УДК 517.927

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев),
В. Н. Пивоварчик (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

АСИМПТОТИКА ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

On a finite interval $[0, l]$, we consider a differential equation

$$(a(x)y'(x))' + [\mu^2\rho(x) + \mu\rho_1(x) + \rho_2(x)]y(x) = 0$$

with a parameter $\mu \in C$. Under conditions that $a(x)$, $\rho(x) \in L_\infty[0, l]$, $\rho_j(x) \in L_1[0, l]$, $j = 1, 2$, relations $a(x) \geq m_0 > 0$ and $\rho(x) \geq m_1 > 0$ are true almost everywhere, and $a(x)\rho(x)$ is a function absolutely continuous on the interval $[0, l]$, we obtain exponential type asymptotic formulas for the fundamental system of solutions of this equation as $|\mu| \to \infty$.

Розглянуто диференціальне рівняння на скінченному відрізку $[0, l]$ із параметром $\mu \in C$, яке має вигляд

$$(a(x)y'(x))' + [\mu^2\rho(x) + \mu\rho_1(x) + \rho_2(x)]y(x) = 0.$$

За умов $a(x)$, $\rho(x) \in L_\infty[0, l]$, $\rho_j(x) \in L_1[0, l]$, $j = 1, 2$, і майже скрізь $a(x) \geq m_0 > 0$, $\rho(x) \geq \geq m_1 > 0$, $a(x)\rho(x)$ — абсолютно неперервна функція на $[0, l]$, одержано асимптотичні формули експоненціального типу для фундаментальної системи розв'язків цього рівняння при $|\mu| \to \infty$.

1. Введение. Будем рассматривать уравнение Штурма – Лиувилля

$$(a(x)y'(x))' + [\mu^2\rho(x) + \mu\rho_1(x) + \rho_2(x)]y(x) = 0, \quad x \in [0, l], \tag{1}$$

где $y' = dy/dx$, $\mu \in C$ — числовой параметр, вещественные измеримые функции $a(x)$, $\rho(x)$ удовлетворяют при почти всех $x \in [0, l]$ оценкам

$$0 < m_0 \leq a(x) \leq M_0 < \infty, \quad 0 < m_1 \leq \rho(x) \leq M_1 < \infty, \tag{2}$$

и комплекснозначные функции

$$\rho_j(x) \in L_1[0, l], \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Известно [1, 2] (гл. 2, § 3), что если в дополнение к условиям (2) коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими, то для уравнения (1) существует фундаментальная система решений $y_{0,1}(x, \mu)$, $y_{0,2}(x, \mu)$ с асимптотическими представлениями

$$\begin{gathered} y_{0,j}(x, \mu) = (a(x)\rho(x))^{-1/4} \exp\left\{(-1)^j i\mu \int_0^x \sqrt{\rho(t)/a(t)}\,dt\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^x \rho_1(t)/\sqrt{a(t)\rho(t)}\,dt\right\}[1 + o(1)], \\ a(x)y'_{0,j}(x, \mu) = (-1)^j i\mu(a(x)\rho(x))^{1/4} \exp\left\{(-1)^j i\mu \int_0^x \sqrt{\rho(t)/a(t)}\,dt\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^x \rho_1(t)/\sqrt{a(t)\rho(t)}\,dt\right\}[1 + o(1)] \quad \forall x \in [0, l],\ \operatorname{Im}\mu \geq 0, \quad \mu \to \infty,\ j = 1, 2. \end{gathered} \tag{4}$$

Так, если $\rho_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2$, и функции $a(x)$, $\rho(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, l]$, то это утверждение можно получить, воспользовавшись преобразованием Лиувилля

$$t = \int_0^x \sqrt{\rho(s)/a(s)}\,ds, \quad y(x) = (a(x)\rho(x))^{-1/4} z(t),$$

сводящим (1) к уравнению

$$z''(t) + [\mu^2 + q(t)]z(t) = 0, \quad t \in [0, d], \quad d = \int_0^l \sqrt{\rho(s)/a(s)}\,ds$$

с непрерывным потенциалом

$$q(t) = a^{1/4}\rho^{-3/4} \frac{d}{dx}\left\{a \frac{d}{dx}(a\rho)^{-1/4}\right\} \in C[0, d],$$

и затем применить асимптотические формулы для решений этого уравнения (см. [1]). При этом $o(1)$ в (4) можно заменить на $O(|\mu|^{-1})$. Эти же рассуждения, с соответствующей модификацией рассмотрений из [1] (см. замечание на с. 58), позволяют получить формулы (4) (с таким же порядком остатка $O(|\mu|^{-1})$ при $\mu \to \infty$) и в случае менее жестких условий на коэффициенты уравнения, а именно, когда функции $a(x)$, $\rho(x)$ принадлежат пространству Соболева $W_1^2 = W_1^2[0, l]$ и коэффициенты $\rho_1(x) \equiv 0$, $\rho_2(x) \in L_1[0, l]$.

Отметим (см. [3, 4]), что асимптотические формулы (4) не являются справедливыми на всем классе непрерывных положительных на отрезке $x \in [0, l]$ функций $a(x)$, $\rho(x)$, даже если $\rho_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2$ (хотя выражения (4) и имеют смысл для таких $a(x)$, $\rho(x)$). Естественно возникает вопрос о минимальных условиях гладкости на коэффициенты уравнения (1), при которых можно гарантировать существование фундаментальной системы решений с асимптотическими формулами (4). Из наиболее общих результатов, относящихся к обоснованию формул (4), отметим результаты статьи [5] (см. также имеющуюся там библиографию). В этой статье рассматривалось дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, l], \qquad (5)$$

с коэффициентами

$$a_j(x) \in L_1[0, l], \quad j = 1, \ldots, n, \quad a_0(x) \in W_1^1[0, l], \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

В частности, из результатов [5] можно вывести утверждение (4) при $\rho_1(x) \equiv 0$ и условии

$$a(x)\rho(x) \in W_1^1[0, l] \qquad (6)$$

с указанием влияния свойств гладкости функций $a_0(x)$, $a_1(x)$ на стремление к нулю остаточного члена в асимптотических формулах. Отметим, что в [5] применялась довольно сложная техника квазидифференциальных выражений.

