УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетров. ун-т)

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ КЛАССОВ W^rH^ω

We obtain estimates of approximation of functions belonging to the class W^rH^ω ($\omega(t)$ is a convex module of continuity such that $t\omega'(t)$ is not decreasing) by algebraic polynomials with regard to the location of a point on the interval $[-1, 1]$. These estimates cannot be improved simultaneously for all the modules of continuity.

Одержано оцінки наближення функцій класу W^rH^ω ($\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, такий, що $t\omega'(t)$ не спадає) алгебраїчними многочленами з урахуванням положення точки на відрізку $[-1, 1]$, які неможливо покращити одночасно для всіх модулів неперервності.

1. Введение. Как известно, возникновение исследуемой в данной работе проблемы было обусловлено работой [1] С. М. Никольского, в которой построен линейный метод $L_n(f; x)$ приближения алгебраическими многочленами функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица с константой, равной единице, такой, что

$$|f(x) - L_n(f; x)| \le \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x|\ln n}{n^2}\right), \quad x \in [-1, 1], \tag{1}$$

и показано, что константу $\pi/2$ в неравенстве (1) уменьшить нельзя.

История дальнейшего продвижения в исследовании возможности осуществлять приближение алгебраическими многочленами (в том числе и асимптотически наилучшее) функций из различных классов с достижением (получением) улучшения приближения на концах отрезка $[-1, 1]$ изложена во многих работах (см., например, [2–10]). Поэтому приведем некоторые основные результаты только тех исследований, к которым имеет отношение данная работа.

Введем определения. Пусть W^rH^ω, $r = 0, 1, \ldots$ ($W^0H^\omega = H^\omega$) — класс функций f, заданных на отрезке $[-1, 1]$, r-я производная ($f^{(0)} = f$) которых удовлетворяет условию

$$\left|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)\right| \le \omega(|x_1 - x_2|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Если $\omega(t) = Mt$, $M > 0$, вместо H^ω будем использовать обозначение MH^1.

В работе [4] установлен следующий результат.

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(f; x)\}$ степени $n = 1, 2, \ldots$ такая, что равномерно относительно всех $x \in [-1, 1]$ при $n \to \infty$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n(f; x)| \le \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$

Для получения этого утверждения был использован метод промежуточного приближения, позволяющий для любой функции $f(x)$ с выпуклым модулем непрерывности $\omega(f; t)$ построить последовательность ломаных $\phi_n(x)$ таких, что:

1) для производной $\phi_n'(x)$ в точках ее существования выполняется неравенство

$$\left|\phi_n'(x)\right| \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \equiv K_n(x), \quad n=2,3,\ldots, \quad |x|\le 1;$$

2) равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ при $n \to \infty$

$$\left|f(x)-\phi_n(x)\right| \le \frac{1}{2}\max_{0\le t\le 2}\{\omega(t)-K_n(x)t\} + o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Затем в работе А. А. Лигуна [5] для любого нечетного числа r был построен линейный метод приближения $Q_{n,r}(f;x)$ такой, что для любой функции $f(x)$, имеющей производную порядка r, выполняется неравенство

$$\left|f(x)-Q_{n,r}(f;x)\right| \le \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)};\frac{\pi\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + o\left(n^{-r}\omega\left(f^{(r)};\frac{1}{n}\right)\right), \quad (3)$$

где $\omega(f^{(r)};t)$ — модуль непрерывности r-й производной функции $f(x)$.

Заметим, что в указанных работах обобщение теоремы С. М. Никольского сопровождалось огрублением остаточного члена. В частности, остаточные члены в оценках (2), (3), как и в теореме А. Ф. Тимана [15, с. 310 –324], зависят от функции f. Поэтому следующий шаг, связанный с развитием указанных исследований С. М. Никольского, состоял в уточнении остаточного члена в неравенствах (1)–(3). Первым осуществил его В. Н. Темляков [6]; он усилил неравенство (1), опустив $\ln n$ в остаточном члене.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

Пусть $x_0=0$ и

$$x_k = x_{k-1}+\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}, \quad n\ge 5, \quad (4)$$

— точки отрезка $[0, 1]$, где $a\in[1,\pi]$ — постоянное число, которое при доказательстве теоремы 1 будем выбирать в зависимости от параметра r. Обозначим через x_{N-1} наибольшую из тех точек, для которых выполняется неравенство $x_{N-1}\le\bar{x}$, где число $\bar{x}<1$ такое, что $\bar{x}+\frac{a}{n}\sqrt{1-\bar{x}^2}=1$. Если $x_{N-1}=\bar{x}$, то из (4) следует, что $x_N=1$, а если $x_{N-1}<\bar{x}$, то по определению считаем $x_N=1$. Положим $E_k=[-x_{k+1},-x_k]\cup[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Теорема 1. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f\in H^\omega$ и любого числа $a\in[1,\pi]$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\left\{\psi_{n,a}(f;x)\right\}$ таких, что:*

1) *почти всюду выполняется неравенство*

$$\left|\psi_{n,a}'(f;x)\right| \le M_{k+1}, \quad x\in E_k, \quad k=0,1,\ldots,N-1;$$

2) $\left|f(x)-\psi_{n,a}(f;x)\right| \le \Delta_k$, $x\in E_k$, $k=0,1,\ldots,N-1$, *где* $M_k = \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, *а* $\Delta_k=\frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)-M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, $k=1,2,\ldots,N$.

