УДК 519.6: 511.7

М. С. Сявавко (Львів. аграр. ун-т, Дубляни)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ КРАМЕРА

We propose to apply the method of parametrized continuous fractions when solving systems of linear algebraic equations according to the Liouville–Neumann formal power expansion. We construct an analog of the Kramer formula which is also applicable to the cases of singular, bad-posed, and rectangular matrices.

Запропоновано застосування методу параметризованих неперервних дробів до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за їх формальними степеневими розкладами Ліувілля – Неймана. Побудовано аналог формули Крамера, що може бути застосований і для випадків вироджених, поганообумовлених та прямокутних матриць.

Правило Крамера [1, 2] розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) через його числову нестійкість практично не використовують. Зазвичай застосовують його раціональні аналоги (див., наприклад, [3]). У запропонованій роботі нелінійний апарат неперервних дробів [4] є робочим інструментом подання розв'язку СЛАР, а саме, тут використовується такий тип неперервних дробів.

Означення. *RITZ-дроби — це неперервні дроби вигляду* [5]

$$\frac{\beta_1}{1} + \frac{\beta_2\lambda^{\alpha_2}}{1} + \ldots + \frac{\beta_s\lambda^{\alpha_s}}{1} + \ldots, \quad \beta_s \neq 0, \tag{I}$$

де всі α_s *— додатні цілі числа, а* β_s *— ненульові комплексні константи.*

Якщо в (I) всі числа $\alpha_s = 1$, то такий дріб називатимемо регулярним RITZ-дробом. У загальному випадку (I) — нерегулярний дріб.

Побудоване на засадах скінченного вибору парних підхідних дробів RITZ-дробу (I) зображення розв'язку СЛАР суттєво розширило область його застосування: на відміну від класичних формул Крамера вказаний у роботі аналог застосовується як для невироджених, так і для вироджених, а також прямокутних матриць. Крім цього, вказану тут методику побудовано в тісному зв'язку між системами першого і другого родів. Це дозволило започаткувати новий метод знаходження нормального розв'язку дискретних некоректних задач. І, нарешті, на відміну від ітеративного методу регуляризації вказаних вище некоректних задач, який будується на вдалому виборі кількості членів формальних степеневих розкладів Ліувілля – Неймана, вказаний тут зрізаний дробово-раціональний метод регуляризації характеризується вдалим вибором числа поверхів наперед створеного на основі відповідного степеневого розкладу RITZ-дробу.

В статті аналогічну процедуру реалізовано і для випадку зображення розв'язку СЛАР як раціональної вектор-функції за параметром регуляризації. Такий підхід не вимагає створення відповідного до степеневого розкладу Ліувілля – Неймана RITZ-дробу.

1. Відповідні нерегулярні RITZ-дроби. Спочатку будемо вивчати невироджену, неоднорідну СЛАР

$$x_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

де λ — числовий параметр. Символом A позначатимемо матрицю коефіцієнтів a_{ij} системи (1), а $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$. Застосовуючи до (1) метод простої ітерації, одержимо (для кожного $i = \overline{1, n}$) формальний степеневий ряд (ФСР)

$$b_i + \lambda C_1^{(i)} + \lambda^2 C_2^{(i)} + \ldots + \lambda^n C_n^{(i)} + \ldots, \tag{2}$$

де при $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m-1)}$,

$$C_m^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} b_j. \tag{3}$$

Зауважимо, що в наступних перетвореннях використовується не більше ніж $2n$ членів ряду (2).

Згідно з загальними принципами відповідності ФСР параметризованим дробам (див. наслідок 5.3 [4, с. 161]) розв'язок системи (1) шукатимемо покомпонентно у вигляді нерегулярних RITZ-дробів.

Теорема 1. *Якщо в системі* (1) $\det A \neq 0$, *то RITZ-дроби будуть для всіх* $i = \overline{1,\, n}$ *відповідними для рядів* (2) *тоді і тільки тоді, коли*:

i) *для всіх* $i = \overline{1,\, n}$ *вони скінченні*:

$$\frac{P_s^{(i)}}{Q_s^{(i)}} = \frac{\beta_1^{(i)}}{1} + \frac{\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}}{1} + \ldots + \frac{\beta_s^{(i)}\lambda^{\alpha_s^{(i)}}}{1}, \qquad \beta_s^{(i)} \neq 0, \tag{4}$$

де s *визначається із співвідношення* $n = \alpha_2^{(i)} + \alpha_4^{(i)} + \ldots + \alpha_s^{(i)}$, *або* $n = \alpha_2^{(i)} + \alpha_4^{(i)} + \ldots + \alpha_{s-1}^{(i)}$, *якщо* s *відповідно парне або непарне число. В* (4) $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_s \leq 2n - 1$, $s \leq 2n$;

ii) *величини* $\alpha_p^{(i)}$ *і* $\beta_p^{(i)}$ *при* $\beta_1^{(i)} = b_i$ *знаходяться рекурентно, при цьому*

$$\beta_{p+1}^{(i)} = \frac{(-1)^p}{\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\ldots\beta_p^{(i)}}\left(C_{\Sigma_{p+1}}^{(i)} + \overline{Q}_{p.1}^{(i)}\left(C_{\Sigma_{p+1}}^{(i)}\right) + \ldots + \overline{Q}_{p.[p/2]}^{(i)}\left(C_{\Sigma_{p+1}}^{(i)}\right)\right), \tag{5}$$

де $\Sigma_{p+1} = \alpha_2^{(i)} + \ldots + \alpha_{p+1}^{(i)}$, *а* $\overline{Q}_{p.k}^{(i)}\left(C_{\Sigma_{p+1}}^{(i)}\right)$ *— вирази*

$$Q_{m.1}^{(i)} = \sum_{j=2}^{m} \beta_j^{(i)}\lambda^{\alpha_j^{(i)}}; \qquad Q_{m.2}^{(i)} = \sum_{j=4}^{m} \beta_j^{(i)} Q_{j-2.1}^{(i)} \lambda^{\alpha_j^{(i)}};$$

$$Q_{m.3}^{(i)} = \sum_{j=6}^{m} \beta_j^{(i)} Q_{j-2.2}^{(i)} \lambda^{\alpha_j^{(i)}}; \ldots; Q_{m.r}^{(i)} = \sum_{j=2r}^{m} \beta_j^{(i)} Q_{j-2.r-1}^{(i)} \lambda^{\alpha_j^{(i)}}, \tag{6}$$

в яких замість λ *підставлено значення* (3) *таким чином*:

$$\beta_{j_1}^{(i)}\beta_{j_2}^{(i)}\ldots\beta_{j_r}^{(i)}\lambda^{\alpha_{j_1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{j_r}^{(i)}} \approx \beta_{j_1}^{(i)}\beta_{j_2}^{(i)}\ldots\beta_{j_r}^{(i)} C_{\Sigma_{p+1}-(\alpha_{j_1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{j_r}^{(i)})}^{(i)}. \tag{7}$$

