УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. I

We obtain order estimates of linear widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some values of parameters p and q.

Одержано порядкові оцінки лінійних поперечників класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких значень параметрів p і q.

В настоящей работе продолжается исследование аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных (см., например, [1 – 3] и имеющуюся там библиографию). При этом основное внимание сосредоточено на установлении точных по порядку оценок линейных поперечников указанных классов в метрике L_q, хотя параллельно получены также точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов $B^r_{1,\theta}$, которые, по-видимому, оставались неизвестными.

I. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения. Пусть R^d — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Всюду ниже предполагаем, что для функций $f(\cdot) \in L_p(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Пусть $V_l(t)$, $l \in N$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l-1$, т. е.

$$V_l(t) = \sum_{k=1}^{l} \cos kt + \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, поставим в соответствие полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

и через $A_s(f, x)$ обозначим свертку $A_s(f, x) = f(x) * A_s(x)$. Тогда (см., например, [4, с. 368]) при каждом $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, класс $B^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$d_M(W, X) \le \lambda_M(W, X). \tag{2}$$

В связи с этим представляется интересным выяснить в каких случаях (для конкретных множеств W и пространств X) поперечники $\lambda_M(W, X)$ и $d_M(W, X)$ совпадают, а в каких в (2) имеет место строгое неравенство.

При изложении результатов нам понадобятся некоторые известные утверждения.

Пусть l_p^m обозначает пространство R^m, снабженное нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

и B_p^m — единичный шар в l_p^m.

Справедлива следующая теорема.

Теорема А [7]. *Пусть* $M < m$, $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $1/p + 1/q \ge 1$. *Тогда*

$$\lambda_M\left(B_p^m, l_q^m\right) \asymp \max\left\{m^{1/q-1/p},\ \min\left\{1, m^{1/q} M^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{M}{m}}\right\}.$$

Отметим, что в случае $p = 1$, $q > 2$ соответствующий результат следует из утверждения, установленного Б. С. Кашиным [8].

Теорема Б [9]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида*

$$f(t) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$$

и пространством $R^{2^{(s,1)}}$ *существует изоморфизм, сопоставляющий функции* $f(\cdot)$ *вектор* $\delta_s f^j = \left\{f_n(\tau_j)\right\} \in R^{2^{(s,1)}}$,

$$f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = \overline{1,d}, \quad n = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in R^d,$$

$$\tau_j = \left(\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d\right), \quad j_i = 1, 2, \dots, 2^{s_i - 1},$$

и при этом имеет место соотношение

$$\|\delta_s(f, x)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^p\right)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

Для функций одной переменной соответствующая теорема доказана в [10, с. 46] (т. 2).

Теорема В [4, с. 65]. *Пусть* $p \in (1, \infty)$. *Тогда существуют положительные постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что для любой функции* $f \in L_p(\pi_d)$ *справедлива оценка*

$$C_1 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2 \|f\|_p.$$

Эта теорема является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда – Пэли (см. [10], т. 2, гл. 15).

Пусть $s \in N^d$ и $\mathcal{T}(\rho(s))$ обозначает множество функций $f(x)$ вида $f(x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,x)}$. Тогда из определения линейного поперечника, теорем Б и В устанавливается следующая лемма.

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \,|\, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\} \tag{1}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(\cdot) \,|\, \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}, \tag{1'}$$

$$(s,r) = s_1 r_1 + \ldots + s_d r_d.$$

Отметим, что в случае $p \in (1, \infty)$ (1) и (1′) можно записать в другом виде. А именно, пусть $k = (k_1, \ldots, k_d)$, k_j — целые числа, $s = (s_1, \ldots, s_d)$, s_j — натуральные числа, $j = \overline{1, d}$. Обозначим

$$\rho(s) = \left\{ k \colon k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j} \right\}$$

и положим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Тогда при $p \in (1, \infty)$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$,

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \,|\, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(\cdot) \,|\, \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}.$$

Напомним, что классы $B^r_{p,\infty}$ совпадают с классами H^r_p [4, с. 189], которые были введены С. М. Никольским.

В дальнейшем будем предполагать, что координаты вектора $r = (r_1, \ldots, r_d)$ упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$, и через $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ обозначим вектор с координатами $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$.

Вектору $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ сопоставим вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$ таким образом: $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$.