Теорема 1 является усилением результата Н. П. Корнейчука и А. И. Половины об аппроксимации функций из класса H^ω абсолютно непрерывными функциями с переменной гладкостью.

Теорема 2. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности такой, что функция $t\omega'(t)$ не убывает. Тогда для любой функции $f\in W^rH^\omega$ существует последовательность алгебраических многочленов $Q_n^r(f;x)$ степени $n=r, r+1,\ldots$ (при $r=0$ $n\ge 2$) таких, что выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-Q_n^r(f;x)\right| \le \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right)+$$

$$+\ C_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln n}{n^{r+1}},$$

где K_r — *константа Фавара, а величина* C_r *зависит только от* r.

Заметим, что большинство известных модулей непрерывности такие, что $t\omega'(t)$ не убывает. Например: $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $\omega(t)=t^\alpha\ln\frac{e}{t}$, $0<\alpha\le 1$, $\omega(t)=\frac{1}{\ln e^2/t}$, $0\le t\le 1$, и другие. Кроме того, очевидно, что $\omega(t)$ удовлетворяет этому условию, если

$$\omega(t) = \int\limits_0^t \frac{v(u)}{u}du, \tag{5}$$

где функция $v(u)$ не убывает и такая, что

$$v'(u) \le \frac{v(u)}{u}. \tag{6}$$

Условию (6), например, удовлетворяют все выпуклые модули непрерывности. Если выпуклый модуль непрерывности $\omega(t)$ имеет абсолютно непрерывную производную и $t\omega'(t)$ не убывает, то $\omega(t)$ можно представить в виде (5), положив $v(t)=t\omega'(t)$. При этом выполняется (6).

2. Необходимые определения и результаты. *1.* Пусть

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}, \qquad r=1,2,\ldots,$$

— ядро Бернулли и $P_n^r(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения $D_r(t)$. Тогда имеет место неравенство [10]

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|D_r(t)-P_n^r(t)\right|\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt \le C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}. \tag{7}$$

***Замечание* 1.** Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а величины, зависящие от параметра r, через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

2. **Лемма 1.** *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности такой, что* $t\omega'(t)$ *не убывает. Тогда для любых положительных чисел* b, s *и* τ *имеет место неравенство*

$$|s\omega'(bs)-\tau\omega'(b\tau)| \le \omega'(b\tau)|s-\tau|. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $s<\tau$. Тогда $\omega'(bs)\ge\omega'(b\tau)$ и

$$\omega'(b\tau)|s-\tau| = \omega'(b\tau)\tau-\omega'(b\tau)s \ge \omega'(b\tau)\tau-\omega'(bs)s \ge 0,$$

аналогично, если $s>\tau$, то

$$\omega'(b\tau)|s-\tau| = \omega'(b\tau)s-\omega'(b\tau)\tau \ge \omega'(bs)s-\omega'(b\tau)\tau \ge 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любых положительных чисел* b, s *и* τ *имеет место неравенство*

$$|\omega(bs)-\omega(b\tau)| \le \frac{\omega(b\tau)}{\tau}|s-\tau|.$$

Доказательство. Пусть $\tau > s$. Поскольку $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то

$$\frac{\omega(b\tau)}{\tau} \le \frac{\omega(bs)}{s}$$

и, следовательно,

$$\frac{\omega(b\tau)}{\tau}|\tau-s| = \omega(b\tau)-\frac{\omega(b\tau)}{\tau}s \ge \omega(b\tau)-\omega(bs) \ge 0.$$

Если $\tau < s$, то

$$\frac{\omega(b\tau)}{\tau}|\tau-s| = \frac{\omega(b\tau)}{\tau}s-\omega(b\tau) \ge \omega(bs)-\omega(b\tau) \ge 0.$$

3. В этом подпункте докажем одно элементарное неравенство для точек x_k, определенных равенством (4).

Лемма 3. *Имеет место неравенство*

$$\sqrt{1-x_{k-1}^2} < 2\sqrt{1-x_k^2}, \qquad k=1,2,\ldots,N-1. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку

$$\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\sqrt{1-x_k^2} = \frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}+\sqrt{1-x_k^2}} < \frac{2(a/n)\sqrt{1-x_{k-1}^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}+\sqrt{1-x_k^2}} < \frac{2a}{n} \tag{10}$$

и функция $\dfrac{t}{t+\dfrac{2a}{n}}$ возрастает, то

$$\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}} = \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_k^2}+\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\sqrt{1-x_k^2}} >$$

$$> \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_k^2}+\dfrac{2a}{n}} > \frac{\sqrt{1-x_{N-1}^2}}{\sqrt{1-x_{N-1}^2}+\dfrac{2a}{n}}. \tag{11}$$

Из определения числа $\bar{x}$ следует

$$\sqrt{1-\bar{x}^2} = \frac{a}{n}(1+\bar{x})$$

и

$$\bar{x} = \frac{1-a^2/n^2}{1+a^2/n^2} \ge \frac{1-\pi^2/5^2}{1+\pi^2/5^2} > \sqrt{2}-1.$$

