УДК 519.1

А. Я. Петренюк (Держ. льотна акад. України, Кіровоград)

ПІВОБЕРТОВІ ДЕРЕВНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ ПОВНИХ ГРАФІВ

We distinguish a class of trees which are called semisymmetric and prove that every tree T from this class admits T-factorization of a special form in the case where T is of order $n = 2k \leq 16$. We formulate the hypothesis that every semisymmetric tree T admits T-factorization. We establish the fact of existence of T-factorization for semisymmetric trees of certain classes.

Виділено клас дерев, які названі півсиметричними, і доведено, що кожне дерево T із цього класу допускає T-факторизацію спеціального вигляду у випадку, коли T має порядок $n = 2k \leq 16$. Висловлено гіпотезу, що кожне півсиметричне дерево T допускає T-факторизацію. Встановлено існування T-факторизацій для півсиметричних дерев визначених класів.

У задачах про розклади графів на підграфи певних типів особливе місце займає сім'я задач про деревні факторизації повних графів. У цій статті розглянемо метод побудови таких факторизацій для класу півсиметричних дерев.

1. Означення та результати. Сім'я n-вершинних дерев $T_1, T_2, \ldots, T_s$ називається *деревною упаковкою розміру* s повного n-вершинного графа K_n, якщо: 1) всі ці дерева є підграфами графа K_n і 2) жодні два з них не мають спільних ребер. Якщо, крім цього, кожне ребро графа K_n належить деякому дереву упаковки, то таку упаковку називають *деревною факторизацією* графа K_n. Дерева, що складають упаковку, називаються *компонентами*.

Деревна упаковка (факторизація), всі компоненти якої ізоморфні дереву T, називається *T-упаковкою* (*T-факторизацією*). Одна з актуальних у даний момент задач — для *яких* дерев T існують *T-факторизації графа* K_n?

Л. Байнеке [1] показав, що для існування T-факторизації необхідно, щоб n було парним числом і щоб виконувалась умова $\Delta(T) \leq n/2$, де через $\Delta(T)$ позначено найбільшого степеня вершину у дереві T.

Ш. Хуанг і А. Роса [2] повністю розв'язали задачу про існування T-факторизацій для парних значень $n \leq 8$. Автору недавно вдалося розв'язати цю задачу у випадку $n = 10$; виявилося, що серед 106 існуючих неізоморфних дерев порядку 10 (див. монографію Ф. Харарі [3]) рівно 85 допускають T-факторизацію. Для парних значень $n > 10$ повного розв'язку цієї задачі поки що не одержано.

Велике значення при розв'язуванні цієї задачі мають ефективні методи побудови T-факторизацій. У вже згадуваній статті [2] наведено ряд способів побудови. Продовжимо цей ряд, описавши у наступному пункті метод, якому ми дали назву *півобертового*.

2. Півобертовий метод побудови. Відомо, що для ланцюга P_{2k-1} з $2k-1$ ребрами P_{2k-1}-факторизація існує при кожному значенні k. Довести це можна таким способом. Розглянемо ланцюг P довжиною $2k-1$, що складається з ребер $(0, 1)$, $(1, n)$, $(n, 2)$, $(2, n-1), \ldots$, і підстановку $\alpha = (0, 1, \ldots, 2k-1)$ множини його вершин. Тоді дерева P, $P\alpha$, $P\alpha^2, \ldots, P\alpha^{k-1}$ складають шукану P_{2k-1}-факторизацію.

Півобертовий метод, до опису якого ми переходимо, узагальнює спосіб побудови, яким доведено це твердження.

Дерево порядку $n = 2k$ будемо називати *півсиметричним*, якщо воно: 1) містить центральне ребро і 2) після вилучення цього ребра розпадається на дві ізоморфні зв'язні компоненти (ці зв'язні компоненти називатимемо *симетричними половинами*).

Симетрична половина визначається півсиметричним деревом однозначно. Її можна розглядати як неорієнтоване кореневе дерево, коренем якого вважається вершина, що належить центральному ребру півсиметричного дерева.