У цьому випадку для всіх $i = \overline{1,\, n}$ *знаменники дробу* (4) *мають один і той же вигляд. Вони є поліномами степеня* n *і зображають визначник матриці* $(I - \lambda A)$

$$Q_s^{(i)} = \det(I - \lambda A) = 1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_n\lambda^n. \tag{8}$$

Чисельники дробу (4) *мають вигляд*

$$P_s^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_{ki},$$

де A_{ki} *— алгебраїчне доповнення елемента* $\delta_{ki} - \lambda\alpha_{ki}$ (δ_{ki} *— символ Кронекера*). *Отже, дріб* (4) *є деяким різновидом дискретних формул Фредгольма.*

Доведення. Перш за все уточнимо запис (5). Наприклад,

$$\overline{Q}_{p.1}^{(i)}\left(C^{(i)}_{\sum'_{p+1}}\right) = p\sum_{j=2}\beta_j^{(i)}C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\ldots+\alpha_{j-1}^{(i)}+\alpha_{j+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{p+1}(i)},$$

$$\overline{Q}_{2m,m}^{(i)}\left(C^{(i)}_{\sum'_{2m+1}}\right) = \beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\ \ldots\ \beta_{2m}^{(i)}C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\ldots+\alpha_{j-1}^{(i)}+\alpha_{j+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{2m+1}(i)}.$$

Твердження i) та формули (8) для чисельника $P_s^{(i)}$ і знаменника $Q_s^{(i)}$ дробу (4) теореми є результатом того, що дріб (4) — єдиний розв'язок системи (1). Отже, враховуючи той факт, що знаменник дробу (4) має вільним членом число 1, цей знаменник і є визначником матриці $I-\lambda A$, якщо вираз $\dfrac{P_s^{(i)}}{\det(I-\lambda A)}$ нескоротний. Крім цього, коефіцієнти α_1 і α_n у співвідношенні (8) мають вигляд

$$\alpha_1 = -\operatorname{Sp}A = \sum\beta_r^{(i)}, \tag{9}$$

$$\alpha_n = \det A = \beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\ \ldots\ \beta_{2m}^{(i)}. \tag{10}$$

У формулі (9) підсумовування відбувається за тими значеннями $\beta_r^{(i)}$, для яких $\alpha_r^{(i)} = 1$. Число $2m = s$, якщо s — парне, і $2m = s-1$, якщо s — непарне. Інші коефіцієнти α_k більш складним чином визначаються через компоненти $\beta_2^{(i)},\ldots,\beta_s^{(i)}$ дробу (4).

Як легко бачити, чисельник $P_s^{(i)}$ дробу (4) визначається таким чином:

$$P_s^{(i)} = \beta_1^{(i)}Q_s^{(i)}\big|_{\beta_2^{(i)}=0}.$$

Твердження ii) теореми 1 доводиться методом математичної індукції. Нехай $P_m^{(i)}/Q_m^{(i)}$ — m-й підхідний дріб дробу (4). Тоді при $m = 1$ і λ^0 маємо

$$\frac{P_1^{(i)}}{Q_1^{(i)}} = \beta_1^{(i)} = b_i,$$

а при $m = 2$ і $\lambda^{\alpha_2^{(i)}}$ одержуємо

$$\frac{P_2^{(i)}}{Q_2^{(i)}} = \frac{\beta_1^{(i)}}{1+\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}} = \beta_1^{(i)}-\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\ldots.$$

Отже, якщо $C_1^{(i)} = C_2^{(i)} = \ldots = C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}-1} = 0$, а $C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}} \neq 0$, то

$$\beta_1^{(i)}-\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\ldots = b_i + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\ldots.$$

Таким чином,

$$-\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)} = C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}} \quad\text{і}\quad \beta_2^{(i)} = \frac{C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}}{\beta_1^{(i)}}.$$

Нехай $\alpha_2^{(i)} < n$. Тоді процес знаходження коефіцієнтів $\beta_3^{(i)}$, ... продовжується.

При $m = 3$ і $\lambda^{\alpha_2+\alpha_3}$ маємо

$$\frac{\beta_1^{(i)}(1+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}})}{1+\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}}} = b_i + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+1}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+1} + \ldots$$

$$\ldots + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}-1}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}-1} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}} + O(\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}).$$

Отже,

$$\beta_1^{(i)}\left(1+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}}\right) =$$

$$= \left(1+\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}}\right)\left(b_i + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+1}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+1} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}-1}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}-1} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}} + O(\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\right).$$

Звідси, враховуючи, що коефіцієнти при $\lambda^{\alpha_2^{(i)}+1}, \ldots, \lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}-1}$ тотожно дорівнюють нулю, одержуємо співвідношення

$$C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}}\beta_2^{(i)} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\beta_3^{(i)} = 0,$$

з якого випливає

$$\beta_3^{(i)} = \frac{1}{\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}}\left(C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}}\beta_2^{(i)}\right).$$

Аналогічно, при $m = 4$ і $\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}$

$$\beta_1^{(i)}(1+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}}+\beta_4^{(i)}\lambda^{\alpha_4^{(i)}}) = (1+\beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}+\beta_3^{(i)}\lambda^{\alpha_3^{(i)}}+\beta_4^{(i)}\lambda^{\alpha_4^{(i)}}+\beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}) \times$$

$$\times (b_i + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+1}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+1} + \ldots + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}} + \ldots$$

$$+ O(\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots\alpha_5^{(i)}})).$$

Оскільки коефіцієнти при $\lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+1}, \ldots, \lambda^{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}-1}$ тотожно дорівнюють нулю, з останнього виразу одержуємо

$$C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_2^{(i)} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_3^{(i)} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}}\beta_4^{(i)} + \beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}} = 0.$$

Враховуючи попередні співвідношення, маємо

$$C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_2^{(i)} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_3^{(i)} + \beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\beta_3^{(i)}\beta_4^{(i)} = 0,$$

що визначає

$$\beta_4^{(i)} = -\frac{1}{\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}\beta_3^{(i)}}\left(C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}} + C^{(i)}_{\alpha_3^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_2^{(i)} + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}+\alpha_4^{(i)}}\beta_3^{(i)}\right).$$

Нехай дріб $P^{(i)}_{m+1}/Q^{(i)}_{m+1}$ є відповідним рядові (2). Тоді

$$\frac{P^{(i)}_{m+1}}{Q^{(i)}_{m+1}} = b_i + C^{(i)}_{\alpha_2^{(i)}}\lambda^{\alpha_2^{(i)}} + \ldots + C^{(i)}_{\sum_{p=2}^{m+1}\alpha_p^{(i)}}\lambda^{\sum_{p=2}^{m+1}\alpha_p^{(i)}} + O(\lambda^{\sum_{p=2}^{m+2}\alpha_p^{(i)}}).$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $m = 2k$:

$$P_{2k+1}^{(i)} = \left(1 + \sum_{p=1}^{k} Q_{2k+1,p}\right) \times$$

$$\times \left(b_i + C_{\alpha_2^{(i)}}^{(i)} \lambda^{\alpha_2^{(i)}} + \ldots + C_{\sum_{p=2}^{2k+1} \alpha_p^{(i)}}^{(i)} \lambda^{\sum_{p=2}^{2k+1} \alpha_p^{(i)}} + O(\lambda^{\sum_{p=2}^{2k+2} \alpha_p^{(i)}})\right).$$