Поэтому

$$\sqrt{1-x_{N-1}^2} \ge \sqrt{1-\bar{x}^2} > \frac{a}{n}\sqrt{2},$$

и из неравенства (11) находим

$$\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}} > \frac{\dfrac{a}{n}\sqrt{2}}{\dfrac{a}{n}\sqrt{2}+\dfrac{2a}{n}} = \frac{1}{n+\sqrt{2}}.$$

Используя последнее неравенство в цепочке (10), имеем

$$\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\sqrt{1-x_k^2} < \frac{2a}{n}\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}}} < \frac{2a}{n}\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}a}{n},$$

откуда, учитывая неравенство (11), получаем оценку

$$\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\sqrt{1-x_{k-1}^2}} > \frac{\sqrt{1-x_{N-1}^2}}{\sqrt{1-x_{N-1}^2}+\dfrac{\sqrt{2}a}{n}} > \frac{\dfrac{\sqrt{2}a}{n}}{\dfrac{\sqrt{2}a}{n}+\dfrac{\sqrt{2}a}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

***Замечание* 2.** Из соотношений (10), (11) легко можно вывести также неравенство

$$\sqrt{1-x_{N-1}^2} < \frac{4\pi}{n}. \tag{12}$$

4. Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности и $f(t)$ — некоторая функция из класса H^{ω}. Не теряя общности можно считать, что $\omega(t)$ — дифференцируемая функция на отрезке $[0, 2]$. Обозначим через $\phi_{k,a}(t)$ функцию из класса $M_k H^1$, существование которой установлено Н. П. Корнейчуком [11, 12], такую, что

$$\left|f(t)-\phi_{k,a}(t)\right| \le \Delta_k, \qquad t\in[-1, 1],$$

где $M_k=\omega'\left(\dfrac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, а

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)-M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right), \quad k=1, 2, \ldots, N, \qquad a\in[1, \pi],$$

и будем считать, что функция $\phi_{k,a}(t)$ задана в виде, указанном А. В. Покровским [13]:

$$\phi_{k,a}(t) = \inf_{u\in[-1, 1]}\{f(u)+M_k|t-u|\} + \Delta_k.$$

Лемма 4. *Имеют место неравенства*

$$\phi_{k,a}(t)-\phi_{k+1,a}(t) \le \Delta_k-\Delta_{k+1}, \qquad t\in[-1, 1], \qquad k=1, 2, \ldots, N-1.$$

Доказательство. Пусть для фиксированного значения t

$$\phi_{k+1,a}(t) = f(x')+M_{k+1}|t-x'|+\Delta_{k+1}.$$

Тогда $\phi_{k,a}(t)\le f(x')+M_k|t-x'|+\Delta_k$ и

$$\phi_{k,a}(t)-\phi_{k+1,a}(t) \le M_k|t-x'|-M_{k+1}|t-x'|+\Delta_k-\Delta_{k+1} \le \Delta_k-\Delta_{k+1},$$

причем последнее неравенство строгое, если $M_{k+1}>M_k$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеют место неравенства*

$$\Delta_k-\Delta_{k+1} < (M_{k+1}-M_k)(x_{k+1}-x_k), \qquad k=1, 2, \ldots, N-1. \tag{13}$$

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа и учитывая выпуклость функции $\omega(t)$, получаем

$$2(\Delta_k-\Delta_{k+1}) =$$

$$= \omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)-M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right)+M_{k+1}\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2} \le$$

$$\leq \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right)\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}-\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2} +$$
$$+\ \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right)\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2} = (M_{k+1}-M_k)\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}.$$

Из полученного неравенства и неравенства (9) следует (13). Лемма доказана.

3. Доказательство теорем. Для заданной функции $f(x)\in H^{\omega}$ и любого натурального числа $n\geq 5$ укажем алгоритм построения функции $\phi_{n,a}(t)$, для которой справедлива теорема 1. Для этого будем использовать функции $\phi_{k,a}(t)$, определенные в подпункте 4 для заданной функции $f(x)$, числа $a\in[1, \pi]$ и индекса k. Ради простоты вместо $\phi_{k,a}(t)$ используем обозначение $\phi_k(t)$, а вместо $\psi_{n,a}(t)$ — обозначение $\psi(t)$.

Положим на отрезке $[-x_1, x_1]$ $\psi(t)=\phi_1(t)$ и определим сначала функцию $\psi(t)$ на полуинтервале $(x_1, 1]$. Аналогично строится функция $\psi(t)$ на полутервале $[-1, -x_1)$. В зависимости от ситуации будем определять функцию $\psi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ или отрезке $[x_k, x_{k+m}]$, считая, что она уже задана на отрезке $[0, x_k]$ так, что $\psi(x_k)=\phi_k(x_k)$. Если $k=N-1$, то на отрезке $[x_{N-1}, 1]$ положим $\psi(t)=\phi_{N-1}(t)$. Если $1\leq k\leq N-2$, рассмотрим на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ две функции: $\phi_k(t)$ и $\phi_{k+1}(t)$. Если эти функции в некоторых точках этого отрезка принимают равные значения и x^* — самая левая из них, то положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi_k(t), & x_k\leq t\leq x^*; \\ \phi_{k+1}(t), & x^*\leq t\leq x_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что для $\psi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ имеет место утверждение теоремы 1 и $\psi(x_{k+1})=\phi_{k+1}(x_{k+1})$. Для случая, когда графики этих функций не пересекаются, рассмотрим несколько возможностей.

