \tag{20}$$

Таким образом, нелокальная краевая задача со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения (8) – (10) инвариантна относительно группы масштабных преобразований (11), когда постоянные $a$, $b$ удовлетворяют условиям (17) и (18). Ее инвариантное решение $v = v(x,t)$ выражается через инварианты $\varphi$ и $\eta$ группы преобразований (11) в виде (12). Для определения функции $\varphi = \varphi(\eta)$ получаем нелокальную краевую задачу со свободной границей для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{b^2}{a\beta}\eta^{1-n/b}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{(1-\beta)/\beta}\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \left(h\varphi-\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = 0, \quad 0<\eta<\eta_0, \tag{21}$$

$$\varphi(\eta_0) = 0, \qquad \frac{d\varphi(\eta_0)}{d\eta} = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\beta}{b(1+\beta)}\int_0^{\eta_0}\eta^{n/b-1}\varphi^{(1+\beta)/\beta}\,d\eta - \frac{b}{\rho\beta^2}\int_0^{\eta_0}\eta^{(n-2)/b+1}\varphi^{2(1-\beta)/\beta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 d\eta = w_n. \tag{22}$$

Введя обозначения

$$\chi = \gamma(1-\beta) \quad \text{и} \quad \lambda = 2(1+\beta) + n(1-\beta), \tag{32}$$

запишем выражение для искомой границы в виде

$$\eta_0 = \chi^{\frac{3\beta-2}{\gamma\lambda}} \left\{ \frac{\beta\chi^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{2}{1-\beta}\right) + 2^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} n^{\frac{1}{1-\beta}} \gamma\beta(1+\beta) \mathrm{B}\left(\frac{n+2}{2}, \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}{2(2n)^{(1+\beta)/(1-\beta)}(1+\beta)w_n} \right\}^{\frac{1-\beta}{\gamma\lambda}}. \tag{33}$$

Таким образом, согласно представлению (12), получаем функцию

$$v(x,t) = \tilde{A} t^{-\gamma} \left\{ 1 - \left[\frac{x}{s(t)}\right]^2 \right\}_+^{\beta/(1-\beta)}, \tag{34}$$

где $\tilde{A} = \left[\frac{\gamma(1-\beta)}{2n}\eta_0^{-2\gamma}\right]^{\beta/(1-\beta)}$, которая при выполнении условия (26) является точным решением нелинейной нелокальной краевой задачи со свободной границей (8) – (10), инвариантным относительно группы масштабных преобразований

$$H\colon \{ \bar{x} = \alpha^{-1/n}x,\ \bar{t} = \alpha^{-1/\gamma}t,\ \bar{v} = \alpha v \}. \tag{35}$$

Свободная граница области распределения электромагнитной энергии — функция $x = s(t)$ — определяется по формуле (13):

$$x = s(t) = \left(\frac{t^{1/n}}{\eta_0}\right)^{\gamma}. \tag{36}$$

При $n=1$ (при степенной зависимости мощности источника энергии с показателем $p = -1/(1+\beta)$) точное автомодельное решение нелинейной нелокальной краевой задачи со свободной границей (8) – (10) имеет вид

$$v(x,t) = \tilde{A}_1 t^{-\beta/(1+\beta)} \left\{ 1 - \left[\frac{x}{s(t)}\right]^2 \right\}_+^{\beta/(1-\beta)}, \quad \tilde{A}_1 = \left[\frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}\eta_0^{-2\beta/(1+\beta)}\right]^{\beta/(1-\beta)},$$

и является инвариантным H-решением указанной задачи. Группа инвариантности задачи

$$H\colon \left\{ \bar{x} = \frac{1}{\alpha}x,\ \bar{t} = \alpha^{-(1+\beta)/\beta}t,\ \bar{v} = v \right\}.$$

Свободная граница $x = s(t)$ области распространения электромагнитной энергии определяется равенством

$$x = s(t) = \left(\frac{t}{\eta_0}\right)^{\beta/(1+\beta)},$$

где

$$\eta_0 = \left[\frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}\right]^{(3\beta-2)(1+\beta)/\beta(3+\beta)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\beta\left[\frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}\right]^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1-\beta}\right) + 2^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} \beta^2 \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}{2^{2/(1-\beta)}(1+\beta)w_n} \right\}^{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{\beta(3+\beta)}}.$$