Прирівняємо до нуля в останньому співвідношенні коефіцієнт при $\lambda^{\sum_{p=2}^{2k+1} \alpha_p^{(i)}}$ (коефіцієнти при степенях $\lambda^{\alpha_2^{(i)}+1}, \ldots, \lambda^{\sum_{p=2}^{2k+1} \alpha_p^{(i)}-1}$ тотожно дорівнюють нулю). Отже, маємо

$$C_{\Sigma_{2k+1}}^{(i)} + \overline{Q}_{2k+1,1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) + \ldots + \overline{Q}_{2k+1,k}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) = 0. \tag{11}$$

Оскільки при $p = \overline{1, k}$

$$\overline{Q}_{2k-1,p}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) = \overline{Q}_{2k,p}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) + \beta_{2k+1}^{(i)} \overline{Q}_{2k-1,p}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k}}^{(i)}\right),$$

то із (11) одержуємо

$$C_{\Sigma_{2k+1}}^{(i)} + \overline{Q}_{2k,1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) + \ldots + \overline{Q}_{2k,k}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k+1}}^{(i)}\right) +$$

$$+ \beta_{2k+1}^{(i)}\left(C_{\Sigma_{2k}}^{(i)} + \overline{Q}_{2k-1,1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k}}^{(i)}\right) + \ldots + \overline{Q}_{2k-1,k-1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k}}^{(i)}\right)\right) = 0.$$

Таким чином, припустивши, що формула (5) вірна для $m = 2k - 1$, доводимо, що вона вірна і для $m = 2k$, тому що

$$C_{\Sigma_{2k}}^{(i)} + \overline{Q}_{2k-1,1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k}}^{(i)}\right) + \ldots + \overline{Q}_{2k-1,k-1}^{(i)}\left(C_{\Sigma'_{2k}}^{(i)}\right) = (-1)^{2k-1} \beta_{2k}^{(i)} \ldots \beta_3^{(i)} \beta_2^{(i)} \beta_1^{(i)}.$$

Аналогічні підрахунки проводяться і для $m = 2k + 1$. Теорему доведено.

***Приклад* 1.** Знайти RITZ-дроби розв'язків СЛАР

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \frac{\lambda}{11}(5x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 4x_4),\\
x_2 &= 1 + \frac{\lambda}{11}(12x_1 + 24x_2 - 7x_3 - 3x_4),\\
x_3 &= 3 + \frac{\lambda}{11}(5x_1 + 54x_2 - 13x_3 - 4x_4),\\
x_4 &= 5 + \frac{\lambda}{11}(130x_1 + 117x_2 - 52x_3 - 27x_4).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для цієї системи ряд (2) у матричному вигляді буде

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-4\end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda^3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\12\end{pmatrix} + \lambda^4\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\-7\end{pmatrix} + \lambda^5\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-23\end{pmatrix} + \lambda^6\begin{pmatrix}7\\3\\-1\\47\end{pmatrix} + \lambda^7\begin{pmatrix}-11\\2\\2\\4\end{pmatrix} + \ldots$$

Паралельно із системою другого роду (12) розглянемо і систему першого роду:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 11, \\ 12x_1 + 24x_2 - 7x_3 - 3x_4 &= 11, \\ 5x_1 + 54x_2 - 13x_3 - 4x_4 &= 33, \\ 130x_1 + 117x_2 - 52x_3 - 27x_4 &= 55. \end{aligned} \tag{13}$$

Для розв'язку x_1 системи (12) ряд (2) має такі коефіцієнти: $C_0^{(1)} = 1$, $C_1^{(1)} = -1$, $C_2^{(1)} = 1$, $C_3^{(1)} = 1$, $C_4^{(1)} = -3$, $C_5^{(1)} = 1$, $C_6^{(1)} = 7$, $C_7^{(1)} = -11$. Отже, в дробі (4) $\beta_1^{(1)} = 1$, $\alpha_2^{(1)} = 1$, $\beta_2^{(1)} = -\dfrac{C_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} = 1$. Для знаходження $\alpha_3^{(1)}$ і $\beta_3^{(1)}$ запишемо співвідношення

$$1 + \beta_3^{(1)}\lambda^{\alpha_3^{(1)}} = (1+\lambda+\beta_3^{(1)}\lambda^{\alpha_3^{(1)}})(1-\lambda+\lambda^2+\lambda^3-\ldots),$$

з якого випливає, що $\alpha_3^{(1)} \neq 1$, оскільки тоді $\beta_3^{(1)} = 0$, а це неможливо. При $\alpha_3^{(1)} = 2$ маємо $2\lambda^3 - \beta_3^{(1)}\lambda^3 = 0$. Отже, $\beta_3^{(1)} = 2$. Для знаходження $\alpha_4^{(1)}$ і $\beta_4^{(1)}$ одержимо вираз

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda^2 + \beta_4^{(1)}\lambda^{\alpha_4^{(1)}} &= (1+\lambda+2\lambda^2+\beta_4^{(1)}\lambda^{\alpha_4^{(1)}}+\beta_4^{(1)}\lambda^{\alpha_4^{(1)}+1})\times \\ &\times(1-\lambda+\lambda^2+\lambda^3-3\lambda^4+\lambda^5+7\lambda^6-11\lambda^7+\ldots), \end{aligned}$$

з якого випливає, що $\alpha_4^{(1)} = 3$, а $\beta_4^{(1)} = -1$. Процес відшукання значення x_1 завершено, оскільки $\alpha_2^{(1)} + \alpha_4^{(1)} = 4$ і в ряді (2) використано 8 коефіцієнтів. Таким чином,

$$x_1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda}{1 + \cfrac{2\lambda^2}{1-\lambda^3}}} = \frac{1+2\lambda^2-\lambda^3}{1+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda^4}.$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} x_2 &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda^3}{1 + \cfrac{2\lambda^2}{1-\lambda}}} = \frac{1+\lambda+2\lambda^2}{1+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda^4}, \\ x_3 &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda^2/3}{1 - \cfrac{2\lambda^2/3}{1 + \cfrac{3\lambda^2}{1+\lambda}}}} = \frac{3+3\lambda+7\lambda^2-2\lambda^3}{1+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda^4}, \\ x_4 &= \cfrac{5}{1 + \cfrac{4\lambda/5}{1 - \cfrac{13\lambda/10}{1 + \cfrac{5\lambda/2}{1 - \cfrac{\lambda}{1-\kappa^2/2}}}}} = \frac{5+\lambda+4\lambda^2-3\lambda^3}{1+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda^4}. \end{aligned} \tag{14}$$

У цьому прикладі

$$\beta_2^{(1)} = \beta_4^{(2)} = \beta_5^{(3)} = \beta_2^{(4)} + \beta_3^{(4)} + \beta_4^{(4)} + \beta_5^{(4)} = -\operatorname{Sp} A = 1. \tag{15}$$

Ліві частини співвідношення (15) — коефіцієнти при λ визначника матриці $1 - \lambda A$.