1. $\phi_k(t)>\phi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Пусть сначала график линейной функции $l_1(t)=\phi_k(x_k)-M_k(t-x_k)$ пересекает график функции $\phi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и x^* — первая точка, в которой это происходит. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} l_1(t), & x_k\leq t\leq x^*; \\ \phi_{k+1}(t), & x^*\leq t\leq x_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что $|\psi'(t)|\leq M_{k+1}$, $f(t)-\psi(t)\leq f(t)-\phi_{k+1}(t)\leq \Delta_{k+1}$, если $t\in[x_k, x^*]$, $f(t)-\psi(t)=f(t)-\phi_{k+1}(t)\leq\Delta_{k+1}$, если $t\in[x^*, x_{k+1}]$, и $\psi(t)-f(t)\leq$ $\leq\phi_k(t)-f(t)\leq\Delta_k$, $t\in[x_k, x_{k+1}]$.

Если график линейной функции $l_1(t)$ не пересекает график функции $\phi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, то рассмотрим линейную функцию $l_2(t)=$ $=\phi_{k+1}(x_{k+1})+M_{k+1}(x_{k+1}-t)$ и покажем, что в некоторой точке $x^*\in[x_k, x_{k+1}]$ графики функций $l_1(t)$ и $l_2(t)$ принимают равные значения. Если это не так, то

$$l_2(x_k) = \phi_{k+1}(x_{k+1})+M_{k+1}(x_{k+1}-x_k) < l_1(x_k) = \phi_k(x_k). \tag{14}$$

Из неравенства (14) следует

$$\phi_k(x_{k+1})-\phi_{k+1}(x_{k+1}) > l_1(x_{k+1})-\phi_{k+1}(x_{k+1}) =$$
$$= \phi_k(x_k)-M_k(x_{k+1}-x_k)-\phi_{k+1}(x_{k+1}) > M_{k+1}(x_{k+1}-x_k)-M_k(x_{k+1}-x_k)$$

и в силу неравенства (13)

$$\phi_k(x_{k+1}) - \phi_{k+1}(x_{k+1}) > \Delta_k - \Delta_{k+1},$$

а это противоречит лемме 4. Следовательно, график функции $l_2(t)$ пересекает график функции $l_1(t)$, а также график функции $\phi_k(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Положим $\psi(t) = \min\{\phi_k(t), l_2(t)\}$. Тогда $|\psi'(t)| \le M_{k+1}$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $f(t) - \psi(t) \le f(t) - \phi_{k+1}(t) \le \Delta_{k+1}$, если $t \in [x_k, x_{k+1}]$ и $\psi(t) - f(t) \le \phi_k(t) - f(t) \le \Delta_k$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$.

2. $\phi_k(t) < \phi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и график линейной функции $l_{k,0}(t) = \phi_k(x_k) + M_{k+1}(t - x_k)$ пересекает график функции $\phi_{k+1}(t)$ на этом отрезке. Положим

$$\psi(t) = \min\{l_{k,0}(t), \phi_{k+1}(t)\} \le \phi_{k+1}(t).$$

Очевидно, что $|\psi'(t)| \le M_{k+1}$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $f(t) - \psi(t) \le f(t) - \phi_k(t) \le \Delta_k$, так как $\psi(t) \ge \phi_k(t)$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$, и $\psi(t) - f(t) \le \phi_{k+1}(t) - f(t) \le \Delta_{k+1}$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$.

3. $\phi_k(t) < \phi_{k+1}(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ и графики функций $l_{k,0}(t)$ и $\phi_{k+1}(t)$ не пересекаются на этом отрезке. Рассмотрим вспомогательную функцию $z_k(t)$, которая на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, N-k-1$, равна

$$l_{k,j}(t) = \phi_k(x_k) + \sum_{i=1}^{j} M_{k+i}(x_{k+i} - x_{k+i-1}) + M_{k+j+1}(t - x_{k+j}).$$

Предположим, что на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, графики функций $\phi_{k+j+1}(t)$ и $z_k(t)$ не пересекаются, а на отрезке $[x_{k+m}, x_{k+m+1}]$, если $x_{k+m} < 1$, эти функции принимают в некоторых точках равные значения. Тогда на отрезке $[x_k, x_{k+m}]$ положим $\psi(t) = z_k(t)$, а на отрезке $[x_{k+m}, x_{k+m+1}]$:

$$\psi(t) = \min\{z_k(t), \phi_{k+m+1}(t)\}.$$

Если $x_{k+m} = 1$, то на отрезке $[x_k, 1]$ функция $\psi(t) = z_k(t)$. Очевидно, что $|\psi'(t)| \le M_{k+j+1}$, и $\psi(t) - f(t) \le \phi_{k+j+1}(t) - f(t) \le \Delta_{k+j+1} \le \Delta_{k+j}$, если $t \in [x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $0 \le j \le m$.

