УДК 517.9

В. Ю. Макаров (Брянск. пед. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

We study the behavior of sum of a power series near the boundary of convergence.

Вивчається поведінка суми степеневого ряду поблизу межі збіжності.

Пусть степенной ряд сходится в единичном круге $|z| < 1$, $f(z)$ — его сумма

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_n \in C.$$

В работе [1] введено понятие порядка роста для одномерного степенного ряда

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{r \to 1-0}} \frac{\log \log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}},$$

где $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, и получена формула для вычисления порядка:

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log^+ \log^+ |a_n|}{\log n}.$$

В работе [2] вводится понятие порядка и типа степенного роста внутри открытого октанта многомерного некратного ряда экспонент.

В настоящей работе для степенного одномерного ряда введем понятие порядка и типа степенного роста и установим связь асимптотического поведения коэффициентов ряда с асимптотическим поведением его суммы.

С этой целью рассмотрим ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n z^{\lambda_n}, \tag{1}$$

где $A_n \in C$, $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, с единичным радиусом сходимости.

Функция $F(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, на границе $|z| = 1$ существует хотя бы одна особая точка и пусть $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \to +\infty$, если $r \to 1 - 0$, где $r = |z|$ и $0 < r < 1$.

Определим порядок и тип степенного роста в единичном круге.

Определение 1. *Порядком степенного рост функции $F(z)$ в круге $|z| < 1$ назовем величину*

$$\rho_D = \limsup_{r \to 1-0} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Теорема 1. *Пусть положительные показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log \log n}{\log \log \lambda_n} = \delta < 1,$$

тогда порядок степенного роста вычисляется по формуле

$$M(r) \le C_1 + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |A_n| r^{\lambda_n}, \quad C_1 = \text{const},$$

то справедливы оценки для $M(r)$:

$$M(r) < C_1 + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n^{\gamma+\varepsilon} r^{\lambda_n} < C_2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n^{\gamma+2\varepsilon} r^{\lambda_n} \lambda_n^{-\varepsilon} \le C_2 \exp\left(\max_{[e,+\infty)} \psi(t)\right) \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n^{-\varepsilon}, \tag{5}$$

где $C_2 = \text{const}$, $\psi(t) = (\gamma + 2\varepsilon)\log t + t \log r$, $t \ge e$. Пусть для всех $n \ge n_0$ $\log \lambda_n \ge 1$.

В правой части неравенства (5) ряд сходится при выполнении условия

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \log n}{\log \log \lambda_n} = \delta < 1.$$

В самом деле, для достаточно малого числа $\varepsilon_1 > 0$ справедливо неравенство $\log n < (\log \lambda_n)^{\delta + \varepsilon_1}$ или для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем $\varepsilon (\log \lambda_n)^{1 - \delta - \varepsilon_1} \log n < < \varepsilon \log \lambda_n$. Число ε_1 всегда можно выбрать таким, что величина $\tau = 1 - \delta - \varepsilon_1 > > 0$ и для всех $n \ge n_1 \ge n_0$ выполняется неравенство $\log n^{\varepsilon (\log \lambda_n)^{\tau}} < \varepsilon \log \lambda_n$. Поскольку при всех $n \ge n_2 \ge n_1$

$$\frac{\log \log n}{\log \log \lambda_n} < \frac{\varepsilon (\log \lambda_n)^{\tau}}{\log \log \lambda_n},$$

то для всех номеров $n \ge n_3 \ge n_2$ выполняется неравенство

$$\log \log n \log n < \varepsilon \log \lambda_n.$$

Далее имеем

$$\sum_{n=n_3}^{+\infty} e^{-\varepsilon \log \lambda_n} < \sum_{n=n_3}^{+\infty} \frac{1}{n^{\log \log \lambda_n}} < +\infty,$$

следовательно, и ряд

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n^{-\varepsilon} = C_3 \in R.$$

Таким образом, учитывая (5), получаем

$$M(r) < C_2 C_3 e^{\max \psi(t)}. \tag{6}$$

Найдем

$$\exp\left(\max_{[e,+\infty)} \left\{ (\gamma + 2\varepsilon) \log t - t \log \frac{1}{r} \right\}\right).$$