Крім того,

$$\beta_2^{(1)}\beta_4^{(1)} = \beta_2^{(2)}\beta_4^{(2)} = \beta_2^{(3)}\beta_4^{(3)} = \beta_2^{(4)}\beta_4^{(4)}\beta_6^{(4)} = -1 = \det A,$$

де A — матриця системи (13).

Зауважимо, що розв'язок системи (13) $x = (-1, 0, -2, -3)^T$ можна одержати як відношення коефіцієнтів при степенях $n-1$ і n відповідно у виразах (14) (це буде підтверджено теоремою 3).

Повернемось знову до виразу (4), де при початкових значеннях $P_1^{(i)} = P_2^{(i)} = \beta_1^{(i)}$ і $Q_1^{(i)} = 1$, $Q_2^{(i)} = 1 + \beta_2^{(i)}\lambda^{\alpha_2^{(i)}}$ $P_m^{(i)} = P_{m-1}^{(i)} + \beta_m^{(i)} P_{m-2}^{(i)}\lambda^{\alpha_m^{(i)}}$, $Q_m^{(i)} = Q_{m-1}^{(i)} + \beta_m^{(i)} Q_{m-2}^{(i)}\lambda^{\alpha_m^{(i)}}$, $m = \overline{1, s}$.

Виникає питання: чи буде дріб (4) правильним відносно λ?

Теорема 2. *Якщо в системі* (1) $\det A \neq 0$, *то дріб* (4) *для кожного* $i = \overline{1, n}$ *відносно* λ *правильний.*

Доведення. Проведемо його від супротивного. Нехай

$$x_i = \frac{P_0^{(i)} + P_1^{(i)}\lambda + \ldots + P_{n-1}^{(i)}\lambda^{n-1} + P_n^{(i)}\lambda^n}{1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_n\lambda^n}.$$

Підставивши ці значення в (1), одержимо

$$P_0^{(i)} + P_1^{(i)}\lambda + \ldots + P_{n-1}^{(i)}\lambda^{n-1} + P_n^{(i)}\lambda^n = b_i(1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_n\lambda^n) +$$
$$+ \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P_0^{(j)} + P_1^{(j)}\lambda + \ldots + P_{n-1}^{(j)}\lambda^{n-1} + P_n^{(j)}\lambda^n). \tag{16}$$

Прирівнявши до нуля в (16) коефіцієнт при λ^{n+1}, одержимо відносно $\{P_n^{(i)}\}$, де n — фіксоване, систему n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_n^{(j)} = 0,$$

яка згідно з умовами теореми має єдиний розв'язок $P_n^{(j)} = 0$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер СЛАР першого роду

$$Ax = b, \tag{17}$$

де A і b взято з (1).

Для (17) побудуємо СЛАР другого роду:

$$\alpha x_\alpha = b - A x_\alpha$$

і, ввівши позначення $\alpha x_\alpha = x_\lambda$, $\lambda = -1/\alpha$, запишемо (1) у вигляді

$$x_\lambda = b + A x_\lambda. \tag{18}$$

Теорема 3 (аналог формули Крамера). *Якщо в системі* (17) $\det A \neq 0$, *то* *i-та компонента* x_i *розв'язку цієї системи визначається за такими формулами:*

i) *якщо* $s = 2m$, *то*

$$x_i = -\sum_{k=1}^{m}{}' \frac{\beta_1^{(i)}\beta_3^{(i)}\ldots\beta_{2k-1}^{(i)}}{\beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\ldots\beta_{2k}^{(i)}}, \tag{19}$$

де в (19) *підсумовування відбувається за тими значеннями компонент* $\beta_k^{(i)}$, *для яких показники* $\alpha_k^{(i)}$ *у виразах* $\lambda^{\alpha_k^{(i)}}$ *задовольняють співвідношення*

$$\alpha_3^{(i)} + \alpha_5^{(i)} + \ldots + \alpha_{2k-1}^{(i)} + \alpha_{2k+2}^{(i)} + \alpha_{2k+4}^{(i)} + \ldots + \alpha_{2m}^{(i)} = n-1; \tag{20}$$

ii) *якщо* $s = 2m+1$, *то*

$$x_i = -\sum_{k=1}^{m}{}' \frac{\beta_1^{(i)}\beta_3^{(i)}\ldots\beta_{2k+1}^{(i)}}{\beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\ldots\beta_{2k}^{(i)}}. \tag{21}$$

В (21) *рівність* (20) *замінюється на значення*

$$\alpha_3^{(i)} + \alpha_5^{(i)} + \ldots + \alpha_{2k+1}^{(i)} + \alpha_{2k+2}^{(i)} + \alpha_{2k+4}^{(i)} + \ldots + \alpha_{2m}^{(i)} = n-1.$$

Формули (19) *і* (21) *можна замінити виразом*

$$x_i = \frac{\beta_1^{(i)}}{\alpha_n^{(i)}}\alpha_{n-1}^{(i)}\bigg|_{\beta_2^{(i)}=0},$$

де $\alpha_{n-1}^{(i)}$ *і* $\alpha_n^{(i)}$ *визначаються із* (8).

Доведення. За виконання умови теореми

$$x_\lambda^{(i)} = \frac{P_0^{(i)} + P_1^{(i)}\lambda + \ldots + P_{n-1}^{(i)}\lambda^{n-1}}{1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n}.$$

Перейшовши в цьому співвідношенні до змінної α, одержимо

$$\alpha x_\alpha^{(i)} = \frac{P_0^{(i)} - \frac{1}{\alpha}P_1^{(i)} + \ldots + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}P_{n-1}^{(i)}}{1 - \frac{1}{\alpha}a_1 + \ldots + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n a_n}.$$

Таким чином,

$$x_\alpha^{(i)} = \frac{P_0^{(i)}\alpha^{n-1} - P_1^{(i)}\alpha^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}P_{n-1}^{(i)}}{\alpha^n - \alpha^{n-1}a_1 + \ldots + (-1)^n a_n}.$$

Переходячи до границі при прямуванні α до нуля, маємо

$$x_i = -\frac{P_{n-1}^{(i)}}{a_n}. \tag{22}$$

В (22) $a_n = \beta_2^{(i)}\beta_4^{(i)}\ldots\beta_{2m}^{(i)}$, якщо $s = 2m$ або $s = 2m+1$.

Очевидно, прийнявши $a_0 = 1$, $P_{-1}^{(i)} = 0$, матимемо

$$P_{k-1}^{(i)} = a_{k-1}\beta_1^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_{k-2}^{(j)}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

тобто, знаючи знаменник дробу (4), легко знайти його чисельник.

Для перевірки обчислень можна використати залежність

$$a_n\beta_1^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_{n-1}^{(j)} = 0.$$

Завершення доведення здійснюється методом математичної індукції.

Теорему доведено.