Оценим сначала разность $f(t) - \psi(t)$ на отрезках $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$, $0 \le j \le m-1$, представляя ее в виде

$$f(t) - \psi(t) = f(t) - \phi_k(t) + \phi_k(t) + \psi(t) \le \Delta_k + \phi_k(x_k) + M_k(t - x_k) - \psi(t) =$$

$$= \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(M_{k+i} - M_k)(x_{k+i} - x_{k+i-1}) - (M_{k+j+1} - M_k)(t - x_{k+j}) \le$$

$$\le \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(M_{k+i} - M_{k+i-1})(x_{k+i} - x_{k+i-1}).$$

Применяя лемму 5, получаем

$$f(t) - \psi(t) < \Delta_k - \sum_{i=1}^{j}(\Delta_{k+i-1} - \Delta_{k+i}) = \Delta_{k+j}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Рассмотрим теперь $f(t) - \psi(t)$ на отрезке $[x_{k+m}, x_{k+m+1}]$. Если $\psi(t) = \phi_{k+m+1}(t)$ в некоторой точке t, то $f(t) - \psi(t) \le \Delta_{k+m+1}$. Если же $\psi(t) = z_k(t)$, то, как и на отрезке $[x_{k+j}, x_{k+j+1}]$ при $j = 0, 1, \ldots, m-1$, получаем

$$f(t)-z_k(t) < \Delta_{k+m}.$$

Итак, в первых двух случаях $\psi(x_{k+1}) = \phi_{k+1}(x_{k+1})$, а в последнем случае $\psi(x_{k+m+1}) = \phi_{k+m+1}(x_{k+m+1})$, если $x_{k+m} \le x_{N-1}$. Если $x_{k+m} = 1$, то построение функции $\psi(t)$, на отрезке $[0, 1]$ завершено. Поскольку отрезков конечное число, то с помощью указанного алгоритма доказываем теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем теорему 2 для $r = 0$. Пусть $\psi(x) = \psi_{n,\pi}(x)$ — функция, существование которой установлено в теореме 1. Так как для $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x_k^2}$, то $\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right) \le$ $\le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)$ и, следовательно,

$$|\psi'(t)| \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right), \quad x \in [-1, 1]. \tag{15}$$

Пусть $Q_n^0(f; x)$ — алгебраический многочлен такой, что

$$Q_n^0(f; \cos t) = -\int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\, du,$$

где $P_n^1(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения $D_1(t)$. Тогда после замены $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, используя неравенство (15), получаем

$$\left|\psi(x) - Q_n^0(f; x)\right| = \left|\psi(\cos t) + \int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\, du\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left\{D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\right\}\psi'(\cos u)\sin u\, du\right| \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\right|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u|\,du \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\right|du +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\right|\left|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u| - \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t\right|du =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t + \Delta(t). \tag{16}$$

Второй сомножитель произведения, стоящего под знаком интеграла, определяющего величину $\Delta(t)$, оценим, используя лемму 1. Для этого в неравенстве (8) положим $b = \frac{\pi}{n}$, $s = |\sin u|$, $\tau = \sin t$. Тогда

$$\left|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u| - \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t\right| \le 2\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|$$

и

$$\Delta(t) \le 2\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u) - P_n^1(t-u)\right|\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|du.$$

$$\left|f(x)-Q_n^0(f;x)\right| \le \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)+C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_{N-1}^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}. \tag{21}$$

Из (20), (21) следует теорема 2 для $r=0$.

В случае $r>0$ необходимо приближать алгебраическими многочленами степени $n \ge r-1$, поэтому можно ограничиться функциями из класса W^rH^ω, представимыми в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)\,dt,$$

где $f \in H^\omega$. Пусть

$$I_r(f(\cos u))(t) = \int_0^{2\pi} f(\cos u)D_r(t-u)\,du.$$

Положим

$$f_k(\cos t) = (-\sin t)^k I_k(f(\cos u))(t)+R_k(t), \qquad k=1,2,\ldots. \tag{22}$$

Нетрудно проверить, что для любого $k=2,3,\ldots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}R_k(t) = -\sin t R_{k-1}(t)+k(-\sin t)^{k-1}\cos t I_k(f(\cos u))(t), \tag{23}$$

а

$$\frac{d}{dt}R_1(t) = \cos t I_1(f(\cos u))(t) - \frac{\sin t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos t)\,dt. \tag{24}$$

Рекуррентные соотношения (23), (24) дают возможность найти оценку приближения функции $R_k(t)$, зная приближение функций $I_k(f(\cos u))(t)$ и $R_{k-1}(t)$.

Лемма 6. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности такой, что функция $t\omega'(t)$ не убывает. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ и любого натурального числа r существует последовательность алгебраических многочленов $T_n^r(f;t)$ степени n таких, что выполняется неравенство*

$$\left|I_r(f(\cos u))(t)-T_n^r(f;t)\right| \le \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)+$$

$$+\; C_r\frac{\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)^{-1}\omega\left(\frac{\sin t}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln n}{n^{r+1}}, \qquad t\in[0,\pi], \tag{25}$$

где K_r — константа Фавара, а величина C_r зависит только от r.