Навпаки, маючи кореневе дерево, можна побудувати відповідне півсиметричне дерево, взявши такі дві копії цього кореневого дерева, які не мають спільних вершин, і з'єднавши додатковим ребром їх корені. Таким чином, встановлюється 1–1 відповідність між півсиметричними деревами порядку $n = 2k$ і кореневими деревами порядку k. З цієї відповідності неважко зробити висновок, що *кількість неізоморфних півсиметричних дерев порядку* $2k$ *дорівнює кількості неізоморфних кореневих дерев порядку* k.

Розглянемо тепер коло, розділене $n = 2k$ точками на рівні дуги (назвемо ці дуги *елементарними*). Точки поділу послідовно позначимо $0, 1, \dots, n-1$.

Півсиметричне дерево T порядку $n = 2k$ називатимемо *правильно вписаним* у це коло, якщо: 1) точки поділу є вершинами дерева T, 2) ребра дерева T зображаються хордами кола, 3) для кожної допустимої довжини хорди рівно два нецентральних ребра мають таку довжину, 4) для кожного ребра (a, b) існує симетричне йому відносно центра кола ребро $(a+k, b+k)$ дерева T.

Під *довжиною* хорди розуміємо кількість елементарних дуг у меншій з дуг, на які ця хорда розбиває коло. Номери вершин, коли це потрібно, зводяться по $\operatorname{mod} n$.

Нехай T — дерево порядку $2k$, правильно вписане у коло, і нехай $\alpha = (1, 2, \dots, n)$ — циклічна підстановка його вершин. Розглянемо сім'ю дерев T, $T\alpha, \dots, T\alpha^{k-1}$. Неважко збагнути, що ця сім'я є T-факторизацією графа K_n, яку природно називати *півобертовою*.

Дерево T, яке породжує описаним способом півобертову T-факторизацію, називають її *базовою компонентою*.

Зауважимо, що півобертова T-факторизація має нетривіальну групу автоморфізмів, оскільки до цієї групи належить підстановка, яка переводить кожну вершину графа K_n у симетричну їй відносно центра кола.

3. Існування півобертових факторизацій. Використовуючи півобертовий метод, ми довели три однотипні теореми 1–3.

Теорема 1. *Для кожного півсиметричного дерева T порядку* 12 *існує півобертова T-факторизація.*

Доведення. Кількість неізоморфних півсиметричних дерев порядку 12 дорівнює 20 (див. [3]). У табл. 1 для кожного з них вказано базову компоненту, задану списком своїх ребер, яка породжує потрібну факторизацію, що й доводить теорему.

Таблиця 1

1	0–1	0–6	1–11	2–10	2–11	3–10	4–8	4–9	5–7	5–8	6–7
2	0–1	0–6	1–11	2–11	3–10	3–11	4–9	5–7	5–8	5–9	6–7
3	0–1	0–6	1–11	2–9	2–10	2–11	3–8	4–8	5–7	5–8	6–7
4	0–1	0–6	1–11	2–11	3–11	4–11	5–7	5–8	5–9	5–10	6–7
5	0–1	0–6	1–10	1–11	2–10	3–10	4–7	4–8	4–9	5–7	6–7
6	0–6	0–8	1–8	1–10	2–3	2–6	2–7	3–5	4–7	8–9	9–11
7	0–6	0–10	1–9	1–10	2–9	3–7	3–8	4–5	4–6	4–7	10–11
8	0–6	0–9	1–8	1–9	2–7	3–4	3–5	3–6	3–7	9–10	9–11
9	0–1	0–2	0–6	2–11	3–10	3–11	4–9	5–8	5–9	6–7	6–8