Те, що умова $\det A \neq 0$ є суттєвою, підтверджує наступний приклад.

***Приклад* 2.** Для системи

$$x_1 = 1 + \lambda(2x_1 + x_2),$$

$$x_2 = 2 + \lambda(2x_1 + x_2)$$

визначник матриці A дорівнює нулю.

Для неї дріб (4) є регулярним з наступними значеннями компонент:

$$\beta_1^{(1)} = 1, \quad \beta_2^{(1)} = -4, \quad \beta_3^{(1)} = 1, \quad \beta_4^{(1)} = \beta_4^{(2)} = 0,$$

$$\beta_1^{(2)} = 2, \quad \beta_2^{(2)} = -2, \quad \beta_3^{(2)} = -1.$$

Тому

$$x_1 = \frac{1}{1 - \dfrac{4\lambda}{1+\lambda}} = \frac{1+\lambda}{1-3\lambda}, \quad x_2 = \frac{2}{1 - \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}} = \frac{2(1-\lambda)}{1-3\lambda}. \tag{23}$$

Дроби (23) не є правильними і здійснити граничний перехід (22) неможливо. Цього слід було очікувати, оскільки система

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{24}$$

є несумісною (продовження див. у прикладі 4).

2. Випадок регулярних RITZ-дробів. В цьому випадку, як буде показано нижче, формули (5), (19), (21) набагато спрощуються, а сам процес знаходження розв'язків систем (1) і (17) стає більш наглядним.

Теорема 4 [6 – 8]. *При виконанні умов*:

i) *визначник матриці* A *системи* (1) *не дорівнює нулю*;

ii) *для всіх* $i = \overline{1, n}$ $b_i \neq 0$;

iii) *для всіх* $i = \overline{1, n}$ *визначники Ганкеля* $H_k^{(1,i)}$, $k = \overline{1, n}$, *не дорівнюють нулю, де*

$$H_k^{(n,i)} = \begin{vmatrix} C_n^{(i)} & C_{n+1}^{(i)} & \ldots & C_{n+k+1}^{(i)} \\ C_{n+1}^{(i)} & C_{n+2}^{(i)} & \ldots & C_{n+k}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n+k+1}^{(i)} & C_{n+k}^{(i)} & \ldots & C_{n+2k-2}^{(i)} \end{vmatrix},$$

дріб (4) *системи* (1) *перетворюється в регулярний*

$$x_i = \frac{\beta_1^{(i)}}{1} + \frac{\beta_2^{(i)}\lambda}{1} + \cdots + \frac{\beta_{2n}^{(i)}\lambda}{1}, \tag{25}$$

де для всіх $i = \overline{1, n}$ $\beta_s^{(i)} \neq 0$, $s = \overline{1, 2n}$.

Крім цього, дріб (25) *буде відповідним ряду, якщо коефіцієнти* $\beta_s^{(i)}$ *визначаються згідно з рекурентними співвідношеннями*

$$\beta_{s+1}^{(i)} = \frac{(-1)^{s}}{\beta_1^{(i)} \ldots \beta_s^{(i)}} \left(C_s^{(i)} + Q_{s,1}^{(i)} C_{s-1}^{(i)} + \ldots + Q_{s,[s/2]}^{(i)} C_{s-[s/2]}^{(i)}\right) \tag{26}$$

і

$$Q_{s,m}^{(i)} = Q_{s-1,m}^{(i)} + \beta_s^{(i)} Q_{s-2,m-1}^{(i)}, \tag{27}$$

$Q_{s,0}^{(i)}$, $Q_{2,1}^{(i)} = \beta_2^{(i)}$, *а* $C_s^{(i)}$ — *коефіцієнти ФСР* (2).

Нехай $P_k^{(i)} / Q_k^{(i)}$ — k-й підхідний дріб дробу (25). Очевидно, що

$$\frac{P_k^{(i)}}{Q_k^{(i)}} = \frac{\sum_{m=0}^{[(k-1)/2]} P_{k,m}^{(i)} \lambda^m}{\sum_{m=0}^{[k/2]} Q_{k,m}^{(i)} \lambda^m}, \tag{28}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x. Чисельник $P_k^{(i)}$ і знаменник $Q_k^{(i)}$ дробу (28) можна визначити з різницевих рівнянь

$$P_k^{(i)} = P_{k-1}^{(i)} + \lambda\beta_k P_{k-2}^{(i)}, \quad P_0^{(i)} = 0, \quad P_1^{(i)} = \beta_1^{(i)},$$

$$Q_k^{(i)} = Q_{k-1}^{(i)} + \lambda\beta_k Q_{k-2}^{(i)}, \quad Q_0^{(i)} = Q_1^{(i)} = 1,$$

з яких безпосередньо випливає (27) і

$$P_{k,m}^{(i)} = P_{k-1,m}^{(i)} + \beta_k^{(i)} P_{k-2,m-1}^{(i)}. \tag{29}$$

Для дробу (25) маємо

$$x_i = \frac{P_{2n}^{(i)}}{Q_{2n}^{(i)}} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} P_{2n,m}^{(i)} \lambda^m}{\sum_{m=0}^{n} Q_{2n,m}^{(i)} \lambda^m}, \tag{30}$$

а на основі (27) і (29)

$$Q_{2n,n}^{(i)} = \beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)} \ldots \beta_{2n}^{(i)} \tag{31}$$

та

$$P_{2n,n-1}^{(i)} = \beta_1^{(i)}(\beta_4^{(i)} \ldots \beta_{2n}^{(i)} + \beta_3^{(i)}(\beta_6^{(i)} \ldots \beta_{2n}^{(i)} + \beta_5^{(i)}(\beta_8^{(i)} \ldots \beta_{2n}^{(i)} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_{2n-3}^{(i)}(\beta_{2n}^{(i)} + \beta_{2n-1}^{(i)})))). \tag{32}$$

Таким чином, одержано наступне твердження.

Теорема 5. *При виконанні умов теореми* 4 *аналог формули Крамера* (19), (21) *для системи* (17) *має вигляд*

$$x_i = -\frac{\beta_1^{(i)}}{\beta_2^{(i)}} \left(1 + \frac{\beta_3^{(i)}}{\beta_4^{(i)}} \left(1 + \ldots + \frac{\beta_{2n-3}^{(i)}}{\beta_{2n-2}^{(i)}} \left(1 + \frac{\beta_{2n-1}^{(i)}}{\beta_{2n}^{(i)}} \right) \right) \right). \tag{33}$$

Зауважимо, що формулі (33) можна надати еквівалентного вигляду

$$x_i = -\frac{\beta_1^{(i)}}{\beta_2^{(i)}} - \frac{\beta_2^{(i)}\beta_3^{(i)}}{\beta_3^{(i)} + \beta_4^{(i)}} - \cdots - \frac{\beta_{2n-2}^{(i)}\beta_{2n-1}^{(i)}}{\beta_{2n-1}^{(i)} + \beta_{2n}^{(i)}}. \tag{34}$$

3. Подання розв'язку *М*-дробами. Дробово-раціональні апроксиманти розв'язку можна одержати і таким чином.