При $n = 2, 3$ точное автомодельное решение нелинейной нелокальной краевой задачи со свободной границей (8) – (10) представляется соответственно формулами:

для $n = 2$ (при $p = -1$)

$$v(x, t) = \tilde{A}_2 t^{-\beta} \left\{1 - \left[\frac{x}{s(t)}\right]^2\right\}_+^{\beta/(1-\beta)}, \quad \tilde{A}_2 = \left[\frac{\beta(1-\beta)}{4}\eta_0^{-2\beta}\right]^{\beta/(1-\beta)},$$

$$H: \left\{\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}x,\ \bar{t} = \alpha^{-1/\beta}t,\ \bar{v} = \alpha v\right\},$$

$$x = s(t) = \left(\frac{\sqrt{t}}{\eta_0}\right)^{\beta},$$

$$\eta_0 = [\beta(1-\beta)]^{\frac{3\beta-2}{4\beta}} \left\{\frac{\beta[\beta(1-\beta)]^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} \mathrm{B}\left(1, \frac{2}{1-\beta}\right) + 2^{\frac{2(2-\beta)}{1-\beta}} \beta^2(1+\beta)\mathrm{B}\left(2, \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}{2^{(3+\beta)/(1-\beta)}(1+\beta)w_n}\right\}^{\frac{1-\beta}{4\beta}};$$

для $n = 3$ (при $p = -3/(3-\beta)$)

$$v(x, t) = \tilde{A}_3 t^{-3\beta/(3-\beta)} \left\{1 - \left[\frac{x}{s(t)}\right]^2\right\}_+^{\beta/(1-\beta)}, \quad \tilde{A}_3 = \left[\frac{3\beta(1-\beta)}{6(3-\beta)}\eta_0^{-3\beta/(3-\beta)}\right]^{\beta/(1-\beta)},$$

$$H: \{\bar{x} = \alpha^{-1/3}x,\ \bar{t} = \alpha^{-(3-\beta)/3\beta}t,\ \bar{v} = \alpha v\},$$

$$x = s(t) = \left(\frac{t^{1/3}}{\eta_0}\right)^{3\beta/(3-\beta)},$$

$$\eta_0 = \tilde{\beta}^{\kappa} \left\{\frac{\tilde{\beta}^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} \beta \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{1-\beta}\right) + 2^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} 3^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{\beta^2(1+\beta)}{3-\beta} \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}{2 \cdot 6^{(1+\beta)/(1-\beta)}(1+\beta)w_n}\right\}^{(1-\beta)\kappa},$$

где

$$\tilde{\beta} = \frac{3\beta(1-\beta)}{3-\beta}, \quad \kappa = \frac{3-\beta}{3\beta(5-\beta)}.$$

Возвращаясь к исходной нелокальной краевой задаче со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения (4), согласно (2), (7) и (34), можем записать ее решение

$$u(x, t) = \tilde{\tilde{A}} t^{-1/(1+\beta)} \left\{1 - \left[\frac{x}{s(t)}\right]^2\right\}_+^{\beta/(1-\beta)}, \quad \tilde{\tilde{A}} = \left[\frac{\gamma(1-\beta)}{2n}\eta_0^{-2\gamma}\right]^{1/(1-\beta)}, \quad (37)$$

которое при выполнении условия (26) является точным автомодельным решением. Свободная граница области распределения электромагнитной энергии $x = s(t)$ определяется согласно формуле (13), где параметр $\eta_0$ определяется равенством (33).

Если в рассмотренной нами задаче (8) – (10) устремить показатель $\beta$ к 1, то получим краевую задачу

$$\frac{1}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (38)$$

$$v(\infty, t) = 0, \quad \frac{\partial v(\infty,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \tag{39}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty v^2 x^{n-1}\,dx - \int_0^t\int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 x^{n-1}\,dx\,dt = w_n t^p, \quad t > 0. \tag{40}$$

Данная краевая задача при $p=-n/2$ инвариантна относительно группы масштабных преобразований

$$H:\ \{\,\bar{x} = \alpha^{-1/n}x,\ \bar{t} = \alpha^{-2/n}t,\ \bar{v} = v\,\},$$