В данной статье доказано, что асимптотические формулы (4) для решений уравнения (1) остаются справедливыми при выполнении условия (6) (вместе с условиями (2)) и при минимальных условиях гладкости на коэффициент $\rho_1(x) \in L_1[0, l]$, наличие которого, как видно из (4), также сказывается на виде асимптотических формул. Получена оценка остатка в асимптотических формулах в терминах интегральных модулей непрерывности $\omega_1(\cdot\,; |\mu|^{-1})$ функций $(a(x)\rho(x))'/(a(x)\rho^3(x))^{1/2}$ и $\rho_1(x)/\rho(x)$. Основная идея получения асимптотических формул для уравнения (1), использованная в настоящей работе, совершенно отлична от метода статьи [5] и состоит в сведении уравнения (1) к системе интегральных уравнений на основании матричного метода [6] и последующем анализе асимптотических свойств решений этой системы. Это составляет содержание пунктов 2 и 3. В п. 4 сформулирован и доказан основной результат статьи (теорема 1) об асимптотике фундаментальной системы решений уравнения (1).

В работе [7] изучались оценки по параметру $\mu \to +\infty$ решения задачи Коши уравнения (1) с начальными данными

$$y(0) = 0, \quad (ay')'(0) = 1. \tag{7}$$

В частности, в [7] при условиях (2), (3), (6) и $\rho_1(x) \equiv 0$ доказано, что для решения задачи (1), (7) справедлива оценка

$$|y(x, \mu)| \le c/\mu, \quad x \in [0, l], \quad \mu > 0, \tag{8}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей от $m_0 m_1$ и $\|(a(x)\rho(x))'\|_{L_1}$. В п. 5 данной статьи, в качестве следствия из основной теоремы, показано, что при отмеченных условиях на коэффициенты уравнения (1) имеет место более общий результат, а именно, для решения задачи Коши справедлива классическая асимптотическая формула

$$y(x, \mu) = \frac{\sin\left(\mu \int\limits_0^x \sqrt{\rho(t)/a(t)}\,dt\right)}{(a(0)\rho(0)a(x)\rho(x))^{1/4}\mu} + o(1), \quad \mu \to +\infty.$$

Как известно, уравнение (1) представляет собой модельный пример для многих более сложных уравнений и ряд физических задач приводит к исследованию различных спектральных краевых задач для (1), в связи с чем необходимо изучать асимптотические свойства его решений. Содержательная библиография по этим вопросам имеется в статье [8]. В частности, в последнее время большое внимание уделяется рассмотрению несамосопряженных спектральных задач, связанных с колебаниями неоднородной струны при различных условиях нагружения и демпфирования (см., например, работы [9–12]). Полученные в данной статье результаты позволяют расширить класс возможных коэффициентов уравнения (1) при исследовании спектральных краевых задач. В п. 5 дано приложение теоремы 1 к спектральной задаче

$$y''(x) + \mu^2 \rho(x) y(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \tag{9}$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) + i\mu y(1) = 0, \tag{10}$$

описывающей нормальные колебания неоднородной струны с плотностью $\rho(x)$ со свободным левым концом и вязким демпфированием на правом конце $x = 1$. В статье [9] (теорема 8.1) доказано, что если плотность, удовлетворяющая условиям (2), является липшицевой, т. е. $|\rho(x+h) - \rho(x)| \le c|h|$ и $\rho(1) \ne 0$, то мнимые части собственных значений μ_k задачи (9), (10) допускают равномерную по k оценку $\operatorname{Im} \mu_k \le c < \infty$. В п. 5 данной работы показано, что такая оценка справедлива и при менее ограничительном требовании гладкости $\rho(x) \in$ $\in W_1^1$.

2. Сведение дифференциального уравнения (1) к системе интегральных уравнений на отрезке. Всюду далее считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (2), (3), (6). Здесь, следуя матричному методу (см. [6, с. 40]), сведем уравнение (1) к системе интегральных уравнений на отрезке $[0, l]$.

Определение. *Под решением уравнения* (1) *понимаем такую функцию* $y(x)$ *из пространства Соболева* W_1^1, *для которой* $a(x)y'(x) \in W_1^1$ (*т. е. функции* $y(x)$ *и* $a(x)y'(x)$ *абсолютно непрерывны на отрезке* $[0, l]$) *и уравнение* (1) *выполняется почти всюду на отрезке* $[0, l]$.

Введем в рассмотрение необходимые для дальнейшего функции

$$g(x) = a(x)\rho(x) \in W_1^1, \quad b(x) = \sqrt{\rho(x)/a(x)} \equiv \frac{\sqrt{g(x)}}{a(x)}, \qquad x \in [0, l]. \quad (11)$$

При этом, согласно условиям (2), при почти всех $x \in [0, l]$ справедливы оценки

$$m \le b(x) \le M, \quad m_{0,1} \le g(x) \le M_{0,1} \qquad (12)$$

с постоянными

$$m = (m_1/M_0)^{1/2}, \quad M = (M_1/m_0)^{1/2}, \quad m_{0,1} = m_0 m_1, \quad M_{0,1} = M_0 M_1.$$

Пусть $\mu \ne 0$ и $y = y(x, \mu)$ — решение уравнения (1). Введем в рассмотрение функции $w_1 = w_1(x, \mu)$, $w_2 = w_2(x, \mu)$:

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{y'}{i\mu b}\right), \quad w_2 = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y'}{i\mu b}\right), \qquad (13)$$