С этой целью исследуем на абсолютный максимум функцию $\psi(t)$, определенную на $[e, +\infty)$. Сначала найдем локальный максимум

$$\psi'_t = \frac{\gamma + 2\varepsilon}{t} - \log \frac{1}{r} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$t = \frac{\gamma + 2\varepsilon}{\log 1/r}$$

— единственная стационарная точка. Пусть для всех $r \in (r_0', 1)$ $t > e$ — точка, в которой достигается локальный максимум, так как

$$\psi''_{t^2} = -\frac{\gamma+2\varepsilon}{t^2} < 0,$$

и очевидно абсолютный

$$\max_{[e,+\infty)} \psi(t) = (\gamma+2\varepsilon)\log\frac{\gamma+2\varepsilon}{e\log 1/r}.$$

Тогда, учитывая (6), имеем

$$M(r) < C_2 C_3 \exp\left((\gamma+2\varepsilon)\log\frac{\gamma+2\varepsilon}{e\log 1/r}\right)$$

и для всех $r \in (r_1', 1) \subset (r_0', 1)$

$$\frac{\log M(r)}{\log\dfrac{1}{1-r}} < \frac{(\gamma+2\varepsilon)\left(\log\dfrac{\gamma+2\varepsilon}{e} + \log\dfrac{1}{\log 1/r}\right)}{\log\dfrac{1}{1-r}}.$$

Легко видеть, что функции $\log\left(\log\dfrac{1}{r}\right)^{-1}$ и $\log(1-r)^{-1}$ эквивалентны, если $r \to 1-0$. Тогда

$$\rho_D \le \gamma + 3\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+0 \Rightarrow \rho_D \le \gamma.$$

Окончательно получаем $\rho_D = \gamma$, и теорема 1 для конечного порядка ρ_D доказана. Если $\rho_D = +\infty$, то теорема очевидна.

Определение 2. *Типом степенного роста функции* $F(z)$ *в круге* $|z| < 1$ *назовем величину*

$$\sigma_D = \limsup_{r\to 1-0}(1-r)^{\rho_D} M(r),$$

где порядок $\rho_D \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log \lambda_n} < 1.$$

Тогда тип степенного роста вычисляется по формуле

$$\sigma_D = \left(\frac{\rho_D}{e}\right)^{\rho_D} \limsup_{n\to+\infty}\frac{|A_n|}{\lambda_n^{\rho_D}}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\sigma_D \in [0, +\infty)$. Тогда из определения степенного типа имеем: для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $r \in (r', 1) \subset (0, 1)$ справедливо неравенство $M(r) < (1-r)^{-\rho_D}(\sigma_D + \varepsilon)$ и так как для всех натуральных n справедливо неравенство Коши $|A_n| \le M(r) r^{-\lambda_n}$, то получим оценку коэффициентов ряда (1):

$$|A_n| < (\sigma_D + \varepsilon)(1-r)^{-\rho_D} r^{-\lambda_n}. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $s(r) = (\sigma_D + \varepsilon)(1-r)^{-\rho_D} r^{-\lambda_n}$, где $r \in (0, 1)$, и найдем $\min s(r)$:

$$s_r' = (\sigma_D + \varepsilon)(1-r)^{-\rho_D} r^{-\lambda_n} \left(\frac{\rho_D}{1-r} - \frac{\lambda_n}{r}\right) = 0.$$

Следовательно, единственная стационарная точка

$$r = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \rho_D} \to 1 - 0,$$

если $n \to +\infty$ и для всех номеров $n \ge n'$ удовлетворяет неравенству (8):

$$|A_n| < \frac{(\sigma_D + \varepsilon)}{\rho_D^{\rho_D}} \lambda_n^{\rho_D} \left(1 + \frac{\rho_D}{\lambda_n}\right)^{\rho_D} \left(1 + \frac{\rho_D}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n},$$