Теперь приведем определение линейного поперечника, который был введен В. М. Тихомировым [5].

Пусть W — множество в банаховом пространстве X. Тогда линейный поперечник множества W в пространстве X (обозначается $\lambda_M(W, X)$) определяется согласно формуле

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X,$$

где inf берется по всем действующим в X линейным операторам A, размерность области значений которых не превышает M. Напомним, что линейный поперечник $\lambda_M(W, X)$ связан с поперечником $d_M(W, X)$, введенным А. Н. Колмогоровым [6], неравенством

Лемма 1 [11]. *Пусть* $s \in N^d$, $f(\cdot) \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $M_s \in Z_+$, $M_s \le 2^{(s,1)}$. *Тогда при* $1 < p, q < \infty$ *существует линейный оператор* $\Lambda_{M_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \to \mathcal{T}(\rho(s))$, *размерность области значений которого не превышает* M_s *и такой, что*

$$\left\| f(\cdot) - \Lambda_{M_s} f(\cdot) \right\|_q \asymp \lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}\right) 2^{(s,1)(1/p-1/q)} \| f(\cdot) \|_p. \tag{3}$$

Прежде чем перейти к изложению полученных результатов, отметим, что к настоящему времени имеется большое количество работ, посвященных исследованию линейных поперечников тех или иных функциональных классов. Здесь отметим только работу [11], в которой получены оценки линейных поперечников классов функций многих переменных $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r (определения см., например, в [12]) и имеется соответствующая библиография. Что касается классов $B_{p,\theta}^r$, то нам неизвестны результаты исследования их линейных поперечников как в одномерном, так и многомерном случаях.

Главной целью настоящей работы является получение точных по порядку оценок линейных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q.

II. Основные результаты. Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le 2 \le q < p'$, $r_1 > 1/p$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/p + 1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{(1/2-1/\theta)_+}, \tag{4}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$, $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство. Сначала установим в (4) оценку сверху в предположении, что $1 < p \le 2 \le q < p'$.

По заданному M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и каждому вектору $s \in N^d$ поставим в соответствие числа

$$M_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s, \gamma') \le n, \\ \left[2^{n+\alpha(n-(s,\gamma))}\right], & (s, \gamma') > n, \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое число, которое будет подобрано ниже, и $[a]$ — целая часть числа a.

Оценим $\sum_s M_s$. Воспользовавшись соотношениями [12, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

$$\sum_{(s,\gamma')\le n} 2^{(s,1)} \ll 2^n n^{\nu-1}, \tag{6'}$$

будем иметь

$$\sum_s M_s \le \sum_{(s,\gamma')\le n} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,\gamma')>n} 2^{n+\alpha(n-(s,\gamma))} \ll$$

$$\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^{n+\alpha n} \sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Для функции $f(x) = \sum_s \delta_s(f, x) \in B_{p,\theta}^r$ рассмотрим линейный оператор Λ_M, действующий по формуле из (10) получим

$$\mathcal{J}_2 \le 2^{-n/2-\alpha n/2} 2^{-n(r_1-1/p-\alpha/2)} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-n(r_1-1/p+1/2)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 2^{-n(r_1-1/p+1/2)} \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2}. \tag{12}$$

Из (9), (10), (12) согласно определению линейного поперечника получаем искомую оценку

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2}.$$

Пусть $2 < \theta < \infty$. В этом случае, применив к $\mathcal{J}_2$ сначала неравенство Гельдера, а затем воспользовавшись соотношением (6), будем иметь

$$\mathcal{J}_2 \le 2^{-n/2-\alpha n/2} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1/p-\alpha/2)2\theta/(\theta-2)} \right)^{(\theta-2)/2\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-n/2-\alpha n/2-n(r_1-1/p-\alpha/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le$$

$$\le 2^{-n(r_1-1/p+1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \asymp$$

$$\asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2-1/\theta}. \tag{13}$$

Сопоставив (9), (10), (13), получим оценку

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2-1/\theta}.$$

Наконец, если $\theta = \infty$, то, принимая во внимание, что для $f \in B^r_{p,\infty} = H^r_p$, $\left\| \delta_s(f,x) \right\|_p << 2^{-2(s,r)}$, $s \in N^d$ [12, с. 32], получаем

$$\mathcal{J}_2 << 2^{-n/2-\alpha n/2} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-2(s,\gamma)(r_1-1/p+\alpha/2)} \right)^{1/2} <<$$

$$<< 2^{-n/2-\alpha n/2} 2^{-n(r_1-1/p-\alpha/2)} n^{(\nu-1)/2} =$$

$$= 2^{-n(r_1-1/p+1/2)} n^{(\nu-1)/2} \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2}. \tag{14}$$

И аналогично предыдущим случаям из (9), (10), (14) и определения линейного поперечника получаем оценку

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2}.$$

Для завершения доказательства оценки сверху в (4) осталось рассмотреть случай $p = 1$. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение [13].