так что для y и ay' справедливы представления

$$y = w_1 + w_2, \quad ay' = i\mu\sqrt{g}(w_1 - w_2). \qquad (14)$$

Из данного выше определения решения уравнения (1) и выражений (13) вытекает, что функции w_1, w_2 принадлежат пространству W_1^1. Дифференцируя равенства (13) и используя уравнение (1) вместе с соотношениями (11) и (14), непосредственно убеждаемся, что для производных w_1', w_2' в пространстве L_1 верны следующие равенства, связывающие их с функциями w_1, w_2:

$$w_1' = i\mu b w_1 - \frac{g'}{4g}(w_1 - w_2) + \frac{i}{2g^{1/2}}(\rho_1 + \mu^{-1}\rho_2)(w_1 + w_2),$$

$$w_2' = -i\mu b w_2 + \frac{g'}{4g}(w_1 - w_2) - \frac{i}{2g^{1/2}}(\rho_1 + \mu^{-1}\rho_2)(w_1 + w_2).$$

Таким образом, пара функций w_1, w_2 является решением системы дифференциальных уравнений

$$w_1' - Q_1(x, \mu)w_1 = R_1(x, \mu)w_2, \quad w_2' - Q_2(x, \mu)w_2 = R_2(x, \mu)w_1 \qquad (15)$$

с коэффициентами

$$R_1(x, \mu) = \frac{g'}{4g} + \frac{i(\mu\rho_1 + \rho_2)}{2\mu g^{1/2}}, \quad R_2(x, \mu) = \frac{g'}{4g} - \frac{i(\mu\rho_1 + \rho_2)}{2\mu g^{1/2}},$$
$$Q_1(x, \mu) = i\mu b - R_2(x, \mu), \quad Q_2(x, \mu) = -i\mu b - R_1(x, \mu). \qquad (16)$$

Стандартным способом система (15) сводится к системе интегральных уравнений. Действительно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$w'(x) - p(x)w(x) = f(x), \quad x \in [0, l], \quad p(x) \in L_1, \quad f(x) \in L_1,$$

имеет вид [13, с. 35]

$$w(x) = C_1 \exp\left(\int_0^x p(t)\,dt\right) + \int_0^x \exp\left(\int_t^x p(s)\,ds\right) f(t)\,dt, \qquad (17)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Используя произвольность C_1, это же решение можно представить в виде

Выполним замену неизвестной функции

$$w_1(x) = \exp\left\{\int_0^x Q_1(\tau, \mu)\, d\tau\right\} z_1(x). \tag{22}$$

Тогда после простых преобразований и перестановки порядков интегрирования в (21) для определения функции $z_1(x)$ получаем линейное интегральное уравнение

$$z_1(x) + (T_1 z_1)(x) = 1, \quad x \in [0, l], \tag{23}$$

где оператор

$$(T_1 z)(x) = \int_0^l K_1(x, s; \mu)\, R_2(s, \mu)\, z(s)\, ds$$

с ядром

$$K_1(x, s; \mu) = \int_0^{m_-(x,s)} q(t, s, \mu)\, R_1(t, \mu)\, dt, \quad m_-(x, s) = \min\{x, s\}.$$

При этом функция $w_2(x)$, согласно (21), (22), имеет вид

$$w_2(x) = -\exp\left\{\int_0^x Q_1(\tau, \mu)\, d\tau\right\}(S_1 z_1)(x), \tag{24}$$

где интегральный оператор

$$(S_1 z)(x) = \int_x^l q(x, t, \mu) R_2(t, \mu)\, z(t)\, dt.$$

Если в системе (19) положить $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ и сделать замену неизвестной функции

$$w_2(x) = \exp\left\{-\int_x^l Q_2(\tau, \mu)\, d\tau\right\} z_2(x), \tag{25}$$

то для определения функции $z_2(x)$ получим уравнение

$$z_2(x) + (T_2 z_2)(x) = 1, \quad x \in [0, l], \tag{26}$$

с интегральным оператором

$$(T_2 z)(x) = \int_0^l K_2(x, s; \mu)\, R_1(s, \mu)\, z(s)\, ds,$$

$$K_2(x, s; \mu) = \int_{m_+(x,s)}^l q(s, t, \mu) R_2(t, \mu)\, dt, \quad m_+(x, s) = \max\{x, s\}.$$

В этом случае на основании (19), (25) функция $w_1(x)$ выражается через $z_2(x)$ по формуле

$$w_1(x) = \exp\left\{-\int_x^l Q_2(\tau, \mu)\, d\tau\right\}(S_2 z_2)(x), \tag{27}$$

с оператором

$$(S z)(x) = \int_0^x q(t, x, \mu) R_1(t, \mu)\, z(t)\, dt.$$

Лемма 1. *Пусть K — линейный оператор, непрерывно действующий из пространства L_1 в банахово пространство B, причем для некоторых постоянных k, k_0, k_1 выполняются оценки*

$$\| Kf\|_B \le k\| g\|_{L_1} \qquad \forall f \in L_1,$$

$$\| Kf\|_B \le k_0\| f\|_{L_1} + k_1\left\| f'\right\|_{L_1} \qquad \forall f \in W_1^1.$$

Тогда для любых $f \in L_1$ и $h \in (0, l)$ справедлива оценка

$$\| Kf\|_B \le A(k + k_1 h^{-1})\,\omega_1(f; h) + k_0(2A+1)\| f\|_{L_1}, \tag{30}$$

где A — постоянная из предложения 1.

Рассмотрим оценки ядер $K_j(x, s; \mu)$, которые определяют интегральные операторы $K_j(\mu)$, $j = 1, 2$, и аналитически зависят от $\mu \in C$ при фиксированных $x, s \in [0, l]$.