Теорема 6. *При виконанні умов теореми* 4 *розв'язок системи* (1) *виражається у вигляді скінченного М-дробу*

$$x_i = \frac{F_1^{(i)}}{1 + G_1^{(i)}\lambda} + \frac{F_2^{(i)}\lambda}{1 + G_2^{(i)}\lambda} + \cdots + \frac{F_n^{(i)}\lambda}{1 + G_n^{(i)}\lambda}, \tag{35}$$

де $F_j^{(i)}$ *і* $G_j^{(i)}$ *визначаються для всіх* $i, j = \overline{1, n}$ *рекурентними співвідношеннями:*

$$F_1^{(i)} = b_i, \quad G_1^{(i)} = -\frac{C_1^{(i)}}{b_i}, \quad F_2^{(i)} = -\frac{(C_1^{(i)})^2 - C_2^{(i)} b_i}{b_i C_1^{(i)}},$$

$$G_2^{(i)} = -\frac{(C_2^{(i)})^2 - C_1^{(i)} C_3^{(i)} b_i}{C_1^{(i)}(C_2^{(i)} b_i - (C_2^{(i)})^2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_m^{(i)} = \frac{C_{2m-2}^{(i)} + \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)}}{\sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)}}, \tag{36}$$

$$G_m^{(i)} = \frac{\Omega_m^{(i)}}{\sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s-1}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)}}, \tag{37}$$

де

$$\Omega_m^{(i)} = \sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} (C_{2m-s-1}^{(i)} C_{2m-2}^{(i)} - C_{2m-s-2}^{(i)} C_{2m-2}^{(i)}) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} Q_{2m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)} -$$

$$- \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)},$$

$$Q_{m,s}^{(i)} = Q_{m-1,s}^{(i)} + G_m^{(i)} Q_{m-1,s-1}^{(i)} + F_m^{(i)} Q_{m-2,s-1}^{(i)} \tag{38}$$

при початкових умовах

$$Q_{m,0}^{(i)} = 1, \quad Q_{m-1,m}^{(i)} = 0, \quad Q_{1,1}^{(i)} = G_1^{(i)},$$

$$Q_{2,1}^{(i)} = G_1^{(i)} + G_2^{(i)} + F_2^{(i)}, \quad Q_{2,2}^{(i)} = G_1^{(i)} G_2^{(i)}.$$

В формулах (36) *і* (37) *коефіцієнти* $C_k^{(i)}$ *визначаються із* (2); $s, m, i = \overline{1, n}$.

Доведення. Як легко бачити, для дробу (35)

$$\frac{P_1^{(i)}}{Q_1^{(i)}} = \frac{F_1^{(i)}}{1 + G_1^{(i)}\lambda}, \quad \frac{P_2^{(i)}}{Q_2^{(i)}} = \frac{F_1^{(i)}(1 + G_2^{(i)}\lambda)}{1 + (G_1^{(i)} + G_2^{(i)} + F_2^{(i)})\lambda + G_1^{(i)} G_2^{(i)} \lambda^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{39}$$

$$\frac{P_m^{(i)}}{Q_m^{(i)}} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} P_{m,j}^{(i)} \lambda^j}{\sum_{j=0}^{m} Q_{m,j}^{(i)} \lambda^j}.$$

Згідно з загальною формулою знаходження чисельників і знаменників дробу (39) маємо рівності

$$P_m^{(i)} = (1 + G_m^{(i)}\lambda) P_{m-1}^{(i)} + \lambda F_m^{(i)} P_{m-2}^{(i)},$$
$$Q_m^{(i)} = (1 + G_m^{(i)}\lambda) Q_{m-1}^{(i)} + \lambda F_m^{(i)} Q_{m-2}^{(i)}. \tag{40}$$

Врахувавши (39) і (40), одержимо рекурентні співвідношення

$$P_{m,s}^{(i)} = P_{m-1,s}^{(i)} + G_m^{(i)} P_{m-1,s-1}^{(i)} + F_m^{(i)} P_{m-2,s-1}^{(i)}, \quad s = \overline{1, m}, \quad m, i = \overline{1, n},$$

при початкових співвідношеннях

$$P_{m,m}^{(i)} = 0, \quad P_{m,0}^{(i)} = F_1^{(i)}, \quad P_{2,1}^{(i)} = F_1^{(i)} G_2^{(i)}.$$

Аналогічно встановлюється і співвідношення (38).

Яких значень повинні набувати константи $F_s^{(i)}$ і $G_s^{(i)}$, щоб дріб (35) відповідав ряду (2)? Для цього повинно виконуватись співвідношення

$$P_{m,0}^{(i)} + P_{m,1}^{(i)}\lambda + \ldots + P_{m,m-1}^{(i)}\lambda^{m-1} = (1 + Q_{m,1}^{(i)}\lambda + \ldots + Q_{m,m}^{(i)}\lambda^m) \times$$
$$\times (b_i + C_1^{(i)}\lambda + \ldots + C_{2m}^{(i)}\lambda^{2m}) + O(\lambda^{2m+1}). \tag{41}$$

Розглянемо спочатку випадок $m = 1$. Враховуючи коефіцієнти при λ^0 і λ^1, одержуємо

$$F_1^{(i)} = b_i, \quad G_1^{(i)} = -\frac{C_1^{(i)}}{b_i}.$$

Далі для $m = 2$, враховуючи коефіцієнти λ^2 і λ^3, маємо

$$F_2^{(i)} C_1^{(i)} = -C_2^{(i)} - G_1^{(i)} C_1^{(i)}$$

і

$$G_2^{(i)}(C_2^{(i)} + G_1^{(i)} C_1^{(i)}) + F_2^{(i)} C_2^{(i)} = -C_3^{(i)} - G_1^{(i)} C_2^{(i)}.$$

Отже,

$$F_2^{(i)} = \frac{(C_1^{(i)})^2 - C_2^{(i)} b_i}{b_i C_1^{(i)}}, \quad G_2^{(i)} = \frac{(C_2^{(i)})^2 - C_1^{(i)} C_3^{(i)} b_i}{C_1^{(i)}(b_i C_2^{(i)} - (C_2^{(i)})^2)},$$

....