Лемма 2. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $\Omega_M = \left\{ k^j \right\}_{j=1}^M \subset Z^d$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$\mathcal{J}_4 = \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_q' \ll 2^{-\alpha l(r_1 - 1 + 1/q)} l^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+}.$$

Подставляя вместо α его значение $\alpha = (r_1 - 1/2)/(r_1 - 1 + 1/q)$, получаем оценку

$$\mathcal{J}_4 \ll 2^{-l(r_1 - 1/2)} l^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+}. \tag{18}$$

Для того чтобы оценить слагаемое $\mathcal{J}_3$, рассмотрим для каждого вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, $l \leq (s, \gamma') < \alpha l$, линейный оператор B_s, действующий согласно формуле

$$B_s \delta_s(f, x) = \delta_s(f, x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}, x) \right) =$$

$$= \left(\sum_{\|s' - s\|_\infty \leq 1} A_{s'}(f, x) \right) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}, x) \right).$$

Далее будем использовать вспомогательное утверждение.

Лемма 3 [3]. *Пусть* $1 \leq p \leq 2 \leq q < p'$. *Тогда норма оператора* B_s, *действующего из* L_p *в* L_q, *удовлетворяет неравенству*

$$\| B_s \|_{p \to q} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \| B_s f \|_q \ll 2^{(s, 1)} N_s^{-(1/2 + 1/p')}.$$

Таким образом, воспользовавшись теоремой Литтлвуда – Пэли, неравенством Минковского и затем применив лемму 3 при $p = 1$, получим

$$\mathcal{J}_3 \ll \left\| \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} \left| \delta_s(f, x) - \left(\delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}, x) \right) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} \left\| \delta_s(f, x) - \left(\delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}, x) \right) \right\|_q^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} \left\| \delta_s(f, x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}, x) \right) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$= \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} \left\| \sum_{\|s' - s\|_\infty \leq 1} A_{s'}(f, x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}, x) \right) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} \| B_s \|_{1 \to q}^2 \left\| \sum_{\|s' - s\|_\infty \leq 1} A_{s'}(f, x) \right\|_1^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} 2^{2(s, 1)} N_s^{-1} \left\| \sum_{\|s' - s\|_\infty \leq 1} A_{s'}(f, x) \right\|_1^2 \right)^{1/2}. \tag{19}$$

$$P(\Omega_M, x) = \sum_{j=1}^{M} e^{i(k^j, x)}$$

и любого $N \le M$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_N, x)$, *содержащий не более* N *гармоник и такой, что*

$$\| P(\Omega_M, x) - P(\Omega_N, x) \|_q << MN^{-1/2},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, *все коэффициенты* $P(\Omega_N, x)$ *равны между собой и не превышают* MN^{-1}.

Итак, пусть $f \in B^r_{1,\theta}$. По заданному M подберем $l \in N$ из соотношений $2^l l^{\nu-1} \asymp M$, $2^l l^{\nu-1} \ge 2M$ и каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, удовлетворяющему условию $l \le (s, \gamma') < \alpha l$, $\alpha = (r_1 - 1/2)/(r_1 - 1 + 1/q)$, поставим в соответствие число

$$N_s = \left[2^{l r_1} 2^{(s, \gamma)(1 - r_1)} \right] + 1.$$

Легко проверить, что $\sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} N_s << M$. Действительно, приняв во внимание, что $r_1 > 1$, и воспользовавшись соотношением (6), получим

$$\sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} N_s << 2^{l r_1} \sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} 2^{-(s, \gamma)(r_1 - 1)} <<$$

$$<< 2^{l r_1} 2^{-l(r_1 - 1)} l^{\nu - 1} = 2^l l^{\nu - 1} \asymp M.$$

Далее, для каждого „блока" $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)}$ подберем тригонометрический полином $t(\Omega_{N_s}, x)$, удовлетворяющий неравенству

$$\left\| t_s(x) - t(\Omega_{N_s}, x) \right\|_q << 2^{(s, 1)} N_s^{-1/2}. \tag{15}$$

При этом, как отмечается в лемме 2, $\Omega_{N_s} \subset \rho(s)$ и все коэффициенты $t(\Omega_{N_s}, x)$ равны между собой.