10	0–1	0–2	0–6	2–11	3–11	4–11	5–8	5–9	5–10	6–7	6–8
11	0–2	0–3	0–6	1–2	3–11	4–11	5–9	5–10	6–8	6–9	7–8
12	0–1	0–2	0–6	2–10	2–11	3–10	4–8	4–9	5–8	6–7	6–8
13	0–1	0–2	0–6	2–9	2–10	2–11	3–8	4–8	5–8	6–7	6–8
14	0–6	0–9	0–10	1–9	2–9	3–6	3–7	3–8	4–5	4–6	10–11
15	0–1	0–2	0–3	0–6	3–10	3–11	4–9	5–9	6–7	6–8	6–9
16	0–1	0–2	0–3	0–6	1–5	3–10	4–9	6–7	6–8	6–9	7–11
17	0–2	0–3	0–4	0–5	0–6	1–2	6–8	6–9	6–10	6–11	7–8
18	0–1	0–2	0–3	0–6	3–11	4–11	5–9	5–10	6–7	6–8	6–9
19	0–1	0–2	0–3	0–4	0–5	0–6	6–7	6–8	6–9	6–10	6–11
20	0–1	0–6	1–8	1–9	1–10	1–11	2–7	3–7	4–7	5–7	6–7

Теорема 2. *Для кожного півсиметричного дерева T порядку* 14 *існує півобертова T-факторизація.*

Доведення. Кількість неізоморфних півсиметричних дерев порядку 14 дорівнює 48. У табл. 2 для кожного з них побудовано базову компоненту, що однозначно визначається реберним списком своєї симетричної половини. Центральним ребром усіх базових компонент у табл. 2 є ребро 0–7. Табл. 2 є, по суті, доводенням теореми.

Для скорочення запису у табл. 2 та у табл. 3 двоцифрові числа замінено літерами: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

Таблиця 2

1	0–1	1–D	2–C	2–D	3–B	3–C	2	0–1	1–D	2–C	2–D	3–C	4–C
3	0–1	1–D	2–B	2–C	2–D	3–B	4	0–1	1–D	2–A	2–B	2–C	2–D
5	0–1	1–D	2–D	3–C	3–D	4–C	6	0–1	1–D	2–C	2–D	4–A	4–D
7	0–1	1–D	2–D	3–B	3–C	3–D	8	0–1	1–D	2–D	3–D	4–C	4–D
9	0–1	1–D	2–D	3–D	4–D	5–D	10	0–1	1–C	1–D	2–B	2–C	3–B
11	0–1	1–C	1–D	2–A	2–B	2–C	12	0–1	1–C	1–D	2–C	3–B	3–C
13	0–1	1–A	1–D	2–C	2–D	4–A	14	0–1	1–C	1–D	2–C	3–C	4–C
15	0–1	1–B	1–C	1–D	2–A	2–B	16	0–3	1–D	2–3	3–C	3–D	4–C
17	0–1	1–B	1–C	1–D	2–B	3–B	18	0–1	1–A	1–B	1–C	1–D	2–A
19	0–1	1–9	1–A	1–B	1–C	1–D	20	0–1	0–2	2–D	3–C	3–D	4–D
21	0–1	0–2	2–D	3–B	3–C	3–D	22	0–2	0–3	1–2	3–C	3–D	4–C
23	0–1	0–2	2–C	2–D	3–C	4–C	24	0–1	0–4	1–D	2–D	3–D	4–D
25	0–2	0–3	1–2	3–D	4–D	5–D	26	0–3	0–4	1–3	2–3	4–D	5–D
27	0–1	0–2	2–A	2–B	2–C	2–D	28	0–1	0–2	2–B	2–C	2–D	3–B

