УДК 519.41/47

Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова (Сум. пед. ун-т)

ПРО НЕСКІНЧЕННІ ГРУПИ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ НОРМИ НЕСКІНЧЕННИХ ПІДГРУП

We study the relation between a norm $N_G(\infty)$ of infinite subgroups of an infinite group G and the structure of this group. We prove that $N_G(\infty)$ is Abelian in the nonperiodic case and a locally finite group is a finite extension of quasicyclic subgroup if $N_G(\infty)$ is a non-Dedekind group. In both cases, we establish the structure of the group G under condition that the subgroup $N_G(\infty)$ possesses a finite index in G.

Вивчається зв'язок між нормою $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп нескінченної групи G та будовою цієї групи. Доведено, що в неперіодичному випадку $N_G(\infty)$ — абелева, а локально скінченна група є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи, якщо $N_G(\infty)$ — недедекіндова група. В обох випадках встановлено будову групи G за умови, що підгрупа $N_G(\infty)$ має в G скінченний індекс.

Нехай G — група, H — її підгрупа і Σ — деяка непорожня система підгруп групи G. Будемо говорити, що підгрупа H нормалізує систему підгруп Σ, якщо H міститься у нормалізаторі кожної підгрупи системи Σ.

Максимальну підгрупу, що нормалізує систему підгруп Σ, будемо називати Σ-нормою групи. Очевидно, Σ-норма групи збігається з перетином нормалізаторів усіх підгруп системи Σ. У випадку, коли систему Σ складають всі підгрупи групи, Σ-норму коротко будемо називати нормою групи.

Поняття норми групи введено Р. Бером [1]. Норма вивчалась і узагальнювалась різними авторами. Зокрема, В. Каппе [2] досліджував A-норму групи, коли систему підгруп Σ складають всі максимальні абелеві підгрупи групи. У роботах [3, 4] введено поняття нециклічної норми групи. Так називаємо Σ-норму групи за умови, що систему підгруп Σ складають всі нециклічні підгрупи групи.

У цій роботі досліджується ще одне узагальнення поняття норми. Нехай Σ — система нескінченних підгруп нескінченної групи G. Підгрупу, що нормалізує кожну нескінченну підгрупу групи G, назвемо нормою нескінченних підгруп групи G і позначатимемо $N_G(\infty)$. Зрозуміло, що підгрупа $N_G(\infty)$ характеристична в G і кожна нескінченна підгрупа з $N_G(\infty)$ нормальна в ній. Деякі результати цієї роботи анонсовані в [5].

Якщо $N_G(\infty) = G$, то у групі G нормальні всі нескінченні підгрупи. Нескінченні неабелеві групи, всі нескінченні підгрупи яких нормальні, вивчались С. М. Черніковим у [6] і були названі там INH-групами. С. М. Черніков встановив, що INH-група за умови існування в ній нескінченної абелевої підгрупи є або нескінченною гамільтоновою групою, або неабелевою негамільтоновою групою, що є скінченним дедекіндовим розширенням квазіциклічної групи ([7], теорема 6.10).

Розглянемо більш загальну ситуацію, коли $N_G(\infty) \subseteq G$.

Теорема 1. *У неперіодичній групі G норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп абелева і збігається з центром групи, якщо вона є неперіодичною підгрупою.*

Доведення. Справді, якщо підгрупа $N_G(\infty)$ неперіодична, то вона абелева [6], тому що в ній нормальні всі нескінченні підгрупи. Покажемо, що в цьому випадку $N_G(\infty) = Z(G)$. Очевидно, що $Z(G) \subseteq N_G(\infty)$. Нехай $a \in N_G(\infty)$, $x \in G$ і $[a, x] \neq 1$.

***Наслідок* 5.** *Група G без скруту, в якій норма нескінченних підгруп має скінченний індекс, абелева.*

Перейдемо до розгляду норми нескінченних підгруп у періодичних групах. Оскільки будь-яка група Шмідта (нескінченна група, всі власні підгрупи якої скінченні) водночас є нормою своїх нескінченних підгруп, то періодичні групи будуть вивчатись за певних обмежень.

Відповідь на питання про будову локально скінченної групи, якщо її норма нескінченних підгруп є недедекіндовою INH-групою, дає наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп нескінченної локально скінченної групи G є недедекіндовою INH-групою, то група G є скінченним розширенням квазіциклічної групи, яка є повною частиною норми $N_G(\infty)$.*