Рассмотрим оператор Λ_M, действующий на $f \in B^r_{1,\theta}$ согласно формуле

$$\Lambda_M f = t_M(\Omega_M, x) = \sum_{(s, \gamma') < l} \delta_s(f, x) + \sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} \left(t(\Omega_{N_s}, x) * \delta_s(f, x) \right), \tag{16}$$

и убедимся, что он доставляет необходимую оценку сверху для $\lambda_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right)$. Действительно, для $f \in B^r_{1,\theta}$ согласно (16) имеем

$$\| f(x) - \Lambda_M f(x) \|_q = \| f(x) - t_M(\Omega_M, x) \|_q =$$

$$= \left\| \sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} \left(\delta_s(f, x) - \left(t\left(\Omega_{N_s}, x\right) * \delta_s(f, x) \right) \right) + \sum_{(s, \gamma') \ge \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_q \le$$

$$\le \left\| \sum_{l \le (s, \gamma') < \alpha l} \left(\delta_s(f, x) - \left(t\left(\Omega_{N_s}, x\right) * \delta_s(f, x) \right) \right) \right\|_q + \left\| \sum_{(s, \gamma') \ge \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4. \tag{17}$$

Сразу отметим, что слагаемое $\mathcal{J}_4$ оценивается согласно теореме 2 из [14] следующим образом:

Подставив в (19) вместо N_s соответствующие значения из (13), находим

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-lr_1/2}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{2(s,1)}2^{(s,\gamma)(r_1-1)}\left\|\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f,x)\right\|_1^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2^{-lr_1/2}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,\gamma)(r_1-1+2-2r_1)}2^{2(s,r)}\left\|\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f,x)\right\|_1^2\right)^{1/2}. \qquad (20)$$

Для того чтобы продолжить оценку (20), рассмотрим снова 3 случая.

Пусть $1\le\theta\le 2$. Тогда, воспользовавшись неравенством (11) и затем проведя элементарные преобразования, получим

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-lr_1/2}2^{(l/2)(1-r_1)}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,r)\theta}\left\|\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f,x)\right\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-1/2)}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,r)\theta}\left\|\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f,x)\right\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{-l(r_1-1/2)}\left(\sum_{\substack{l\le(s,\gamma')<\alpha l\\ \|s'-s\|_\infty<1}} 2^{(s',r)\theta}\|A_{s'}(f,x)\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-1/2)}\left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f,x)\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \le 2^{-l(r_1-1/2)}\|f\|_{B^r_{1,\theta}} \le 2^{-l(r_1-1/2)}. \qquad (21)$$

Пусть $2<\theta<\infty$. В этом случае, применив в (20) неравенство Гельдера с показателем $\theta/2$, найдем

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-lr_1/2}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,r)\theta}\left\|\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f,x)\right\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \times$$

$$\times\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,\gamma)(1-r_1)\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \qquad (22)$$

и, воспользовавшись соотношением (6), продолжим (22)

$$\ll 2^{-lr_1/2}\|f\|_{B^r_{1,\theta}}2^{-(r_1-1)l/2}l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \le 2^{-l(r_1-1/2)}l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \qquad (23)$$

Наконец, в случае $\theta=\infty$, воспользовавшись соотношением $\|A_{s'}(f,x)\|_1 \ll \ll 2^{-(s',r)}$ [12, с. 32], для $\mathcal{J}_3$ будем иметь оценку

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-lr_1/2}\left(\sum_{l\le(s,\gamma')<\alpha l} 2^{(s,\gamma)(r_1+1)}\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1}\|A_{s'}(f,x)\|_1^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\| f-t\|_2 \geq \| P_n f-t\|_2. \tag{27}$$

Следовательно, из (26) и (27) получаем

$$d_M\left(B^r_{1,\theta}, L_2\right) \geq d_M\left(B^r_{1,\theta} \cap \mathcal{T}_n, L_2 \cap \mathcal{T}_n\right).$$