29	0–1 0–2 2–C 2–D 3–B 3–C	30	0–2 0–3 1–2 3–D 4–C 4–D
31	0–1 0–2 2–D 3–D 4–C 4–D	32	0–1 0–2 2–D 3–D 4–D 5–D
33	0–3 0–6 1–2 1–3 3–D 4–D	34	0–2 0–3 1–2 3–C 3–D 4–C
35	0–3 0–4 1–3 2–3 4–D 5–D	36	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 0–6
37	0–2 0–3 1–2 3–B 3–C 3–D	38	0–3 0–4 1–3 2–3 4–C 4–D
39	0–1 0–2 0–3 3–D 4–C 4–D	40	0–2 0–4 0–5 1–4 2–3 5–D
41	0–2 0–3 0–4 1–2 4–D 5–D	42	0–1 0–2 0–3 3–C 3–D 4–C
43	0–1 0–2 0–3 3–B 3–C 3–D	44	0–1 0–2 0–3 3–D 4–D 5–D
45	0–1 0–2 0–3 0–4 4–D 5–D	46	0–1 0–2 0–3 0–4 4–C 4–D
47	0–2 0–3 0–4 0–5 1–2 5–D	48	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 5–D

Теорема 3. *Для будь-якого півсиметричного дерева T порядку* 16 *існує півобертова T-факторизація.*

Доведення. Існують точно 115 неізоморфних кореневих дерев порядку 8 і, отже, така ж кількість півсиметричних дерев порядку 16. Теорема повністю доводиться табл. 3, структура якої аналогічна структурі табл. 2. Центральним ребром кожної базової компоненти у табл. 3 є ребро 0–8.

Таблиця 3

1	0–1 1–F 2–E 2–F 3–D 3–E 4–D	2	0–1 1–F 2–E 2–F 3–C 3–D 3–E
3	0–1 1–F 2–E 2–F 3–E 4–D 4–E	4	0–1 1–F 2–E 2–F 3–E 4–E 5–E
5	0–1 1–F 2–D 2–E 2–F 3–D 4–D	6	0–2 1–2 1–E 3–E 3–F 4–D 4–E
7	0–1 1–F 2–D 2–E 2–F 3–C 3–D	8	0–1 1–F 2–C 2–D 2–E 2–F 3–C
9	0–1 1–F 2–B 2–C 2–D 2–E 2–F	10	0–1 1–F 2–F 3–E 3–F 4–E 5–E
11	0–1 1–F 2–F 3–E 3–F 4–D 4–E	12	0–3 1–2 1–F 3–F 4–E 4–F 5–E
13	0–1 1–F 2–F 3–D 3–E 3–F 4–D	14	0–1 1–F 2–F 3–C 3–D 3–E 3–F
15	0–3 1–2 1–F 3–F 4–D 4–E 4–F	16	0–1 1–F 2–F 3–F 4–E 4–F 5–E
17	0–1 1–F 2–F 3–F 4–D 4–E 4–F	18	0–3 1–2 1–F 3–F 4–F 5–E 5–F
19	0–1 1–F 2–F 3–F 4–F 5–E 5–F	20	0–1 1–F 2–F 3–F 4–F 5–F 6–F
21	0–1 1–E 1–F 2–D 2–E 3–D 4–D	22	0–1 1–E 1–F 2–D 2–E 3–C 3–D
23	0–1 1–E 1–F 2–C 2–D 2–E 3–C	24	0–1 1–E 1–F 2–B 2–C 2–D 2–E
25	0–3 1–2 1–3 3–F 4–E 4–F 5–E	26	0–3 1–2 1–3 3–F 4–D 4–E 4–F
27	0–4 1–3 1–4 2–3 4–F 5–E 5–F	28	0–1 1–E 1–F 2–E 3–D 3–E 4–D
29	0–1 1–E 1–F 2–E 3–C 3–D 3–E	30	0–3 1–7 2–7 2–6 2–7 3–6 4–5
31	0–3 1–2 1–3 3–F 4–F 5–E 5–F	32	0–4 1–2 1–3 1–4 4–F 5–E 5–F
33	0–1 1–E 1–F 2–E 3–E 4–D 4–E	34	0–1 1–E 1–F 2–E 3–E 4–E 5–E