Лемма 2. *Для любых $r_0 \ge 0$ и $n = 0, 1, \ldots$ найдется такая постоянная $A_n(r_0) > 0$, что при $\operatorname{Im}\mu > -r_0$, $|\mu| \ge 1$, для ядер $K_j(x, s; \mu)$, $j = 1, 2$, и их производных по μ справедливы равномерные по $x, s \in [0, l]$ оценки*

$$\left|\frac{d^n K_j}{d\mu^n}\right| \le A_n(r_0)\delta(|\mu|), \quad \delta(|\mu|) = \delta(g_0; |\mu|) + \delta(g_1; |\mu|) + |\mu|^{-1}\|\rho_2\|_{L_1}, \tag{31}$$

где $n = 0, 1, \ldots$ и функции

$$g_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)b(x)} \equiv \frac{(a(x)\rho(x))'}{\left(a(x)\rho^{3/2}(x)\right)^{1/2}}, \qquad g_1(x) = \frac{\rho_1(x)}{\rho(x)}.$$

Доказательство. Отметим, что для доказательства леммы достаточно установить оценку (31) при условии $\rho_2(x) \equiv 0$. Это вытекает из определения ядер $K_j(x, s; \mu)$ и простой оценки $|\exp(\mu) - 1| \le |\mu| \exp(|\operatorname{Re}\mu|)$, $\mu \in C$. Кроме того, доказательство леммы проведем только в случае $j = 1$, так как для ядра $K_2(x, s; \mu)$ оценки (31) получаются аналогично. Таким образом, считая $\rho_2(x) \equiv 0$, положим

$$f(x) = \left(\frac{g'(x)}{4g(x)} + \frac{i\rho_1(x)}{2g^{1/2}(x)}\right)\frac{1}{b(x)} \in L_1 \tag{32}$$

и рассмотрим ядро $K_1(x, s; \mu)$ как линейный непрерывный оператор $K_1(\mu)$, действующий на функции $f(x)$ из пространства L_1 в банахово пространство $B = C([0, l] \times [0, l])$ непрерывных на квадрате функций:

$$(K_1(\mu) f)(x, s) = \int\limits_0^{m_-(x,s)} f(t)\, b(t)\, q(t, s)\, dt.$$

Из (28) имеем оценки норм

$$\| K_1(\mu) f\|_B \le M v(\mu)\| f\|_{L_1} \qquad \forall f \in L_1, \quad |\mu| \ge 1. \tag{33}$$

Если же f принадлежит пространству W_1^1, то, используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left\{\int\limits_t^s b(\tau)\, d\tau\right\} = -b(t)$$

и интегрируя по частям, при $0 \le x \le s \le l$ получаем равенство

$$2i\mu(K_1(\mu)f)(x,s) = -\int_0^x f(t)\exp\left\{i\int_t^s \rho_1(t)/g^{1/2}(\tau)d\tau\right\} d\left(\exp\left\{2i\mu\int_t^s b(\tau)d\tau\right\}\right) =$$

$$= -f(x)q(x,s,\mu) + f(0)q(0,s,\mu) + \int_0^x \left[f'(t) - if(t)\frac{\rho_1(t)}{g^{1/2}(t)}\right] q(t,s,\mu)\,dt.$$

Аналогично в случае $s \le x$ имеем соотношение

$$2i\mu(K_1(\mu)f)(x,s) = -f(s) + f(0)q(0,s,\mu) + \int_0^s \left[f'(t) - if(t)\frac{\rho_1(t)}{g^{1/2}(t)}\right] q(t,s,\mu)\,dt.$$

Таким образом, при действии оператора $K_1(\mu)$ на функции $f \in W_1^1$ справедлива оценка

$$2|\mu|\,\|K_1(\mu)f\|_B \le \upsilon(\mu)\left\{(2+\upsilon_0)\|f\|_C + \left\|f'\right\|_{L_1}\right\}. \tag{34}$$

Далее, используя интегральное представление

$$lf(x) = \int_0^x tf'(t)\,dt - \int_x^l (l-t)f'(t)\,dt + \int_0^l f(t)\,dt, \quad f \in W_1^1,$$

получаем неравенство

$$\|f\|_C \le \left\|f'\right\|_{L_1} + l^{-1}\|f\|_{L_1},$$

а тогда из (34) и оценку

$$2|\mu|\,\|K_1(\mu)f\|_B \le \upsilon(\mu)\left\{(2+\upsilon_0)l^{-1}\|f\|_{L_1} + (3+\upsilon_0)\left\|f'\right\|_{L_1}\right\}, \quad f \in W_1^1. \tag{35}$$

Оценки (33), (35) показывают, что для оператора $K = K_1(\mu)$ выполнены условия леммы 1 с постоянными

$$k = M\upsilon(\mu), \quad k_0 = \frac{2+\upsilon_0}{2l|\mu|}\upsilon(\mu), \quad k_1 = \frac{3+\upsilon_0}{2|\mu|}\upsilon(\mu).$$

Полагая в (30) $h = |\mu|^{-1}$ при $|\mu| > l^{-1}$, для ядра $K_1(x,s;\mu)$ получаем оценку

$$|K_1(x,s;\mu)| \le \|K_1(\mu)f\|_B \le$$

$$\le \upsilon(\mu)\left\{A(M + (3+\upsilon_0)/2)\omega_1\left(f;|\mu|^{-1}\right) + (2A+1)\frac{2+\upsilon_0}{2l|\mu|}\|f\|_{L_1}\right\} \le$$

$$\le A(r_0)\delta(f;|\mu|), \quad \operatorname{Im}\mu \ge -r_0, \quad |\mu| \ge 1,$$

где функция $f(x)$ определена выражением (32). Отсюда с учетом равенства $g^{1/2}(x)b(x) = \rho(x)$ следует оценка (31) для $K_1(x,s;\mu)$ в случае $n = 0$.

Для производной $d^nK_1/d\mu^n$ имеем равенство (при $\rho_2(x) \equiv 0$)

$$\frac{d^nK_1}{d\mu^n} = (2i)^n \int_0^{m_-(x,s)} b(t)q(t,s,\mu)f_n(t)\,dt, \quad f_n(t) = \left(\int_s^t b(\tau)d\tau\right)^n f(t),$$

с функцией $f \in L_1$ из (32). Далее, действуя, как и в случае $n = 0$, получаем оценки (31) при произвольном натуральном n. Лемма доказана.