Далее через K обозначим количество элементов множества Q_n, т. е. $K = |Q_n|$, и заметим, что в силу выбора числа n $|Q_n| \geq 2M$ и $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Пусть $\alpha_1(x),\ldots,\alpha_K(x)$ — некоторая ортонормированная система функций из $\mathcal{T}_n$. Для $k \in Q_n$ запишем разложение экспоненты $e^{i(k,x)}$ по системе $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^K$, т. е.

$$e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{K} a_k^j \alpha_j(x). \tag{28}$$

Тогда в силу ортонормированности функций $e^{i(k,x)}$ и $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$ из (28) имеем

$$\sum_{j=1}^{K} \left|a_k^j\right|^2 = \sum_{k \in Q_n} \left|a_k^j\right|^2 = 1. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим приближение функции $e^{i(k,x)}$, $k \in Q_n$, ее M-й суммой Фурье по системе $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^M$ в метрике L_2. Имеем

$$R_k^2 = \left\| e^{i(k,x)} - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(x)\right\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{K} a_k^j \alpha_j(x) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(x)\right\|_2^2 =$$

$$= \left\| \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(x)\right\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{K} \left|a_k^j\right|^2 \tag{30}$$

и, таким образом, принимая во внимание (29), получаем

$$\sum_{k \in Q_n} R_k^2 = \sum_{k \in Q_n} \sum_{j=M+1}^{K} \left|a_k^j\right|^2 = \sum_{k \in Q_n} \left(\sum_{j=1}^{K} \left|a_k^j\right|^2 - \sum_{j=1}^{M} \left|a_k^j\right|^2 \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{K} \sum_{k \in Q_n} \left|a_k^j\right|^2 - \sum_{j=1}^{M} \sum_{k \in Q_n} \left|a_k^j\right|^2 = K - M \geq \frac{K}{2}. \tag{31}$$

Из (31) заключаем, что существует вектор $s^* = \left(s_1^*,\ldots,s_d^*\right)$, $(s^*,1) = n$, такой, что

$$\sum_{k \in \rho(s^*)} R_k^2 \geq \frac{1}{2}\left|\rho(s^*)\right|. \tag{32}$$

Рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sum_{k \in \rho(s^*)} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1} e^{i(k,x)} \tag{33}$$

и покажем, что $C_3 g_1(x) \in B^r_{1,\theta}$, $C_3 > 0$, $r = (r_1,\ldots,r_1) \in R_+^d$. Действительно, поскольку функция

$$F(x) = \sum_{k>0} \prod_{l=1}^{d} k_l^{-r_1} \cos k_l x_l$$

принадлежит классу H_1^r, $r = (r_1, \ldots, r_1) \in R_+^d$ [12, с. 53], то согласно теореме о характеризации класса H_1^r [12, с. 32]

$$\| A_s(F, x) \| << 2^{-(s,r)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $F(x)$ представима в виде

$$F(x) = 2^{-d} \sum_{k} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1} e^{i(k,x)}, \quad k_j \neq 0, \quad j = \overline{1,d},$$

для $\| g_1 \|_{B_{1,\theta}^r}$ получаем оценку

$$\| g_1 \|_{B_{1,\theta}^r} = \left(\sum_{s} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(g_1, x) \|_1^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{(s^*,r)} \left\| A_{s^*}(g_1, x) \right\|_1 \leq$$

$$\leq C_4 2^{(s^*,r)} \left\| A_{s^*}(F, x) \right\|_1 \leq C_5.$$

Из этого соотношения заключаем, что $C_3 g_1(x) \in B_{1,\theta}^r$, $C_3 = C_5^{-1}$.

Далее, рассмотрим уклонение функции $g_1(x+y)$, $x, y \in \pi_d$, от ее M-й суммы Фурье по системе $\alpha = \left\{ \alpha_j(x) \right\}_{j=1}^K$. Согласно (33) имеем

$$R_M(x, y) = g_1(x+y) - S_M(g_1(x+y), \alpha) = \sum_{k \in \rho(s^*)} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1} e^{i(k,y)} \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(x)$$

и, следовательно,

$$(2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \| R_M(\cdot, y) \|_2^2 \, dy = \sum_{j=M+1}^{K} \sum_{k \in \rho(s^*)} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-2r_1} \left| a_k^j \right|^2. \tag{34}$$