Доведення. Нехай норма $N_G(\infty)$ нескінченної локально скінченної групи G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P. Припустимо, що G містить нескінченну абелеву підгрупу A, всі силовські підгрупи якої мають просту експоненту. Розглянемо підгрупу $G_1 = AN_G(\infty)$. Нехай $N_G(\infty) = PF$, де F — скінченна підгрупа, породжена представниками всіх суміжних класів групи $N_G(\infty)$ за підгрупою P, взятих по одному з кожного класу. Тоді $A \lhd \lhd G_1$, $AF \lhd G_1$ як нескінченні підгрупи, що нормалізуються підгрупою $N_G(\infty)$ і $G_1' \subset AF \cap N_G(\infty)$. Оскільки $|AF \cap N_G(\infty)| < \infty$, то $|G_1'| < \infty$ і G_1 — локально нормальна група. Підгрупа P міститься у централізаторі будь-якої скінченної нормальної підгрупи групи G_1, тому $P \subset Z(G_1)$. Аналогічно отримаємо $C_A(FG_1') \subset Z(G_1)$. Тому $PC_A(FG_1') \subset Z(G_1)$ і $|G_1/Z(G_1)| < \infty$. Отже, норма нескінченних підгруп групи G_1 має скінченний індекс у G_1 і не задовольняє умову мінімальності. За результатами С. М. Чернікова [6] підгрупа G_1 дедекіндова, що суперечить умові.

Таким чином, група G задовольняє умову мінімальності для абелевих, а тому і для всіх підгруп [9].

Припустимо, що G містить прямий добуток $P \times P_1$, де P_1 — теж квазіциклічна підгрупа. Розглянемо групу $G_2 = P_1 N_G(\infty)$, в якій $P_1 \lhd G_2$, $G_2' \subset PF \cap \cap P_1 F$, $|G_2'| < \infty$. Тому $P \times P_1 \subset Z(G_2)$ і $|G_2/Z(G_2)| < \infty$. Звідси випливає, що норма $N_{G_2}(\infty)$ нескінченних підгруп групи G_2 має в ній скінченний індекс і містить підгрупу $P \times P_1$. Підгрупа $N_{G_2}(\infty)$ дедекіндова [6], тому що $N_G(\infty) \subseteq N_{G_2}(\infty)$. Отже, G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи P. Тому $|G/N_G(\infty)| < \infty$ і теорему доведено.

У теоремі 3 відмовитись від недедекіндовості норми $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп не можна, що підтверджує наступний приклад.

***Приклад* 2.** $G = P \times P_1 \langle c \rangle$, де P і P_1 — квазіциклічні p-групи ($p \neq 2$); $|c| = 2$, $c^{-1}bc = b^{-1}$ для будь-якого елемента $b \in P_1$.

У цій групі $N_G(\infty) = P$, тому що $P\langle c \rangle = N_G(P\langle c \rangle)$, $P\langle bc \rangle = N_G(P\langle bc \rangle)$ і $P\langle bc \rangle \cap P\langle c \rangle = P$ при $b \neq 1$. Водночас група G не є скінченним розширенням групи P.

Далі будемо вивчати в загальному випадку будову локально скінченної групи за умови, що її норма нескінченних підгруп має скінченний індекс.

Теорема 4. *Нескінченна локально скінченна група G задовольняє умову мінімальності для підгруп, якщо вона нескінченна над центром $Z(G)$ і скінченна над нормою $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп.*

група групи G і кожний елемент з $G \setminus C_G(A)$ індукує на A незвідний автоморфізм.

Доведення. Нехай група G задовольняє умову теореми. За теоремою 4 група G черніковська і є скінченним розширенням повної абелевої підгрупи A, тобто $G = AH$, $|H| < \infty$. Припустимо спочатку, що $A = A_p \times A_{p'}$, де $A_p \neq E$, $A_{p'} \neq E$. Зрозуміло, що $A_p H \lhd G$, $A_{p'} H \lhd G$ і $A_p H \cap A_{p'} H = H \lhd G$. З цього випливає, що централізатор $C_A(H) \subset Z(G)$ і має у G скінченний індекс, що суперечить умові. Отже, A є p-групою для деякого простого числа p.

Припустимо, що A містить власну нескінченну нормальну в G підгрупу B. Тоді $BH \lhd G$ і G/BH — повна абелева група. За теоремою 1.16 з [7] маємо $G = A_1 BH$, де $A_1 \subset Z(G)$ і $|A_1 \cap BH| < \infty$. Але у такому випадку $|A_1 H \cap \cap BH| < \infty$ і $|G/Z(G)| < \infty$, що неможливо. Таким чином, A — мінімальна нескінченна нормальна в G підгрупа.

Покажемо, що кожний елемент $x \in G \setminus C_G(A)$ діє на A незвідно ([7], означення 5.2). Розглянемо підгрупу $G_1 = A\langle x \rangle$, де $x \in G \setminus C_G(A)$, і припустимо, що A має власну нескінченну x-допустиму підгрупу B. Аналогічно з попередніми міркуваннями маємо $G_1 = A_1 B \langle x \rangle$, де $A_1 \subset Z(G_1)$ і $|A_1\langle x \rangle \cap B\langle x \rangle| < \infty$. Але тоді $C_{G_1}(A_1\langle x \rangle \cap B\langle x \rangle)$ має в G_1 скінченний індекс, тобто $A \subset C_{G_1}(x)$, що неможливо. Теорему доведено.