через инварианты которой

$$\eta = (tx^{-2})^{1/n} \quad \text{и} \quad \varphi(\eta) = t^{n/2}v(x,t) \tag{41}$$

ее решение выражается в виде

$$v(x, t) = t^{-n/2}\varphi(\eta) \tag{42}$$

и находится через решение редуцированной краевой задачи для функции $\varphi(\eta)$

$$\frac{4}{n}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{-n^2/2+n+1}\frac{d\varphi}{d\eta}\right) + \eta^{-n^2/2-1}\left(\frac{n^2}{2}\varphi - \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = 0, \quad 0<\eta<\infty, \quad n = 1, 2, 3, \tag{43}$$

$$\varphi(\infty) = 0, \quad \frac{d\varphi(\infty)}{d\eta} = 0, \quad t > 0, \tag{44}$$

$$-\frac{n}{4}\int_0^\infty \eta^{-n^2/2-1}\varphi^2\,d\eta - \frac{4}{n^2}\int_0^\infty\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\eta^{-n^2/2+n+1}\,d\eta = w_n. \tag{45}$$

Можно показать, что редуцированная задача (43) – (45) имеет точное решение вида

$$\varphi(\eta) = \tilde{A}e^{-1/4\eta^n}, \tag{46}$$

где постоянная $\tilde{A}$ определяется подстановкой (46) в условие (45) и выражается формулой

$$\tilde{A} = \sqrt{\frac{2w_n}{n}}\left(-\int_0^\infty \eta^{-n^2/2-1}e^{-1/2\eta^n}\,d\eta - \frac{1}{n}\int_0^\infty \eta^{-n^2/2-n-1}e^{-1/2\eta^n}\,d\eta\right)^{-1/2}.$$

После введения замены переменной

$$z^2 = \frac{1}{2\eta^n} \to \eta = (2z^2)^{-1/n} \to d\eta = -\frac{1}{n}2^{-1/n+1}z^{-2/n-1}\,dz$$

получаем

$$\tilde{A} = \sqrt{2^{1-n/2}w_n}\left(\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z^2}\,dz + \frac{2}{n}\int_0^\infty z^{n+1}e^{-z^2}\,dz\right)^{-1/2}. \tag{47}$$

При этом точное автомодельное решение исходной задачи (38) – (40) записывается в виде

$$v(x, t) = \tilde{A}t^{-n/2}e^{-x^2/4t}, \tag{48}$$

т. е. совпадает с фундаментальным решением линейного уравнения (38).

При $n=1$ решение данной задачи имеет вид

$$v(x, t) = \tilde{A}t^{-1/2}e^{-x^2/4t},$$

где

$$\tilde{A} = \sqrt{2^{1/2} w_n} \left( \int_0^\infty e^{-z^2} dz + 2 \int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{2^{1/2} w_n} \left( -\frac{z e^{-z^2}}{2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{2^{1/2} w_n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{-1/2} = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, w_n}\,.$$

При $n = 2$ постоянная $\tilde{A}$ определяется из равенства

$$\tilde{A} = \sqrt{w_n} \left( \int_0^\infty z e^{-z^2} dz + \int_0^\infty z^3 e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{w_n} \left( -\frac{e^{-z^2}}{2} \Big|_0^\infty - \frac{z^2 e^{-z^2}}{2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty z e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{w_n} \left( \frac{1}{2} - \frac{e^{-z^2}}{2} \Big|_0^\infty \right)^{-1/2} = \sqrt{w_n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^{-1/2} = \sqrt{w_n}\,.$$

В результате решение задачи (38) при $n = 2$ записывается в виде

$$v(x, t) = \frac{\sqrt{w_n}}{t} e^{-x^2/4t}.$$

При $n = 3$ будем соответственно иметь

$$\tilde{A} = \sqrt{\frac{2}{3} w_n} \left( \int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz + \frac{2}{3} \int_0^\infty z^4 e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} w_n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{2}{3} - \frac{z^3 e^{-z^2}}{2} \Big|_0^\infty + \frac{3}{2} \int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz \right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} w_n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{4 w_n}{3\sqrt{\pi}}},$$

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{4 w_n}{3\sqrt{\pi}}}\, t^{-3/2} e^{-x^2/4t}.$$

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Получено 15.06.2000