В загальному випадку, прирівнявши для довільного m в (41) коефіцієнти при λ^{2m-2} і λ^{2m-1}, одержимо для визначення $G_m^{(i)}$ і $F_m^{(i)}$ систему рівнянь

$$C_{2m-2}^{(i)} + \sum_{s=1}^{m} Q_{m,s}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)} = 0,$$
$$C_{2m-1}^{(i)} + \sum_{s=1}^{m} Q_{m,s}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} = 0, \tag{42}$$

з якої згідно з (38) маємо

$$G_m^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s-1}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)} + F_m^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)} =$$
$$= C_{2m-2}^{(i)} - \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s}^{(i)} C_{2m-s-2}^{(i)}, \tag{43}$$

і

$$G_m^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s-1}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} + F_m^{(i)} \sum_{s=1}^{m} Q_{m-2,s-1}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)} =$$
$$= C_{2m-1}^{(i)} - \sum_{s=1}^{m} Q_{m-1,s}^{(i)} C_{2m-s-1}^{(i)}.$$

Але в (43) внаслідок (42) коефіцієнт при $G_m^{(i)}$ дорівнює нулю. Теорему доведено.

$$x_1^+ = \frac{7}{3}, \quad x_2^+ = \frac{2}{3}, \quad x_3^+ = \frac{5}{3}.$$

Подавши розв'язок системи (45) у вигляді регулярного чи нерегулярного RITZ-дробу і спрямувавши $\alpha \to 0$, одержимо згідно з теоремами 3 і 7 нормальний розв'язок системи (44). Це у випадку сумісної системи. Тоді окрім $\beta_{2m}^{(i)} = 0$ і $\beta_{2m-1}^{(i)} = 0$, де $m \leq n$. У випадку несумісної системи (44) $\beta_{2m}^{(i)} = 0$, але $\beta_{2m-1}^{(i)} \neq 0$. Для знаходження псевдорозв'язку необхідно враховувати скінченний дріб порядку $2m-2$.

Приклад 4. Щоб знайти нормальний розв'язок несумісної системи (24), потрібно взяти дроби $1/(1-4\lambda)$ і $2/(1-2\lambda)$ і спрямувати $\alpha = -1/\lambda$ до нуля. Тоді одержимо $x_1^+ = 1/4$, $x_2^+ = 1$.

Слід підкреслити і ту обставину, що запис розв'язку системи (45) у вигляді параметризованого дробу є суттєвим, оскільки, як буде вказано нижче, кількість поверхів цього дробу є регулятором виродженості або невиродженості системи (44). Крім цього, кількість поверхів дробу для системи (45) встановлює і ранг матриці A.

Зауваження 1. Дробові розклади для псевдообернених матриць Мура – Пенроуза A^+ [9] і Дразіна [10] можна одержати, використовуючи співвідношення

$$\alpha x_\alpha = A^* - A^* A x_\alpha, \quad \alpha x_\alpha = A^k - A^{k+1} x_\alpha,$$

де k — індекс матриці A, з подальшим прямуванням $\alpha \to 0$.

Зауваження 2. Для правильного вибору кількості поверхів у дробах (4) і (25) слід користуватись властивістю (9).

5. Регуляризація. Запис розв'язку рівняння (44) через неперервні дроби (4) або (25) дає можливість здійснити регуляризацію нормального розв'язку цієї задачі. Нехай, наприклад, f_ε апроксимує f, тобто $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$. Нехай, крім цього, функція $\gamma_{k^{(i)}}^{(i)}$ є такою, що коли $\varepsilon \to 0$ для всіх $i = \overline{1, n}$, то

i) $\gamma_{k^{(i)}}^{(i)}(\varepsilon) \to 0$;

ii) $\left\| T_{\gamma_{k^{(i)}}^{(i)}(\varepsilon)} \right\| \varepsilon \to 0$,

де

$$T_{\gamma_{k^{(i)}}^{(i)}(\varepsilon)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{P_{2k^{(i)}-2}^{(i)}(\lambda)}{Q_{2k^{(i)}-2}^{(i)}(\lambda)}, \quad \lambda = -\frac{1}{\alpha},$$

а $\dfrac{P_{2k^{(i)}-2}^{(i)}(\lambda)}{Q_{2k^{(i)}-2}^{(i)}(\lambda)}$ є підхідним дробом дробів (4) або (25). Тут підхідні дроби вибираються так, щоб

$$\left| \beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)} \ldots \beta_{2k}^{(i)} \right| \leq \varepsilon$$

при $2k \leq s$ або $2k \leq 2n$ відповідно для дробів (4) або (25). Таким чином, регуляризація здійснюється вдалим вибором підхідних дробів. Такий вибір гарантує, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_{\gamma_{k^{(i)}}^{(i)}} = x_i^+$$

і виконується умова ii).

Аналогічна регуляризація здійснюється і при наближеному заданні оператора $\mathfrak{I}$.

Приклад 5 [13]. Вивчається вироджена сумісна система рівнянь

$$x_1 + \sqrt{2}x_2 = 1,$$
$$\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = \sqrt{2}.$$

Для неї наближено будемо задавати величину $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$. При такому обчисленні одержується невироджена система, яка при дробово-раціональному методі вимагає зображення RITZ-дробом з чотирма поверхами. Це приводить до появи так званої числової "пили" і нестійкого розв'язку заданої погано-обумовленої системи. Згідно з попередніми вказівками регуляризатором нормального розв'язку заданої системи буде оператор $\dfrac{\tilde{f}_1^2}{(\tilde{A}\tilde{f})_1}$, де $\tilde{A}$ і $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)^T$ — наближені значення матриці A і правої частини досліджуваної системи. Наприклад, при обчисленні значення $\sqrt{2}$ для матриці A і правої частини, як $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ і $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$, відповідно маємо $x_1^+ = 0{,}33331$, $x_2^+ = 0{,}471411$, що цілком узгоджується із наближеним заданням матриці A і правої частини f.

6. Регуляризація без попереднього створення степеневих розкладів Ліувілля – Неймана. Повернемось знову до СЛАР (1), яку для простоти запису подамо в матричному вигляді

$$X = b + \lambda A X. \tag{46}$$

Оминувши запис розв'язку (46) через RITZ-дроби, за результатами роботи [3] (коли $\det A \neq 0$) зобразимо цей розв'язок як дробово-раціональну функцію за змінною λ

$$X = \frac{B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1}}{1 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \ldots + \lambda^n d_n}\, b, \tag{47}$$

де відповідно числові d_i, $i = \overline{1, n}$, та матричні B_j, $j = \overline{0, n-1}$, коефіцієнти виражаються таким чином:

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\operatorname{Sp} A, & B_0 &= I,\\
d_2 &= -\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(B_1 A), & B_1 &= B_0 A + d_1 I,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_{n-1} &= -\frac{1}{n-1}\operatorname{Sp}(B_{n-2} A), & B_{n-1} &= B_{n-2} A + d_{n-1} I,\\
d_n &= -\frac{1}{n}\operatorname{Sp}(B_{n-1} A), & 0 &= B_{n-1} A + d_n I,
\end{aligned} \tag{48}$$

$\operatorname{Sp} A$ — слід матриці A.

Останнє співвідношення правої колонки (48) може бути використане для перевірки обчислень: відмінність $B_{n-1}A$ від діагональної матриці $(-d_n I)$ дає змогу робити висновки про величину похибок, що виникають в процесі обчислення d_i та B_j.

Такий дробово-раціональний запис розв'язку рівняння (46) (а у випадку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду — мероморфний за змінною λ розв'язок) дає можливість відшукати узагальнені розв'язки рівнянь першого роду.

Дійсно, нехай СЛАР має вигляд

$$BX = C, \tag{49}$$

де $B = (b_{kj})$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $C = (c_k)_I$ — відповідно прямокутна матриця і вектор.