Теорема 7. *У неперіодичній або локально скінченній групі G норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп тоді і тільки тоді має скінченний індекс, коли група G або скінченна над центром, або її центр скінченний і вона є скінченним розширенням прямого добутку A скінченного числа квазіциклічних p-груп за одним і тим же p, причому A — мінімальна повна нескінченна нормальна підгрупа групи G і кожний елемент з групи G, що не належить централізатору підгрупи A, індукує на A незвідний автоморфізм.*

Доведення. *Необхідність* умов теореми доведено у попередніх теоремах. Доведемо їх *достатність*. Нехай група G задовольняє умову теореми і має скінченний центр. Розглянемо довільну нескінченну підгрупу B групи G.

Якщо підгрупа B — абелева, то її можна подати у вигляді прямого добутку $B = B_1 \times B_2$, де B_1 — повна частина групи B, $B_2 \subset C_G(A)$ і $N_G(B) \supset A$.

Нехай B — нескінченна неабелева підгрупа групи G. За такої умови B містить нескінченну повну підгрупу $A_1 \subset A$. Якщо $A_1 \subset Z(B)$, то $B \subset C_G(A)$ і $A \subset N_G(B)$. Припустимо, що $A_1 \not\subset Z(G)$. Тоді $A_1 = A$, тому що кожний елемент групи G, що не належить підгрупі $C_G(A)$, визначає на A незвідний автоморфізм. Отже, і в цьому випадку $A \subset N_G(B)$. Таким чином, $A \subset N_G(\infty)$ і $|G/N_G(\infty)| < \infty$. Теорему доведено.

Розглянемо ще ряд прикладів, які ілюструють ті чи інші властивості норми нескінченних підгруп групи.

***Приклад* 3.** $G = A \times B$, де A — нескінченна абелева підгрупа, B — неабелева підгрупа порядку pq (p, q — різні прості числа).

Легко перевірити, що $N_G(\infty) = A = Z(G)$.

***Приклад* 4.** $G = (P_1 \times P_2) \leftthreetimes \langle c \rangle$, де $P_1 = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$, $P_2 = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ — квазіциклічні 2-групи, $|a_i| = |b_i|$, $|c| = 3$, $c^{-1} a_i c = b_i$, $c^{-1} b_i c = a_i^{-1} b_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

У цій групі $Z(G) = E$, $N_G(\infty) = P_1 \times P_2$ — повна підгрупа.

***Приклад* 5.** $G = P \times Q \times B$, де P — квазіциклічна r-група, Q — група кватерніонів, B — неабелева підгрупа порядку pq (p, q — різні прості числа і $(pq, 2r) = 1$).

У цьому випадку $N_G(\infty) = P \times Q$ — гамільтонова група при $r \neq 2$ і негамільтонова нільпотентна INH-група при $r = 2$.

***Приклад* 6.** $G = (P \leftthreetimes \langle b \rangle) \times (\langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, де P — квазіциклічна r-група, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in P$, $[c, d] \neq 1$, $|c| = p$, $|d| = q$, p, q — прості числа і $(pq, 2r) = 1$.

У цій групі $N_G(\infty) = P \leftthreetimes \langle b \rangle$ — ненільпотентна INH-група. Справді, якщо K — нескінченна підгрупа групи G і $q \notin \pi(K)$, то $K \lhd G$. Якщо $q \in \pi(K)$ і $K \neq G$, то $N_G(K) \supset P \leftthreetimes \langle b \rangle$. Оскільки підгрупи $K_1 = P \leftthreetimes \langle b \rangle \langle d \rangle$ і $K_2 = P \leftthreetimes \langle b \rangle \langle cd \rangle$ збігаються зі своїми нормалізаторами, причому $K_1 \cap K_2 = P \leftthreetimes \langle b \rangle$, то норма нескінченних підгруп є ненільпотентною INH-групою. При цьому $Z(G) = E$ при $r \neq 2$ і $|Z(G)| = 2$ при $r = 2$.

1. *Baer R.* Der Kern, eine Charakteristische Unter-gruppe // Comp. Math. – 1934. – **1**. – S. 254–283.
2. *Kappe W.* Die A-Norm einer Gruppe // Ill. J. Math. – 1961. – **5**, № 2. – S. 187–197.
3. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // III Междунар. конф. по алгебре (памяти М. И. Каргаполова): Тез. докл. – Красноярск, 1993. – С. 207.
4. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 678–684.
5. *Ліман Ф. М.* Про норму нескінченних підгруп групи // Збірник матеріалів 7 Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 1998. – С. 283.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 1. – С. 111–131.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп – М.: Наука, 1980. – 384 с.
8. *Newman B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, № 1. – S. 76–96.
9. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**. – С. 579–615.

Одержано 01.07.99