Доказательство. Пусть $f\in H^\omega$, $a_r=\dfrac{2K_{r+1}}{K_r}$, $r\in N$, и $\psi(x)\equiv\psi_{n,a_r}(x)$ — функция, построенная для f и данного числа a_r в соответствии с теоремой 1. Представим $I_r(f(\cos u))(t)$ в виде

$$I_r(f(\cos u))(t) = I_r(f(\cos u)-\psi(\cos u))(t)+I_r(\psi(\cos u))(t) = f_1(t)+f_2(t)$$

и приблизим каждое слагаемое правой части. Первое будем приближать тригонометрическим полиномом

$$A_n^r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} P_n^r(t-u)(f(\cos u)-\psi(\cos u))\,du,$$

где $P_n^r(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(t)$. Тогда

$$\left|f_1(t)-A_n^r(t)\right| \le \int_0^{\pi}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left|f(\cos u)-\psi(\cos u)\right|du +$$

$$+\int_0^{\pi}\left|D_r(t+u)-P_n^r(t+u)\right|\left|f(\cos u)-\psi(\cos u)\right|du = I_1 + I_2.$$

Пусть t_k, $k=0,1,\ldots,N$, — точки отрезка $[0,\pi/2]$ такие, что $\cos t_k = x_k$ и $F_k = (t_{k+1}, t_k)\bigcup(\pi-t_k, \pi-t_{k+1})$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Тогда, используя оценку аппроксимации функции $f(\cos u)$ функцией $\psi(\cos u)$ (см. теорему 1), для $t\in(t_{N-1}, \pi-t_{N-1})$ получаем

$$I_1 \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{F_k}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left\{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\,\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right\}du \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\frac{a_r}{n}\sin t\right\}\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)-P_n^r(u)\right|du +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{F_k}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left|\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)-\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\right|du +$$

$$+\frac{a_r}{2n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{F_k}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t\right|du =$$

$$= I_1^0 + I_1^1 + I_1^2.$$

Очевидно, что

$$I_1^0 = \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)-\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)\sin t. \tag{26}$$

Чтобы оценить I_1^1, необходимо воспользоваться леммой 2, положив $b=\dfrac{a_r}{n}$, $s=\sin t_{k-1}$, $\tau=\sin t$, и учесть, что $u\in F_k$, а также неравенство (10):

$$\left|\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)-\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\right| \le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)}{\sin t}\left|\sin t-\sin t_{k-1}\right| \le$$

$$\le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)}{\sin t}\left\{\left|\sin t-\sin u\right|+\left|\sin u-\sin t_{k-1}\right|\right\} \le$$

$$\le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)}{\sin t}\left\{\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|+\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

Используя последнее неравенство и неравенство (7), находим

$$I_1^1 \le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)}{\sin t}\left\{\int_0^\pi \left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|du+\frac{2\pi K_r}{n^{r+1}}\right\} \le$$

$$\le C_r\frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)}{\sin t}\frac{\ln n}{n^{r+1}} \le C_r'\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\frac{\ln n}{n^{r+1}}, \tag{27}$$

где величина C_r' зависит только от r.

Чтобы оценить I_1^2, применим для разности $\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1} - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t$ лемму 1, положив $b = \frac{a_r}{n}$, $s = \sin t_{k-1}$, $\tau = \sin t$, и воспользуемся тем, что $u \in F_k$, а также неравенством (10):

$$\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t\right| \le \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\left|\sin t-\sin t_{k-1}\right| \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\left|\sin t-\sin u+\sin u-\sin t_{k-1}\right| \le 2\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\left[\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|+\frac{2\pi}{n}\right].$$

Из последнего неравенства и неравенства (7) получаем

$$I_1^2 \le C_r\frac{\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\ln n}{n^{r+2}} \le C_r\frac{\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)\ln n}{n^{r+1}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)}. \tag{28}$$

Пусть теперь $0 \le \sin t \le \sin t_{N-1}$. В этом случае на каждом множестве F_k в силу теоремы 1 величину $\left|f(\cos u)-\psi(\cos u)\right|$ оценим суммой

$$\frac{1}{2}\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{K_{r+1}}{K_r n}\omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin t+\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)-\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\right| +$$

$$+\frac{a_r}{2n}\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right|$$

и аналогично получим

$$I_1 \le \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin t+\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{F_k}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right|\left|\omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t_{k-1})\right) - \omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\right|du +$$

$$+\frac{a_r}{2n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{F_k}\left|D_r(t-u)-P_n^r(t-u)\right| \times$$

$$\times\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t_{k-1})\right)\sin t_{k-1} - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right|du = I_1^0+I_1^1+I_1^2.$$

Чтобы оценить I_1^1, применим лемму 2, положив $b = a_r/n$, $s = \sin t_{k-1}$, $\tau = \sin t + 1/n$:

$$\left|\omega\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\right| \le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left|\sin t-\sin t_{k-1}+\frac{1}{n}\right| \le$$

$$\le \frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left[|\sin t-\sin u|+|\sin u-\sin t_{k-1}|+\frac{1}{n}\right] \le$$

$$\le 2\frac{\omega\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left[\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|+\frac{2\pi}{n}\right].$$

Следовательно,

$$I_1^1 \le C_r\frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)\ln n}{n^{r+1}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)}. \tag{29}$$

Для оценки I_1^2 воспользуемся леммой 1, положив $b = \frac{a_r}{n}$, $s = \sin t_{k-1}$, $\tau = \sin t + \frac{1}{n}$:

$$\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t_{k-1})\right)\sin t_{k-1} - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right| \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left|\sin t+\frac{1}{n}-\sin t_{k-1}\right| \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left|\sin t-\sin u+\sin u-\sin t_{k-1}+\frac{1}{n}\right| \le$$

$$\le 2\omega'\left(\frac{a_r}{n}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)\right)\left[\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|+\frac{2\pi}{n}\right].$$

Из полученного неравенства следует оценка (28) для I_1^2 и в этом случае.