или

$$\frac{\rho_D^{\rho_D} |A_n|}{\left(1 + \frac{\rho_D}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho_D}\rho_D} \lambda_n^{\rho_D}} < (\sigma_D + \varepsilon)\left(1 + \frac{\rho_D}{\lambda_n}\right)^{\rho_D}.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем

$$\beta = \frac{1}{e^{\rho_D}} \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\rho_D^{\rho_D} |A_n|}{\lambda_n^{\rho_D}} \le \sigma_D + \varepsilon, \quad \varepsilon \to +0 \Rightarrow \beta \le \sigma_D.$$

Докажем, что $\beta \ge \sigma_D \Rightarrow \beta = \sigma_D$. Пусть

$$\beta = \left(\frac{\rho_D}{e}\right)^{\rho_D} \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{|A_n|}{\lambda_n^{\rho_D}}.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и для всех натуральных $n \ge n'' \ge n_0$ справедливы неравенства $\log \lambda_n \ge 1$ и

$$|A_n| < \lambda_n^{\rho_D} \left(\frac{e}{\rho_D}\right)^{\rho_D} (\beta + \varepsilon).$$

Так как

$$M(r) \le C_1' + \sum_{n=n''}^{+\infty} |A_n| r^{\lambda_n}, \quad C_1' = \text{const},$$

то

$$M(r) \le C_2' \sum_{n=n''}^{+\infty} \left(\frac{e}{\rho_D}\right)^{\rho_D} (\beta + \varepsilon) \lambda_n^{\rho_D} r^{\lambda_n} <$$

$$< C_3'(\beta + \varepsilon) \sum_{n=n''}^{+\infty} \lambda_n^{\rho_D + \varepsilon} r^{\lambda_n} \lambda_n^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \text{fics}, \quad C_2' \text{ и } C_3' \text{ — const},$$

и, следовательно,

$$M(r) \le C_3'(\beta + \varepsilon) \max_{[e, +\infty)} \left(\lambda_n^{\rho_D + \varepsilon} r^{\lambda_n}\right) \sum_{n=n''}^{+\infty} \lambda_n^{-\varepsilon}. \tag{9}$$

Ряд в правой части неравенства (9) сходится, если

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} < 1.$$

Пусть

$$\sum_{n=n''}^{+\infty} \lambda_n^{-\varepsilon} = C_4' \in R \Rightarrow M(r) <$$

$$< C_3' C_4' (\beta+\varepsilon) \exp\left(\max_{[e,+\infty)} \left[(\rho_D+\varepsilon)\log\lambda_n - \lambda_n \log\frac{1}{r}\right]\right) \le$$

$$\le C_5'(\beta+\varepsilon)\exp\left(\max_{[e,+\infty)}\left[(\rho_D+\varepsilon)\log t - t\log\frac{1}{r}\right]\right), \quad C_5' = \text{const}.$$

Легко проверить, что

$$\max_{[e,+\infty)}\left[(\rho_D+\varepsilon)\log t - t\log\frac{1}{r}\right] = (\rho_D+\varepsilon)\log\frac{\rho_D+\varepsilon}{e\log 1/r}.$$

Тогда

$$M(r) < C_5'(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\rho_D+\varepsilon}{e\log 1/r}\right)^{\rho_D+\varepsilon}$$

и для любых $r \in (r', 1) \subset (r_0, 1)$ справедливо неравенство

$$(1-r)^{\rho_D+\varepsilon} M(r) < (\beta+2\varepsilon)\left(\frac{1-r}{\log 1/r}\right)^{\rho_D+\varepsilon}.$$

Замечая, что при $r \to 1-0$ величины $1-r$ и $\log 1/r$ эквивалентны, имеем

$$\sigma_D = \overline{\lim_{r\to 1-0}} (1-r)^{\rho_D} M(r) \le \beta + 2\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+0 \Rightarrow \sigma_D \le \beta,$$

и теорема 2 для конечного типа доказана. Если $\sigma_D = +\infty$, утверждение теоремы очевидно.