Заметив, что для $k \in \rho(s^*)$

$$\prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-2r_1} \geq \prod_{l=1}^{d} 2^{-s_l^* 2r_1} = 2^{-(s^*,1)2r_1}, \tag{35}$$

и воспользовавшись соотношениями (30) и (32), из (34) и (35) находим

$$(2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \| R_M(\cdot, y) \|_2^2 \, dy \geq 2^{-(s^*,1)2r_1} \sum_{j=M+1}^{K} \sum_{k \in \rho(s^*)} \left| a_k^j \right|^2 =$$

$$= 2^{-(s^*,1)2r_1} \sum_{k \in \rho(s^*)} \sum_{j=M+1}^{K} \left| a_k^j \right|^2 = 2^{-(s^*,1)2r_1} \sum_{k \in \rho(s^*)} R_k^2 \geq 2^{-(s^*,1)2r_1} \frac{\left| \rho(s^*) \right|}{2}.$$

Таким образом, из полученной оценки заключаем, что для некоторого $y^* \in \pi_d$ выполнено неравенство

$$\left\| R_M(\cdot, y^*) \right\|_2^2 >> \frac{1}{2} 2^{-(s^*,1)2r_1} \left| \rho(s^*) \right| \asymp 2^{(s^*,1)} 2^{-(s^*,1)2r_1} = 2^{(s^*,1)(1-2r_1)},$$

т. е.

$$\left\| R_M(\cdot, y^*) \right\|_2 \gg 2^{-\|s^*\|_1 (r_1 - 1/2)} = 2^{-n(r_1 - 1/2)} \asymp \left(M^{-1} \log^{d-1} M \right)^{r_1 - 1/2}. \quad (36)$$

Поскольку система $\left\{ \alpha_j(x) \right\}_{j=1}^{K}$ выбиралась произвольно, то согласно определению колмогоровского поперечника из (36) будем иметь

$$d_M\left(B^r_{1,\theta}, L_2\right) \gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M \right)^{r_1 - 1/2}$$

и, следовательно, при $q \geq 2$

$$\lambda_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right) \geq d_M\left(B^r_{1,\theta}, L_2\right) \gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M \right)^{r_1 - 1/2}.$$

Искомая оценка снизу поперечника $\lambda_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right)$ в случае $1 \leq \theta \leq 2$ установлена.

Для завершения доказательства теоремы осталось оценить снизу поперечник $\lambda_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right)$ в случае $2 < \theta \leq \infty$, $q = 2$. Здесь так же, как и в предыдущем случае, получим сначала соответствующую оценку снизу колмогоровского поперечника $d_M\left(B^r_{1,\theta}, L_2\right)$. При этом будем использовать соотношение, связанное с билинейной аппроксимацией функций вида $f(x-y)$, $x, y \in \pi_d$, $f(x) \in B^r_{1,\theta}$. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, обозначает множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \in \pi_d$, с конечной смешанной нормой

$$\| f(x, y) \|_{q_1, q_2} = \left\| \| f(\cdot, y) \|_{q_1} \right\|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x \in \pi_d$, а затем от результата — по переменной $y \in \pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка M:

$$\tau_M(f)_{q_1, q_2} = \inf_{u_i(x),\, v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1, q_2},$$

где $u_i(x) \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i(y) \in L_{q_2}(\pi_d)$.

Далее, для $f(x) \in L_q(\pi_d)$ обозначим через F_f множество, состоящее из функций $f(x-y)$, получающихся из $f(x)$ сдвигами аргумента на произвольный вектор $y \in \pi_d$. Тогда с помощью несложных рассуждений [12, с. 85] устанавливается, что

$$\tau_M(f(x-y))_{q, \infty} = d_M\left(F_f, L_q\right). \quad (37)$$

Таким образом, как следует из (37), оценками величин $\tau_M(f(x-y))_{q,\infty}$ можно воспользоваться для получения оценок снизу поперечников некоторого функционального класса Φ, которому принадлежит функция $f(x)$, если этот класс инвариантен относительно сдвига аргумента функций.

Этим соображением и воспользуемся ниже.