Переходя к оценке интеграла I_2, во-первых, заметим, что для $u \in F_k$

$$|f(\cos u)-\psi(\cos u)| < \frac{1}{2}\omega\left(\frac{a_r}{n}(\sin t_{k-1})\right) < 2\omega\left(\frac{\sin t_{k-1}}{n}\right). \tag{30}$$

Во-вторых, в силу элементарного неравенства для выпуклых вверх функций

$$\omega(t_1) < \frac{\omega(t_2)}{t_2}(t_1+t_2), \qquad t_1,\ t_2>0,$$

для каждого $u \in F_k$ получим оценку

$$\omega\left(\frac{\sin t_{k-1}}{n}\right) < \frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left(\sin t_{k-1}+\sin t+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left(\sin t_{k-1}-\sin u+\sin u+\sin t+\frac{1}{n}\right) \le$$

$$\leq 2\frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\left(\sin\frac{u+t}{2}+\frac{2\pi}{n}\right). \tag{31}$$

В силу (30), (31)

$$I_2 \leq 4\frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)}{\sin t+\frac{1}{n}}\int_0^{\pi}\left|D_r(t+u)-P_n^r(t+u)\right|\left(\sin\frac{u+t}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)du \leq$$

$$\leq C_r\frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)\ln n}{n^{r+1}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)}. \tag{32}$$

Из соотношений (26)–(29) и (32) следует оценка поточечного приближения функции $f_1(t)$:

$$\left|f_1(t)-T_n^r(t)\right| \leq \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)-$$

$$-\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)\sin t+C_r\frac{\omega\left(\frac{\sin t+1/n}{n}\right)\ln n}{n^{r+1}\left(\sin t+\frac{1}{n}\right)}. \tag{33}$$

Рассмотрим приближение функции $f_2(t)$. Поскольку после интегрирования по частям

$$f_2(t) = I_r(\psi(\cos u)) = -\int_{-\pi}^{\pi}D_{r+1}(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\,du,$$

то для приближения функции $f_2(t)$ используем тригонометрический полином $B_n^r(t)$ вида

$$B_n^r(t) = -\int_{-\pi}^{\pi}P_n^{r+1}(t-u)\psi'(\cos u)\sin u\,du,$$

где $P_n^{r+1}(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_{r+1}(t)$. Точно так же, как было доказано (15), нетрудно показать, что

$$\left|\psi'(\cos u)\right| \leq \omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right), \qquad u\in[-\pi,\pi]. \tag{34}$$

Используя неравенство (34), получаем

$$\left|f_2(t)-B_n^r(f;x)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{r+1}(t-u)-B_n^r(t-u)\right|\omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right)|\sin u|du \leq$$

$$\leq \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{r+1}(t-u)-B_n^r(t-u)\right|du +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{r+1}(t-u)-B_n^r(t-u)\right|\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right)|\sin u|-\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t\right|du =$$

$$= \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t+\Delta_r(t).$$

Оценка величины $\Delta_r(t)$ осуществляется точно так же, как и величины $\Delta(t)$ при доказательстве теоремы 2 для $r = 0$:

$$\Delta_r(t) \le C_r \begin{cases} \omega'\left(\dfrac{a_r}{n}\sin t\right)\dfrac{\ln n}{n^{r+2}}, & \sin t \ge \sin t_{N-1}; \\ \omega'\left(\dfrac{a_r}{n}\sin t_{N-1}\right)\dfrac{\ln n}{n^{r+2}}, & \sin t < \sin t_{N-1}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|f_2(t) - B_n^r(t)\right| \le \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)\sin t + C_r \frac{\omega\left(\dfrac{\sin t + 1/n}{n}\right)\ln n}{n^{r+1}\left(\sin t + \dfrac{1}{n}\right)}. \tag{35}$$

Из оценок (33), (35) следует справедливость леммы 6.

Лемма 7. *Пусть для 2π-периодической функции $f(x)$ существует тригонометрический полином $g_n(t)$ степени не выше n такой, что*

$$|f(x) - g_n(t)| \le L_n^k\left(|\sin t| + \frac{1}{n}\right)^k \omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right),$$

где $k > 0$, а величина L_n^k зависит только от n и k. Тогда существует тригонометрический полином $G_n(t)$ степени не выше n такой, что

$$|I_1(f)(t) - G_n(t)| \le L_n^k d_k \frac{(|\sin t| + 1/n)^k}{n}\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right),$$

где d_n зависит только от k.