Поскольку для $f \in L_1$ справедливо соотношение $\delta(f;|\mu|) \to 0$ при $|\mu| \to \infty$, то из леммы 2 и определения операторов $T_j(\mu)$ получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любого* $r_0 \geq 0$ *найдутся такие* $R > 0$ *и постоянные* $c > 0$, $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *что при* $\operatorname{Im} \mu > -r_0$, $|\mu| > R$, *операторы* $I + T_1(\mu)$, $I + T_2(\mu)$ (I *— единичный оператор*) *являются непрерывно обратимыми в пространстве* $C[0, l]$, *причем*

$$(I + T_j(\mu))^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k T_j^k(\mu)$$

и выполняются оценки

$$\| T_j(\mu) \|_C \leq c\delta(|\mu|), \quad \| (I + T_j(\mu))^{-1} \|_C \leq c,$$

$$\left\| \frac{d^n}{d\mu^n} T_j(\mu) \right\|_C + \left\| \frac{d^n}{d\mu^n} (I + T_j(\mu))^{-1} \right\|_C \leq c_n \delta(|\mu|), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, согласно следствию 1 интегральные уравнения (23) и (26) однозначно разрешимы при $\operatorname{Im} \mu > -r_0$, $|\mu| > R = R(r_0)$ и для их решений $z_1(x) = z_1(x, \mu)$, $z_2(x) = z_2(x, \mu)$ справедливы представления

$$z_j(x) = (I + T_j(\mu))^{-1} e(x) = e(x) - (I + T_j(\mu))^{-1} T_j(\mu) e(x), \tag{36}$$

где функция $e(x) \equiv 1$, $x \in [0, l]$.

4. Асимптотика фундаментальной системы решений уравнения (1). Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} F_1(x, \mu) &= \frac{1}{g^{1/4}(x)} \exp\left(i\mu \int_0^x b(\tau)\, d\tau \right) \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^x \frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\, d\tau \right), \\ F_2(x, \mu) &= \frac{1}{g^{1/4}(x)} \exp\left(i\mu \int_x^l b(\tau)\, d\tau \right) \exp\left(\frac{i}{2} \int_x^l \frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\, d\tau \right), \end{aligned} \tag{37}$$

где функции $b(x)$, $g(x)$ определяются коэффициентами уравнения (1) согласно формулам (11).

Теорема 1. *Пусть функции* $a(x)$, $\rho(x)$ *удовлетворяют условиям* (2), (3), (6). *Тогда для любого* $r_0 \geq 0$ *найдется такое* $R > 0$, *что при* $\operatorname{Im} \mu > -r_0$, $|\mu| > R$, *уравнение* (1) *имеет фундаментальную систему решений* $y_1(x, \mu)$, $y_2(x, \mu)$, *аналитически зависящую от* μ *при каждом* $x \in [0, l]$, *для которой справедливы равномерные по* $x \in [0, l]$ *асимптотические при* $|\mu| \to \infty$ *формулы*

$$\begin{aligned} \frac{d^n y_j(x, \mu)}{d\mu^n} &= \frac{d^n F_j(x, \mu)}{d\mu^n} + \sum_{s=0}^{n} \left\{ \frac{d^s F_j(x, \mu)}{d\mu^s} O(\delta(|\mu|)) \right\}, \\ \frac{d^n \left(a(x) y_j'(x, \mu) \right)}{d\mu^n} &= -(-1)^j i\mu g^{1/2}(x) \frac{d^s F_j(x, \mu)}{d\mu^n} + \\ &+ \sum_{s=0}^{n} \left\{ \frac{d^s F_j(x, \mu)}{d\mu^s} O(|\mu| \delta(|\mu|)) \right\}, \quad n = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{38}$$

Доказательство. Пусть функции $z_j(x, \mu)$ определены согласно (36). Тогда согласно следствию 1 и (14), (22) – (27) функции

$$y_1(x,\mu) = g^{-1/4}(0)\exp\left(\int_0^x Q_1(t,\mu)\,d\tau\right)[(1-S_1(\mu))z_1](x),$$
$$y_2(x,\mu) = g^{-1/4}(l)\exp\left(-\int_x^l Q_2(t,\mu)\,d\tau\right)[(1+S_2(\mu))z_2](x) \tag{39}$$

являются решениями уравнения (1) при достаточно больших по модулю μ с $\operatorname{Im}\mu > -r_0$. Аналитичность при фиксированном x функций из (39) вытекает из аналитичности функций $z_j(x,\mu)$ и оператор-функций $S_j(\mu)$, $\mu \neq 0$, действующих в пространстве $C[0,l]$. При этом (см. (14))

$$a(x)\,y_1'(x,\mu) = i\mu g^{1/2}(x)g^{-1/4}(0)\exp\left(\int_0^x Q_1(t,\mu)\,d\tau\right)[(1+S_1(\mu))z_1](x),$$
$$a(x)\,y_2'(x,\mu) = -i\mu g^{1/2}(x)g^{-1/4}(l)\exp\left(-\int_x^l Q_2(t,\mu)\,d\tau\right)[(1-S_2(\mu))z_2](x). \tag{40}$$

Далее, для норм операторов $S_j(\mu)$ и их производных по μ, используя (12), (28), получаем оценки

$$\left\|\frac{d^n S_j(\mu)}{d\mu^n}\right\|_C \leq c_n'\upsilon(\mu), \qquad j = 1, 2,$$

с некоторыми постоянными $c_n' > 0$. Кроме того, справедливы равенства $(S_1(\mu)e)(x) = K_2(x,x;\mu)$, $(S_2(\mu)e)(x) = K_1(x,x;\mu)$, которые дают возможность при оценках $S_1(\mu)e$, $S_2(\mu)e$ воспользоваться леммой 2. Таким образом, следствие 1 и лемма 2 вместе с соотношениями (36) и асимптотическими при $|\mu| \to \infty$ равенствами

$$\int_0^x Q_1(\tau,\mu)\,d\tau = i\int_0^x\left[\mu b(\tau) + \frac{\rho_1(\tau)}{2g^{1/2}(\tau)}\right]d\tau + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{g(0)}{g(x)}\right) + \frac{\|\rho_2\|_{L_1}}{m_{0.1}^{1/2}}\,O\left(|\mu|^{-1}\right),$$
$$-\int_x^l Q_2(\tau,\mu)\,d\tau = i\int_x^l\left[\mu b(\tau) + \frac{\rho_1(\tau)}{2g^{1/2}(\tau)}\right]d\tau + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{g(l)}{g(x)}\right) + \frac{\|\rho_2\|_{L_1}}{m_{0.1}^{1/2}}\,O\left(|\mu|^{-1}\right),$$