***Замечание* 1.** Условие

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} < 1$$

в теореме 1 является строгим. Рассмотрим геометрический ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

который сходится в единичном круге $|z| < 1$.

В нашем примере $A_n = 1$, для всех n натуральных и $\lambda_n = n$, тогда

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} = 1$$

и формула для вычисления порядка степенного роста ρ_D неверна. В самом деле, формально воспользовавшись формулой, получим

$$\rho_D = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log^+|A_n|}{\log n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log 1}{\log n} = 0,$$

но если воспользоваться определением порядка, тогда $\rho_D \neq 0$.

Пусть $0 < r < 1$. Найдем $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ на окружности $|z| = r$. По принципу максимума модуля $M(r)$ достигается на окружности. Так как $f(z) = \frac{1}{1-z}$ при $|z| < 1$, найдем $|f(z)| = \frac{1}{|1-z|}$, где

$$z = re^{i\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{\left|1-re^{i\varphi}\right|} =$$

$$= \frac{1}{|1-r\cos\varphi - ir\sin\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2}}.$$

Найдем $M(r)$. Для этого достаточно найти $\min_{(-\pi,\pi]} T(\varphi)$, где

$$T(r) = 1-2r\cos\varphi + r^2, \quad T'_\varphi = 2r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi,$$

остальные стационарные точки не принадлежат промежутку $(-\pi, \pi]$. Очевидно,

$$\min_{(-\pi,\pi]} T(\varphi) = T(0) = (1-r)^2 \Rightarrow \max_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\min\limits_{(-\pi,\pi]} T(r)}} = \frac{1}{1-r}.$$

Значит, и

$$M(r) = \frac{1}{1-r} \Rightarrow \rho_D \overset{\text{def}}{=} \limsup_{r\to 1-0} \frac{\log M(r)}{\log\frac{1}{1-r}} = 1,$$

т. е. в условии

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} = \delta$$

нельзя взять δ даже равным 1.

Замечание 2. Условие для типа

$$\sigma_D\colon \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} = \delta < 1$$

является строгим.

Рассмотрим случай, когда

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log\log n}{\log\log\lambda_n} = 1,$$

при $\lambda_n = n$ рассмотрим ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n,$$

радиус сходимости которого равен 1. Вычислим тип степенного роста по определению. Сначала найдем $M(r)$,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = z\,s(z),$$

где

$$s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} \Rightarrow \int_0^z s(z)\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{z^n}{n} = \frac{z}{1-z} \Rightarrow s(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{и} \quad g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Найдем на $|z| = r$ модуль функции $g(z)$. Имеем

$$|g(z)| = \frac{|z|}{|1-z|^2}$$

и из замечания 1 получаем

$$\max_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{|1-z|} = \frac{1}{1-r} \Rightarrow \max_{(-\pi,\pi]} |g(z)| = M(r) = \frac{r}{(1-r)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_D \overset{\text{def}}{=} \limsup_{r\to 1-0} \frac{\log M(r)}{\log\dfrac{1}{1-r}} = \limsup_{r\to 1-0} \frac{\log\dfrac{r}{(1-r)^2}}{\log\dfrac{1}{1-r}} = 2.$$

Формальное использование формулы (7) приводит к следующему результату:

$$\sigma_D = \left(\frac{\rho_D}{e}\right)^{\rho_D} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{|A_n|}{\lambda_n^{\rho_D}} = \left(\frac{2}{e}\right)^2 \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = 0,$$

хотя по определению

$$\sigma_D \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{r\to 1-0} (1-r)^{\rho_D} M(r) = \varlimsup_{r\to 1-0} (1-r)^2 \frac{r}{(1-r)^2} = 1.$$

1. *Beuermann F.* Wachstumsordnung, Koeffizientenwachstum Nullstellendlichte bie Potenzreichen mit endlichem Konvergenzkreis // Math. Z. – 1931. – **33**. – S.98 – 108.
2. *Макаров В. Ю.* Характеристика степенного роста многомерного ряда экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 438 – 443.

Получено 21.07.99,
после доработки — 04.10.99