Доказательство близко к приведенному в работе [9] (см. лемму 1). Пусть a_0 — среднее значение разности $f(t) - g(t)$ и $F(t) = I_1(f - g_n - a_0)(t) = I_1(f)(t) - P_n(t)$, где $P_n(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n. Оценим вторую разность с шагом $u > 0$ функции $F(t)$:

$$\begin{aligned} \left|\Delta_n^2 F(t)\right| &= u\left|f(t+h_1) - g_n(t+h_1) - f(t+h_2) + g_n(t+h_2)\right| \le \\ &\le 2u \max_{-u \le v \le u}\left|f(t+v) - g_n(t+v)\right| \le \\ &\le 2uL_n^k \max_{-u \le v \le u}\left(|\sin(t+v)| + \frac{1}{n}\right)^k \omega\left(\frac{|\sin(t+v)| + 1/n}{n}\right) \le \\ &\le L_n^k d_k u\left[\left(|\sin t| + \frac{1}{n}\right)^k + u^k\right]\left\{\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right) + (nu+1)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Функцию $I_1(f)(t) = F(t) + P_n(t)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $G_n(x) = D_{n,k_0}(F;t) + P_n(t)$, где $D_{n,k_0}(F;t)$ — обобщенный многочлен Джексона [14, 15, с. 219]:

$$D_{n,k_0}(F;t) = \int_0^\pi (F(t+u) + F(t-u))\,K_{n,k_0}(u)\,du,$$

$$K_{n,k_0}(u) = b_s\left(\frac{\sin\dfrac{su}{2}}{\sin\dfrac{u}{2}}\right)^{2k_0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,k_0}(u)\,du = 1,$$

$$s - 1 = \left[\frac{n}{k_0}\right], \quad k + 6 > 2k_0 > k + 3.$$

Тогда, используя (36), получаем

$$\left|I_1(f)(t)-G_n(t)\right| = \left|F(t)-D_{n,k_0}(F;t)\right| = \left|\int_0^\pi \Delta_u^2 F(t) K_{n,k_0}(u)\,du\right| \le$$

$$\le L_n^k d_n \int_0^\pi u\left(\left(|\sin t|+\frac{1}{n}\right)^k + u^k\right)\left\{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)+(nu+1)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}dt \le$$

$$\le L_n^k d_k \frac{(|\sin t|+1/n)^k}{n}\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы 7 следует оценка поточечного приближения $I_r(f(\cos u))(t)$, где $f\in H^\omega$, по порядку лучшая у концов отрезка $(0,\pi)$ по сравнению с (25).

Действительно, в силу теоремы А. Ф. Тимана [15, с. 276] для любой функции $f\in H^\omega$ существует тригонометрический полином $g_n^0(t)$ такой, что

$$\left|f(\cos t)-g_n^0(t)\right| \le C\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right).$$

Применяя лемму 7, методом математической индукции устанавливаем для любого натурального числа r существование четного тригонометрического полинома $G_n^r(t)$ такого, что

$$\left|I_r(f(\cos u))(t)-G_n^r(t)\right| \le C_r^r \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)}{n^r}. \tag{37}$$

Из леммы 7 и неравенства (37) следует такое утверждение.

Лемма 8. *Для любого натурального числа r существует последовательность $\{M_n^r(t)\}$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что*

$$\left|R_r(t)-M_n^r(t)\right| \le C_r \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)\left(|\sin t|+\frac{1}{n}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}. \tag{38}$$

Доказательство. Для $r=1$ утверждение леммы следует из (37), равенства (24) и леммы 7. Пусть утверждение леммы 8 имеет место для $r=k\ge 1$, т. е. существует четный тригонометрический полином $M_n^k(t)$ степени не выше n, для которого имеет место (38) при $r=k$. Тогда

$$\left|\sin t\left(R_k(t)-M_k^r(t)\right)\right| \le C_k \frac{\omega\left(\frac{|\sin t|+1/n}{n}\right)\left(|\sin t|+\frac{1}{n}\right)^{k}}{n^{k+1}}. \tag{39}$$

Используя теперь равенство (23), оценки (37) и (39), замечаем, что для $R'_{k+1}(t)$ выполняется условие леммы 7. Следовательно, в силу леммы 7 лемма 8 справедлива для $r=k+1$. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 8 и равенства (22) для любой функции $f\in H^\omega$ следует существование алгебраического многочлена $Q_n^r(f;x)$ такого, что для любого $t\in[0,\pi]$

$$\left|f_r(\cos t) - Q_n^r(f; \cos t)\right| \le$$

$$\le \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sin t}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right) + C_k \frac{\omega\left(\frac{|\sin t| + 1/n}{n}\right)\left(|\sin t| + \frac{1}{n}\right)^{r-1} \ln n}{n^{r+1}},$$

а это эквивалентно утверждению теоремы 2.

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 295–322.
2. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281–283.
3. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441–447.
4. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328–340.
5. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53–60.
6. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W_∞^1 алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 4. – С. 597–602.
7. *Брудный Ю. А.* Работы А. Ф. Тимана по полиномиальной аппроксимации функций // Материалы всесоюзн. конф. по теории приближения функций. – Днепропетровск, 1991. – С. 13–17
8. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Мат. заметки. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113–121.
9. *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**, № 2. – С. 261–280.
10. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 940–951.
11. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**. – С. 748–751.
12. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**. – С. 29–44.
13. *Покровский А. В.* Об одной теореме А. Ф. Тимана // Функцион. анализ и его применения. 1967. – **1**, № 3. – С. 93–94.
14. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 219–242.
15. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 20.12.99