дает возможность для решений $y_j(x,\mu)$ и их производных по x, определенных формулами (39), (40), установить асимптотические формулы (38). Тогда для вронскиана

$$\tilde W(\mu) \equiv a(x)W(x;y_1,y_2) = a(x)\left(y_1(x,\mu)y_2'(x,\mu) - y_1'(x,\mu)y_2(x,\mu)\right), \tag{41}$$

из (28) получаем асимптотическое представление

$$\tilde W(\mu) = -2i\mu\exp(i\mu d + id_1/2)\left[1 + O(\delta(|\mu|)\right], \qquad \operatorname{Im}\mu > -r_0, \quad |\mu| \to \infty, \tag{42}$$

с постоянными

$$d = \int_0^l b(\tau)\,d\tau, \qquad d_1 = \int_0^l \frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\,d\tau.$$

Из (42) следует линейная независимость функций $y_j(x,\mu)$, $j = 1, 2$, при достаточно больших по модулю μ. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Асимптотика решения $y_1(x,\mu)$ совпадает с асимптотической формулой для $y_{0,1}(x,\mu)$ из соотношений (4). С другой стороны, если записать функцию $F_2(x,\mu)$ в виде

$$F_2(x,\mu) = \frac{\exp(i\mu d + i d_1/2)}{g^{1/4}(x)} \exp\left(-i\mu\int_0^x b(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int_0^x \frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\,d\tau\right),$$

то нетрудно заметить, что из теоремы 1 следует утверждение о существовании фундаментальной системы решений уравнения (1) с асимптотическими формулами (4) (с соответствующими аналитическими свойствами по $\mu \in C$).

Рассмотрим на отрезке $x \in [0, l]$ более общее, чем (1), дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(a_0(x)y'(x))' + [2i\mu a_{1,1}(x) + a_1(x)]y'(x) + \\ + [\mu^2 a_{2,2}(x) + \mu a_{2,1}(x) + a_2(x)]y(x) = 0,\end{gathered} \tag{43}$$

где $a_0(x)$, $a_{1,1}(x)$, $a_{2,2}(x)$ — вещественные функции, причем считаем выполненными условия

$$0 < m \le a_0(x) \le M < \infty, \quad 0 < m \le a_{2,2}(x) \le M < \infty \quad \forall\, x \in [0, l], \tag{44}$$

$$a_0(x)a_{2,2}(x) \in W_1^1, \quad a_{1,1}(x) \in W_1^1, \quad a_{2,1} \in L_1, \quad a_j \in L_1, \quad j = 1, 2. \tag{45}$$

Пусть $y(x,\mu)$ — решение уравнения (43). Тогда для функции

$$u(x,\mu) = \exp\left(i\mu\int_0^x \frac{a_{1,1}(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau\right) y(x,\mu)$$

получаем уравнение

$$\begin{gathered}(a_0(x)y'(x))' + a_1(x)y'(x) + \Big[\mu^2(a_{2,2}(x) + a_{1,1}^2(x)/a_0(x)) + \\ + \mu(a_{2,1}(x) - i a_{1,1}'(x) - i a_1(x)a_{1,1}(x)/a_0(x)) + a_2(x)\Big]y(x) = 0, \quad x \in [0, l].\end{gathered} \tag{46}$$

При этом уравнение (46) можно записать в виде (1) (см. [16, с. 381]) с коэффициентами

$$\begin{gathered}a(x) = a_0(x)r(x), \quad r(x) = \exp\left(i\mu\int_0^x a_1(\tau)/a_0(\tau)\,d\tau\right), \\ \rho(x) = r(x)(a_{2,2}(x) + a_{1,1}^2(x)/a_0(x)), \quad \rho_2(x) = r(x)a_2(x), \\ \rho_1(x) = r(x)(a_{2,1}(x) - i a_{1,1}'(x) - i a_1(x)a_{1,1}/a_0(x)).\end{gathered} \tag{47}$$

Тогда в обозначениях (11) имеем

$$\begin{gathered}g(x) = r^2(x)(a_0(x)a_{2,2}(x) + a_{1,1}(x)), \\ b(x) = (a_0(x)a_{2,2}(x) + a_{1,1}^2(x))^{1/2}/a_0(x),\end{gathered} \tag{48}$$

и из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *При выполнении условий* (44), (45) *для любого* $r_0 \ge 0$ *найдется такое* $R > 0$, *что при* $\operatorname{Im}\mu > -r_0$, $|\mu| > R$, *уравнение* (43) *имеет фундаментальную систему решений* $y_1(x,\mu)$, $y_2(x,\mu)$, *аналитически зависящую от* μ *при каждом* $x \in [0, l]$, *для которой справедливы равномерные по* $x \in \in [0, l]$ *асимптотические формулы* (38) *с функциями* $F_j(x,\mu)$, *определенными согласно выражениям* (37), (47), (48).

В заключение этого пункта приведем пример, иллюстрирующий точность утверждения теоремы 1 относительно порядка убывания остатка в асимптотических формулах (38).

Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + [\mu^2 p^2(x) - i\mu p'(x)]\, y(x) = 0, \ x \in [0, 1], \qquad p(x) \in W_1^1[0, 1]. \quad (49)$$

Если дополнительно предположить, что функция $p(x)$ является вещественной и не обращается в нуль на отрезке $[0, 1]$ (для определенности считаем $p(x) > 0$), то из теоремы 1 следует (см. (37), (38), а также (31) и замечание 1) существование фундаментальной системы решений $y_1(x, \mu)$, $y_2(x, \mu)$ уравнения (49) с равномерным по $x \in [0, 1]$ асимптотическим при $\operatorname{Im}\mu \ge 0$ и $|\mu| \to \infty$ поведением

$$y_1(x, \mu) = \exp\left(i\mu \int_0^x p(\tau)\, d\tau\right)[1 + O(\delta_0(|\mu|))], \quad (50)$$

$$y_2(x, \mu) = \frac{1}{p(x)} \exp\left(-i\mu \int_0^x p(\tau)\, d\tau\right)[1 + O(\delta_0(|\mu|))], \quad (51)$$

где остаток

$$\delta_0(|\mu|) = \delta(p_0; |\mu|), \qquad p_0(x) = p_0'(x) / p^2(x). \quad (52)$$

С другой стороны, общее решение уравнения (49) имеет вид

$$y(x, \mu) = \exp\left(i\mu \int_0^x p(\tau)\, d\tau\right)\left[C_1 + C_2 \int_0^x \exp\left(-2i\mu \int_0^t p(\tau)\, d\tau\right) dt\right], \quad (53)$$

где C_j — произвольные постоянные [13, с. 383]. Интегрируя по частям выражение (53) и комбинируя подходящим образом постоянные C_1, C_2, находим, что асимптотическим формулам (50), (51) соответствуют следующие решения уравнения (49):

$$y_1(x, \mu) = \exp\left(i\mu \int_0^x p(\tau)\, d\tau\right),$$
$$y_2(x, \mu) = \frac{1}{p(x)} \exp\left(-i\mu \int_0^x p(\tau)\, d\tau\right)[1 + \varepsilon(x, \mu)], \quad (54)$$

где

$$\varepsilon(x, \mu) = p(x) \int_0^x \exp\left(2i\mu \int_t^x p(\tau)\, d\tau\right) p_0(t)\, dt.$$

Таким образом, решение $y_1(x, \mu)$ удовлетворяет асимптотическому равенству (50) с остатком $\delta_0(|\mu|) \equiv 0$. Рассмотрим функцию $\varepsilon(x, \mu)$ на предмет согласования с остатком $\delta_0(|\mu|)$ в асимптотической формуле (51), (52).

При $x = 1$, выполняя замену переменной интегрирования, получаем

$$\varepsilon(1, \mu) = p(1) \int_0^1 \exp\left(2i\mu \int_t^1 p(\tau)\, d\tau\right) p_0(t)\, dt =$$

$$= p(1) \int_0^{s_0} \exp(2i\mu s) \frac{p_0(t(s))}{p(t(s))}\, ds, \quad s = \int_t^1 p(\tau)\, d\tau, \quad s_0 = \int_0^1 p(\tau)\, d\tau.$$

Положим

$$p(x) = 1 + (1-x)^{\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \tag{55}$$

так что $p(x)$ является бесконечно дифференцируемой при $x \in [0, 1)$ и принадлежит пространству $W_1^1[0,1]$. Для такой функции, используя лемму Эрдейи, аналогично [17] (гл. 3, § 1) получаем для $\varepsilon(1, \mu)$ асимптотическое равенство

$$\varepsilon(1, \mu) = -\frac{\Gamma(\alpha)\exp(i\pi\alpha(1/2-\theta))}{2^{\alpha}|\mu|^{\alpha}} + O\left(|\mu|^{-\alpha_1}\right),$$
$$\mu = |\mu|\exp(i\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad |\mu| \to \infty, \tag{56}$$

где показатель $\alpha_1 = \min\{1, 2\alpha\}$. Таким образом, в рассматриваемом случае остаток в асимптотической формуле (51) в точке $x = 1$ имеет точный порядок $|\mu|^{-\alpha}$. Сравним этот порядок с порядком величины $\delta_0(|\mu|)$, $|\mu| \to \infty$, из выражения (52). Для $p(x)$, определенной выражением (55), функция

$$p_0(x) \equiv \frac{p'(x)}{p^2(x)} = -\frac{\alpha(1-x)^{\alpha-1}}{(1+(1-x)^{\alpha})^2}, \quad x \in [0, 1],$$

является монотонно убывающей, причем $p_0(x) = -(1/p(x))'$. Тогда для интегрального модуля непрерывности функции $p_0(x)$ имеем оценку

$$\omega_1(p_0; h) = \sup_{0<t<h}\left\{\int_0^{1-t}(p_0(x) - p_0(x+t))\,dx\right\} =$$
$$= \sup_{0<t<h}\left\{\left(\frac{1}{1+(1-(x+t))^{\alpha}} - \frac{1}{1+x^{\alpha}}\right)\Bigg|_0^{1-t}\right\} \le h^{\alpha}, \quad h \in (0, 1).$$

Таким образом, найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\delta_0(|\mu|) = \delta(p_0; |\mu|) \le c|\mu|^{-\alpha}, \quad \operatorname{Im}\mu \ge 0, \quad |\mu| \ge 1.$$

Эта оценка вместе с (56) показывает, что остаток (52) в равномерной по $x \in \in [0, 1]$ асимптотической формуле (51) является точным и не может быть улучшен на всем рассматриваемом классе коэффициентов $p(x) \in W_1^1$.

5. Приложение. Рассмотрим задачу Коши (1), (7).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2), (3), (6) *и функции* $b(x)$, $g(x)$ *определены выражениями* (11). *Тогда при любом* $r_0 > 0$ *для решения* $y(x, \mu)$ *задачи* (1), (7) *справедливы асимптотические формулы*

$$y(x, \mu) = \mu^{-1}(g(x)g(0))^{-1/4}\sin\left\{\mu\int_0^x b(\tau)d(\tau) + \int_0^x \frac{\rho_1(\tau)}{2g^{1/2}(\tau)}d\tau\right\} + O(\delta(|\mu|)),$$
$$a(x)y'(x, \mu) = (g(x)g(0))^{1/4}\cos\left\{\mu\int_0^x b(\tau)d(\tau) + \int_0^x \frac{\rho_1(\tau)}{2g^{1/2}(\tau)}d\tau\right\} + O(\delta(|\mu|)), \tag{57}$$
$$|\operatorname{Im}\mu| < r_0, \quad |\mu| \to \infty.$$