35	0–1 1–D 1–E 1–F 2–B 2–C 2–D	36	0–1 1–D 1–E 1–F 2–C 2–D 3–C
37	0–3 1–2 1–3 3–E 3–F 4–D 4–E	38	0–1 1–D 1–E 1–F 2–D 3–C 3–D
39	0–5 1–4 1–5 2–3 3–5 5–F 6–F	40	0–1 1–D 1–E 1–F 2–D 3–D 4–D
41	0–4 1–4 2–3 2–4 4–F 5–F 6–F	42	0–1 1–B 1–C 1–D 1–E 1–F 2–B
43	0–7 1–7 2–7 3–7 4–7 5–7 6–7	44	0–1 1–C 1–D 1–E 1–F 2–B 2–C
45	0–3 1–2 1–3 3–D 3–E 3–F 4–D	46	0–1 1–C 1–D 1–E 1–F 2–C 3–C
47	0–1 0–2 2–F 3–E 3–F 4–D 4–E	48	0–1 0–2 2–F 3–E 3–F 4–E 5–E
49	0–1 0–2 2–F 3–D 3–E 3–F 4–D	50	0–1 0–2 2–F 3–C 3–D 3–E 3–F
51	0–1 0–2 2–F 3–F 4–E 4–F 5–E	52	0–6 0–7 1–3 1–5 1–6 2–5 3–4
53	0–1 0–2 2–F 3–F 4–D 4–E 4–F	54	0–1 0–2 2–E 3–F 4–F 5–E 5–F
55	0–1 0–2 2–F 3–F 4–F 5–F 6–F	56	0–1 0–2 2–E 2–F 3–C 3–D 3–E
57	0–1 0–2 2–E 2–F 3–D 3–E 4–D	58	0–1 0–2 2–E 2–F 3–E 4–D 4–E
59	0–3 0–4 1–2 2–4 4–F 5–E 5–F	60	0–1 0–2 2–E 2–F 3–E 4–E 5–E
61	0–3 0–4 1–2 2–4 4–F 5–F 6–F	62	0–2 0–3 1–2 3–F 4–D 4–E 4–F
63	0–2 0–3 1–2 3–F 4–E 4–F 5–E	64	0–2 0–3 1–2 3–F 4–F 5–E 5–F
65	0–3 0–4 1–2 1–3 4–F 5–E 5–F	66	0–2 0–3 1–3 3–F 4–F 5–F 6–F
67	0–3 0–4 1–2 1–3 4–F 5–F 6–F	68	0–1 0–2 2–F 3–C 3–D 3–E 3–F
69	0–1 0–2 2–F 3–D 3–E 3–F 4–D	70	0–2 0–3 1–2 3–E 3–F 4–D 4–E
71	0–1 0–2 2–D 2–E 2–F 3–D 4–D	72	0–6 0–7 1–6 2–5 2–6 3–4 4–6
73	0–3 0–4 1–3 2–3 4–F 5–F 6–F	74	0–3 0–4 1–2 1–3 4–E 4–F 5–E
75	0–1 0–2 2–D 2–E 2–F 3–C 3–D	76	0–2 0–3 1–2 3–E 3–F 4–E 5–E
77	0–5 0–7 1–7 2–5 2–6 3–4 3–5	78	0–3 0–4 1–3 2–3 4–E 4–F 5–E
79	0–3 0–4 1–2 1–3 4–D 4–E 4–F	80	0–1 0–2 2–C 2–D 2–E 2–F 3–C
81	0–2 0–3 1–2 3–D 3–E 3–F 4–D	82	0–1 0–2 2–B 2–C 2–D 2–E 2–F
83	0–2 0–3 1–2 3–C 3–D 3–E 3–F	84	0–3 0–4 1–3 2–3 4–D 4–E 4–F
85	0–1 0–2 0–3 3–F 4–E 4–F 5–E	86	0–1 0–2 0–3 3–F 4–D 4–E 4–F
87	0–1 0–2 0–3 3–F 4–F 5–E 5–F	88	0–1 0–2 0–3 3–F 4–F 5–F 6–F
89	0–1 0–2 0–3 3–E 3–F 4–D 4–E	90	0–1 0–2 0–3 3–E 3–F 4–E 5–E
91	0–5 0–6 0–7 1–4 1–5 2–3 3–5	92	0–2 0–3 0–4 1–2 4–F 5–F 6–F
93	0–3 0–4 0–5 1–2 1–3 5–F 6–F	94	0–2 0–4 0–5 1–4 2–3 5–F 6–F
95	0–1 0–2 0–3 3–D 3–E 3–F 4–D	96	0–2 0–3 0–4 1–2 4–E 4–F 5–E
97	0–3 0–4 0–5 1–3 2–3 5–F 6–F	98	0–1 0–2 0–3 3–C 3–D 3–E 3–F
99	0–2 0–3 0–4 1–2 4–D 4–E 4–F	100	0–3 0–4 0–5 1–3 2–3 5–E 5–F