Рассмотрим функцию

$$F_{r,n}(x) = C_6 n^{-(d-1)/\theta} \sum_{(s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho_+(s)} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_1} \cos k_j x_j,$$

$$\rho_+(s) = \left\{ k \colon 2^{s_j - 1} \leq k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \right\},$$

которая, как установлено в [15], с некоторой постоянной $C_6 > 0$ принадлежит классу $B^r_{1,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_1) \in R^d_+$. Там же, при доказательстве оценки снизу в теореме 6, для функции $F_{r,n}(x)$ получено следующее соотношение:

$$\tau_M\big(F_{r,n}(x-y)\big)_{q,\infty} = \inf_{u_i(x),\, v_i(y)} \left\| F_{r,n}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q,\infty} \gg$$

$$\gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2 - 1/\theta}, \quad 2 \le q < \infty. \tag{38}$$

Таким образом, обозначив через Ψ множество функций, порожденное функцией $F_{r,n}(x)$ с помощью сдвигов ее аргумента на $y \in \pi_d$, и воспользовавшись равенством (37), а затем оценкой (38) при $q = 2$, будем иметь

$$d_M\big(B^r_{1,\theta}, L_2\big) \ge d_M(\Psi, L_2) = \tau_M\big(F_{r,n}(x-y)\big)_{2,\infty} \gg$$

$$\gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2 - 1/\theta}.$$

Из полученной оценки и соотношения между линейным и колмогоровским поперечниками следует оценка снизу поперечника $\lambda_M\big(B^r_{1,\theta}, L_2\big)$:

$$\lambda_M\big(B^r_{1,\theta}, L_2\big) \ge d_M\big(B^r_{1,\theta}, L_2\big) \gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2 - 1/\theta}.$$

Теорема 1 полностью доказана. Сделаем несколько замечаний.

В первую очередь заметим, что в процессе доказательства теоремы 1 нами установлено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $2 \le q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$d_M\big(B^r_{1,\theta}, L_q\big) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{(1/2 - 1/\theta)_+}.$$

Эта оценка дополняет результат из [16], в котором получен порядок поперечника $d_M\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big)$, $1 < p \le 2 \le q < \infty$. Соответствующие результаты для поперечников $d_M\big(W^r_{1,\alpha}, L_q\big)$ и $d_M\big(H^r_1, L_q\big)$ ранее установлены В. Н. Темляковым [12, с. 69 – 76].

Отметим также, что утверждения, соответствующие теореме 1, для классов $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p доказаны Э. М. Галеевым в [11], где установлены точные порядки величин $\lambda_M\big(W^r_{p,\alpha}, L_q\big)$ и $\lambda_M\big(H^r_p, L_q\big)$, $1 < p \le 2 \le q < p'$. При этом поперечники $\lambda_M\big(W^r_{1,\alpha}, L_q\big)$ и $\lambda_M\big(H^r_1, L_q\big)$, по-видимому, не были исследованы. Сформулируем соответствующие утверждения.

Полагая в теореме 1 $\theta = \infty$, получаем такие следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть* $2 \le q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$\lambda_M\big(H^r_1, L_q\big) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2}. \tag{39}$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $2 \le q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$\lambda_M\big(W^r_{1,\alpha}, L_q\big) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/2} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/2}.$$

Оценка снизу в этом соотношении следует из оценки колмогоровского поперечника $d_M\big(W^r_{1,\alpha}, L_q\big)$ [12, с. 69], а сверху — из оценки (39) в силу вложения $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$ [12, с. 62].

В заключение заметим, что из сопоставления результата теоремы 1 и ранее полученных оценок колмогоровских поперечников $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$ [16] следует соотношение

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \asymp d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right),$$

$$1 \le p \le 2 \le q < p', \quad r_1 > \frac{1}{p}, \quad 1 \le \theta \le \infty.$$

1. *Романюк А. С.* О колмогоровских поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных малой гладкости в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 915 – 926.
2. *Романюк А. С.* О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 79 – 92.
3. *Романюк А. С.* Тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ функций многих переменных в пространстве L_q // Там же. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1089 – 1097.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Kolmogoroff A.* Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107 – 111.
7. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 2. – С. 180 – 189.
8. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l^n_2 в l^m_2 // Изв. АН Арм ССР. Математика. – 1980. – **15**, № 5. – С. 379 – 394.
9. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}^r_p$ и $\tilde{H}^r_p$ в пространстве $\tilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.
11. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 189 – 199.
12. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
13. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вест. Моск. ун-та. Мат. и мех. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
14. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
15. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Там же. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097 – 1111.
16. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Там же. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663 – 675.

Получено 07.07.99