Доказательство. При достаточно больших по модулю μ из полуплоскости $\operatorname{Im}\mu > -r_0$ решение задачи Коши $y(x, \mu)$ представляется в виде

$$y(x, \mu) = c_1 y_1(x, \mu) + c_2 y_2(x, \mu),$$

с постоянными $c_j = c_j(\mu)$ и функциями из утверждения теоремы 1. Тогда

$$\tilde{W}(\mu)\,y(x, \mu) = -y_2(0, \mu)y_1(x, \mu) + y_1(0, \mu)y_2(x, \mu),$$

где функция $\tilde{W}(\mu)$ определена согласно (41). При этом, используя (37), заключаем, что

$$-y_2(0,\mu)y_1(x,\mu)+y_1'(0,\mu)y_2'(x,\mu) = (g(0)g(x))^{-1/4}\exp(i\mu d+id_1/2)\times$$
$$\times\left\{-\exp\left(i\mu\int_0^x b(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\frac{i}{2}\int_0^x\frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\,d\tau\right)[1+O(\delta(|\mu|))]+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-i\mu\int_x^l b(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int_x^l\frac{\rho_1(\tau)}{g^{1/2}(\tau)}\,d\tau\right)[1+O(\delta(|\mu|))]\right\}.$$

Отсюда и из (42), используя ограниченность экспонент $\exp(\pm i\mu)$ в полосе $|\operatorname{Im}\mu|<r_0$, получаем утверждение (57).

Отметим, что асимптотические формулы (57) допускают дифференцирование по μ любое число раз (с сохранением порядка остатка).

***Следствие* 3.** *При выполнении условий* (2), (3), (6) *для решения задачи Коши* (1), (7) *для любого* $r_0>0$ *найдется такая постоянная* $c=c(r_0)>0$, *что справедливы равномерные по* $x\in[0,l]$ *оценки*

$$|y(x,\mu)|\le c/(|\mu|+1),\qquad |\operatorname{Im}\mu|<r_0.$$

Оценка из следствия 3 распространяет оценку (8) из [7] на комплексные значения параметра μ.

Рассмотрим спектральную задачу (9), (10), которая изучалась в [9] (со спектральным параметром $\mu=i\lambda$). Будем предполагать, что функция $p(x)$ принадлежит пространству $W_1^1[0,1]$ и удовлетворяет условиям (2). Тогда, в частности, ненулевые собственные значения μ_k задачи (9), (10) расположены в открытой полуплоскости $\operatorname{Im}\mu>0$ [9]. Это утверждение можно вывести на основании равенства

$$\mu_k\int_0^1\rho(x)|y_k(x)|^2\,dx = i|y_k(1)|^2,$$

где $y_k(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению μ_k.

Пусть $y_0(x,\mu)$ — решение уравнения (9) с данными Коши $y_0(0,\mu)=1$, $y_0'(0,\mu)=0$. Тогда собственные значения задачи (9), (10) являются корнями аналитической функции $\Delta(\mu)=y_0'(1,\mu)+i\mu y_0(1,\mu)$, которые в силу приведенного выше замечания расположены в верхней полуплоскости. При этом если $\rho(1)\ne1$, то, действуя так же, как и при доказательстве теоремы 2, получаем для $\Delta(\mu)$ и любого фиксированного $r_0>0$ асимптотическое представление

$$\frac{\Delta(\mu)}{c_0\mu} = (1+\rho^{1/2}(1))\exp(i\mu d)[1+O(\delta(\rho;|\mu|))]+$$
$$+(1-\rho^{1/2}(1))\exp(-i\mu d)[1+O(\delta(\rho;|\mu|))],\qquad \operatorname{Im}\mu>-r_0,\quad |\mu|\to\infty, \tag{58}$$

где постоянные

$$c_0 = \frac{i}{2}\left(\frac{\rho(0)}{\rho(1)}\right)^{1/4};\qquad d=\int_0^1\rho^{1/2}(\tau)\,d\tau.$$

Асимптотическая формула (58) в силу теоремы 1 дает возможность найти асимптотические выражения для собственных значений и собственных функций задачи (9), (10), которые аналогичны полученным в [9] при более жестком условии $\rho \in W_2^2[0,1]$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть функция* $\rho(x)$, $x \in [0,1]$, *удовлетворяет условиям* (2), (6) *и* $\rho(1) \neq 1$. *Тогда найдется такая постоянная* $r > 0$, *что ненулевые собственные значения* μ_k *спектральной задачи* (9), (10) *расположены в полосе* $\operatorname{Im}\mu \in (0, r)$.

Как отмечалось в п. 1, лемма 3 распространяет теорему 5.1 из [9] на случай более широкого класса коэффициентов $\rho(x)$.

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 258 с.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
3. *Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я.* Об асимптотическом поведении собственных функций спектральной задачи Штурма – Лиувилля // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, вып. 3. – С. 71 – 72.
4. *Гехтман М. М.* Об асимптотическом поведении нормированных собственных функций спектральной задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке // Мат. сб. – 1987. – **133**, № 62. – С. 184 – 199.
5. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 96 – 108.
6. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965. – 238 с.
7. *Якубов В. Я.* Задача Коши для уравнения Штурма – Лиувилля и оценки для ее решений по параметру λ // Докл. РАН. – 1998. – **360**, № 3. – С. 320 – 323.
8. *Fulton C. T., Pruess S. A.* Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Stourm – Liouville problems // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – **188**. – P. 297 – 340.
9. *Cox C., Zuazua E.* The rate at which energy decays in a string damped at one end // Indiana Univ. Math. J. – 1995. – **44**, № 2. – P. 545 – 573.
10. *Shubov M. A.* Basis properties of eigenfunctions of nonselfadjoint operator pencils generated by the equation of nonhomogeneous damped string // Integral Equations and Operator Theory. – 1996. – **25**. – P. 289 – 328.
11. *Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н.* Спектральный анализ задачи Редже с параметрами // Функцион. анализ и его прил. – 1997. – **31**, вып. 1. – С. 70 – 74.
12. *Pivovarchik V.* Inverse problem for a smooth string with damping at the end // J. Operator Theory. – 1997. – **38**. – P. 243 – 263.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
14. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
15. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. – 1970. – **34**. – С. 564 – 583.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные диференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
17. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

Получено 25.08.99