101	0–2 0–4 0–5 1–4 2–3 5–E 5–F	102	0–2 0–3 0–4 1–2 4–F 5–E 5–F
103	0–1 0–2 0–3 0–4 4–F 5–F 6–F	104	0–1 0–2 0–3 0–4 4–F 5–E 5–F
105	0–2 0–3 0–4 0–5 1–4 5–F 6–F	106	0–1 0–2 0–3 0–4 4–E 4–F 5–E
107	0–1 0–2 0–3 0–4 4–D 4–E 4–F	108	0–2 0–3 0–4 0–5 1–2 5–E 5–F
109	0–2 0–4 0–5 0–6 1–4 2–3 6–F	110	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 0–6 6–F
111	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 5–E 5–F	112	0–2 0–4 0–5 0–6 0–7 1–4 2–3
113	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 5–F 6–F	114	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 0–6 6–F
115	0–1 0–2 0–3 0–4 0–5 0–6 0–7		

На основі теорем 1–3 ми висловлюємо наступне припущення, яке узагальнює ці теореми.

Гіпотеза. *Будь-яке півсиметричне дерево T допускає півобертову T-факторизацію.*

4. Існування півобертових T-факторизацій для серій дерев. За допомогою описаного вище методу можна доводити існування T-факторизацій для серій півсиметричних дерев T. Класичний приклад — доведення існування P_{2k-1}-факторизацій.

Будемо називати *подвійною зіркою* DS_n дерево порядку $n = 2k$, яке має центральне ребро, з обох кінців якого виходять по $k-1$ кінцевому ребру. Очевидно, це дерево належить до класу півсиметричних дерев.

Теорема 4. *Для кожного натурального числа k існує півобертова DS_{2k}-факторизація.*

Доведення. Базовою компонентою цієї факторизації може служити дерево з ребрами $(0, 1)$, $(0, 2), \ldots, (0, k-1)$, $(0, k)$, $(k, k+1)$, $(k, k+2), \ldots, (k, 2k-1)$, що й доводить теорему.

Розширенням класу подвійних зірок є клас дерев, які називатимемо *дзеркальними віялами.* Дзеркальне віяло складається з *основи* — ланцюга довжини s, у кожному кінці якої сходяться t кінцевих ребер. Параметри s, t — натуральні числа. Очевидно, що при s непарному дзеркальне віяло — півсиметричне дерево. При $s = 1$ дзеркальні віяла — подвійні зірки.

Теорема 5. *Будь-яке дзеркальне віяло T з непарним значенням параметра s допускає півобертову T-факторизацію.*

Доведення. Нехай T — дзеркальне віяло з непарним s. Воно має $n = s + 2t + 1$ вершин. Побудуємо базову компоненту півобертової T-факторизації. Центральне ребро дерева T займе положення хорди $(0, n/2)$. Далі, ребрами однієї з симетричних половин будуть хорди $(0, 1)$, $(1, n)$, $(n, 2)$, $(2, n-1)$, $(n-1, 3), \ldots,$ поки буде виписано $(s-1)/2$ хорд.