Матричне рівняння

$$-AX = f, \tag{50}$$

де $A = -B^T B$, а $f = B^T C$, називають нормальним рівнянням системи (49), а нормальний розв'язок останньої можна визначити із системи Ейлера

$$\alpha \overline{X}_\alpha = f + A\overline{X}_\alpha \tag{51}$$

шляхом граничного переходу

$$X^+ = \lim_{\alpha \to 0} (\alpha I - A)^{-1} f. \tag{52}$$

Символ „T" означає транспонування.

У разі некоректно поставлених задач система (49) є або поганообумовленою, або виродженою, або прямокутною. Для таких систем мінімальний многочлен матриці A має розміри s, де $s \le r = \operatorname{rang} A$.

Як було сказано вище, рівнянню (51) можна при $y = \alpha \overline{X}_\alpha$, де $\lambda = 1/\alpha$, надати вигляду (46). Тоді формула (47) набере вигляду

$$y = \frac{\alpha^{n-1} B_0 + \alpha^{n-2} B_1 + \ldots + \alpha B_{n-2} + B_{n-1}}{\alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\alpha + d_n} f, \tag{53}$$

де коефіцієнти B_s і d_r визначаються згідно з (48).

Реалізація граничного переходу (52) визначає нормальний розв'язок СЛАР (49), а саме:

$$X^+ = \frac{1}{d_s} B_{s-1} f. \tag{54}$$

***Приклад* 6.** Розглянемо систему (49) при

$$B = \begin{pmatrix} 14 & 35 & -7 & -63 \\ -10 & -25 & 5 & 45 \\ 26 & 65 & -13 & -117 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 777 \\ -555 \\ 1443 \end{pmatrix}.$$

У цій системі $\operatorname{rang} B = 1$, тому, обчисливши для неї

$$A = -B^T B = \begin{pmatrix} 972 & 2430 & -496 & -4374 \\ 2430 & 6075 & -1215 & -10935 \\ -496 & -1215 & 243 & 2187 \\ -4374 & -10935 & 2187 & 19683 \end{pmatrix},$$

$$f = B^T C = \begin{pmatrix} 53946 \\ 134865 \\ -26973 \\ -242757 \end{pmatrix},$$

згідно з (51) і (53) маємо

$$\overline{X}_\alpha = \frac{1}{26973-\alpha}\begin{pmatrix} 53946 \\ 134865 \\ -26973 \\ -242757 \end{pmatrix}.$$

Спрямувавши тут α до нуля, знайдемо нормальний розв'язок прикладу:

$$X^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

У загальному випадку координати псевдооберненого оператора X^+ не є неперервними. Для того щоб перейти до неперервної задачі, вводиться поняття регуляризації оператора X^+. Класичними методами регуляризації некоректно поставлених задач, які дають змогу знайти розв'язок у деякому наближенні, є зрізаний сингулярний розклад, метод регуляризації Тіхонова – Філіпса, ітераційні методи [12]. Такого роду регуляризації мають ряд суттєвих вад. По-перше, згідно з (52) змінюється сам оператор рівняння, що стає коректним. Отже, за такою процедурою не знаходиться псевдорозв'язок рівняння першого роду і не ставиться питання про побудову регуляризуючого алгоритму розв'язання вхідного рівняння (49). По-друге, в процесі тіхоновської регуляризації немаловажне значення має вдалий вибір параметра регуляризації. У багатьох випадках його відшукання є складнішою задачею за первісну. Тому практики найчастіше вибирають його емпірично. По-третє, сам процес знаходження розв'язку збуреного рівняння (51) збігається досить повільно. Крім цього, в гребінчастій регресії (рідж-регресія) [14], що за формою співставляється з регуляризацією за Тіхоновим, одержуються зміщені, а не прямі оцінки. І, нарешті, за таких підходів у нерозчленованому вигляді наявні два цілком різні поняття: точність і стійкість. Відбувається „перекачування" одного з цих понять в інше. Про ці та інші недоліки класичних методів регуляризації вказано також у роботах [15 – 17].

На основі доведених у роботі тверджень зрізаний дробово-раціональний метод регуляризації, що характеризується вдалим вибором числа поверхів наперед створеного на засадах відповідного до ФСР RITZ-дробу, не має вказаних вище недоліків. Але він, очевидно, є громіздким. Тому доцільно застосовувати також і метод, що базується на поданні розв'язку у вигляді (54), що використовує запис (53).

Із співвідношення (54) випливає, що псевдорозв'язок стає необмеженим за рахунок прямування до нуля знаменника, а це дозволяє стверджувати наступне.

Теорема 8 (теорема зрізаної дробово-раціональної регуляризації). *Нехай $h = 10^{-p}$ і $\delta \geq 0$ — відповідно точність задання матриці коефіцієнтів і правої частини СЛАР* (49), *а $X_{h,\delta}$ — її розв'язок, що відповідає цим неточностям. Тоді стійкість*

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ \delta\to 0}} X_{h,\delta} = X^+$$

має місце, коли регуляризатором (49) *буде вибраний оператор* (54) *з наступною умовою: якщо в* (54) *d_s є нулем порядку 10^{1-p}, то*

$$X^{+} = \frac{1}{d_{s-1}} B_{s-2} f .$$

Отже, роблячи висновок, слід наголосити, що у чисто дробовому методі регуляризація здійснюється за рахунок зменшення на два кількості поверхів відповідного RITZ-дробу, тому у випадку (54) змінюється на одиницю кількість членів у чисельнику та знаменнику дробу (53).

1. *Cramer G.* Introduction a Fanalyse des lignes courbes. – Gen, 1750. – 657 p.
2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965. – 352 с.
3. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. – М.: Наука, 1970. – 704 с.
4. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис.* Аппроксимации Паде / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
6. *Сявавко М. С.* *J*-дробова регуляризація лінійних некоректних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1130 – 1143.
7. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
8. *Сявавко М. С., Пасечник Т. В., Рыбыцька О. М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, № 1. – С. 10 – 16.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
10. *Drasin M. P.* Pseudoinverses in associative ringers and semigroups // Amer. Math. Monthly. – 1958. – **65**. – P. 506 – 515.
11. *Тихонов А. И., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
12. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 217 с.
13. *Чечкин В. А.* Математическая информатика. – М.: Наука, 1991. – 412 с.
14. *Дрейпер Н., Смич Г.* Прикладной регрессионный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – Кн. 2. – 366 с.
15. *Перчик Е. Л.* Устойчивая процедура решения интегральных уравнений первого рода без использования концепции конечных возмущений // Мат. Межд. симп. по методу дискретных особенностей. – Феодосия, 1977.
16. *Хованский А. В.* Регуляризованный метод Гревилля и его применения в трансмиссионной компьютерной томографии // Мат. моделирование. – 1996. – **8**, № 11. – С. 109 – 118.
17. *Сявавко М., Рибицька О.* Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: Українські технології, 2000. – 320 с.

Одержано 11.11.96,
після доопрацювання — 18.08.2000