Нехай тепер q — кінець останньої проведеної хорди, а p — найдальша від q вершина, не використана у проведених хордах. Проведемо ще t хорд (q, p), $(q, p-1), \ldots, (q, p-t+1)$ і всі хорди, симетричні проведеним відносно центра кола. Дерево T правильно вписане у коло; воно є базовою компонентою півобертової T-факторизації, і теорему доведено.

Введемо ще один клас півсиметричних дерев і доведемо для нього відповідну теорему.

Н-деревом $H(s, t)$ з параметрами s, t будемо називати півсиметричне дерево порядку $n = 2k$, симетрична половина якого є ланцюгом довжини $k-1$, причому вершина центрального ребра поділяє цей ланцюг на два підланцюги, довжини яких s та $k-1-s = t$ $(0 < s < k)$.

Теорема 6. *Кожне H-дерево T допускає півобертову T-факторизацію.*

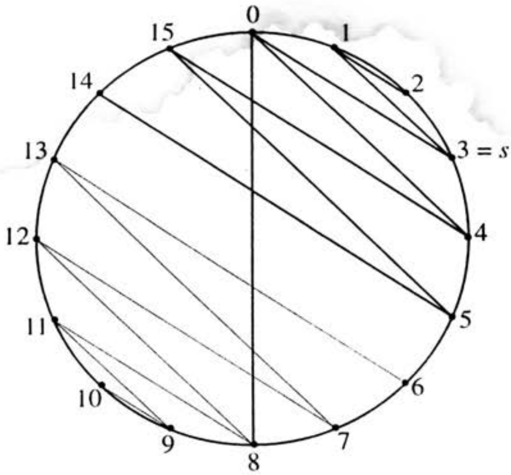
Доведення. Нехай T — H-дерево з параметрами s, $k - s$. Організуємо вписування в коло його симетричної половини таким чином. Центральне ребро дерева займе позицію $(0, k)$. Ребро підланцюга довжини s, суміжне з центральним, займе в колі позицію $(0, s)$, а сам цей підланцюг розміститься спадною змійкою (послідовністю ребер, у якій довжина наступного ребра на одиницю менша за довжину попереднього) у меншому з сегментів, відрізаних від кола хордою $(0, s)$. Підланцюг довжини $k - 1 - s$ матиме ребро, суміжне з центральним, хорду $(0, s + 1)$ і розміститься по другий бік від хорди. На рисунку зображено правильне вписування H-дерева з параметрами $s = 3$, $t = 4$ у відповідне коло.

Інші ребра впишуться у коло симетрично відносно центра.

Неважко зрозуміти, що так організоване вписування правильне і породжує півобертову T-факторизацію. Теорему доведено.

У випадку $s = 0$ H-дерево — ланцюг P_{2k-1}. Тому з теореми 6 одержуємо як наслідок твердження, висловлене на початку п. 2.

Комбінацією теорем 5 та 6 є твердження про те, що існує півобертова T-факторизація для півсиметричного дерева, яке одержується з H-дерева приклеюванням у кожній його кінцевій вершині *китиці* — зірки з центром у цій кінцевій вершині.



Правильне вписування H-дерева у коло

Автор певен, що за допомогою описаних у п. 3 прийомів можна істотно розширити клас півсиметричних дерев, які допускають T-факторизацію. Зокрема, пропонується задача: при яких параметрах $s_1, s_2, \ldots, s_q$, $q > 2$, до цього класу належить узагальнене H-дерево — півсиметричний граф, симетрична половина якого — q ланцюгів, що мають спільну вершину, яка одночасно належить центральному ребру.

1. *Beineke L. W.* Decomposition of complete graphs into forests // Magy. tud. akad. Mat. kut. intéz. közl. – 1964. – **9**. – P. 589–594.
2. *Huang C., Rosa A.* Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinat. – 1978. – **5**. – P. 23–63.
3. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.

Одержано 24.11.99