УДК 517.919

А. А. Кубічка, І. О. Парасюк (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

БІФУРКАЦІЯ ГЛАДКОЇ У СЕНСІ ВІТНІ СІМ'Ї КОІЗОТРОПНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ГАМІЛЬТОНОВОЇ СИСТЕМИ ПРИ МАЛІЙ ДЕФОРМАЦІЇ СИМПЛЕКТИЧНОЇ СТРУКТУРИ

We investigate the influence of small deformations of symplectic structure and perturbations of Hamiltonian on the behavior of a completely integrable Hamiltonian system. We show that, near certain submanifold of the phase space, a Whitney-smooth family of coisotropic invariant tori of perturbed system appears.

Досліджується вплив малих деформацій симплектичної структури та збурень гамільтоніана на поведінку цілком інтегровної гамільтонової системи. Показано, що поблизу певного підбагатовиду фазового простору виникає гладка в сенсі Вітні сім'я коізотропних інваріантних торів збуреної системи.

1. Вступ. У цій статті на якісно новому рівні досліджується ефект виникнення коізотропних інваріантних торів при деформації симплектичної структури та збуренні гамільтоніана цілком інтегровної гамільтонової системи. Аналізу цього явища було присвячено роботу [1]. Нагадаємо суть проблеми. Нехай (M, ω_0^2) — $2n$-вимірний симплектичний багатовид із симплектичною структурою ω_0^2, а $\mathcal{H}_0 : M \mapsto \mathbf{R}$ — гамільтоніан цілком інтегровної (у сенсі Ліувілля) системи. Припустимо, що ця система зазнає збурень вигляду

$$\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1, \qquad \omega_0^2 \mapsto \omega_0^2 + \mu\omega_1^2,$$

при яких деформується не лише гамільтоніан, але й симплектична структура. У порівнянні зі стандартною КАМ-теорією у цій ситуації нові ефекти можливі лише у випадку, коли замкнена 2-форма ω_1^2 не є глобально точною. Саме такий випадок досліджувався в [1], де було введено поняття багатовиду квазістаціонарних точок і встановлено, що за певних умов, внаслідок описаного вище типу збурень, поблизу такого багатовиду з'являється досить масивна канторова множина коізотропних інваріантних торів деформованої системи. Мета даної роботи полягає в тому, щоб показати, що ці тори утворюють гладку в сенсі Вітні сім'ю, а зазначену канторову множину можна виділити у фазовому просторі за допомогою зліченного набору нерівностей, у яких фігурують гладкі функції. В КАМ-теорії лагранжевих торів такі результати одержано Ю. Пошелем [2]. Особливістю розглядуваного випадку є та обставина, що коізотропні інваріантні тори збуреної системи мають майже вироджений тип — серед базисних частот квазіперіодичних рухів є частоти, пропорційні малому параметру.

Коротко охарактеризуємо структуру роботи. У п. 2 описано умови, які повинні задовольняти незбурена система та 2-форма ω_1^2. У п. 3 проведено попередні перетворення збуреного гамільтоніана, які використовують техніку симплектичного усереднення за кутовими змінними з одночасним згладжуванням відповідних відображень у резонансних областях. У п. 4 наведено допоміжну теорему типу КАМ. Основний результат роботи міститься у п. 5.

2. Основні припущення. Нехай $\{F_i : M \mapsto \mathbf{R}\}_{i=1}^n$ — повний інволютивний набір перших інтегралів незбуреної системи. Розглянемо відображення $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \mapsto \mathbf{R}^n$ і припустимо, що $c \in F(M)$ — таке некритичне значення, для якого $F^{-1}(c)$ містить зв'язну компактну компоненту M_c. Тоді M_c є лагранжевим підбагатовидом, дифеоморфним n-вимірному тору $T^n = \mathbf{R}^n/2\pi\mathbf{Z}^n = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \mid \bmod 2\pi\}$ [3]. Більше того, в $\mathbf{R}^n$ існує однозв'язна область $G \subset F(M)$ значень c з вказаною властивістю, а на множині $N = \bigcup_{c \in G} M_c$ визначена вільна симплектична дія тора T^n, яка задається абелевою групою симплектоморфізмів $\{\Phi^q : N \mapsto N\}_{q \in T^n}$ і орбітами якої є багатовиди $M_c \subset N$.

Припускаємо, що функція $\mathcal{H}_0$ та 2-форма ω_1^2 задовольняють ті ж умови, що й в [1]. Для того щоб їх охарактеризувати, обчислимо усереднену форму $\overline{\omega}_1^2 = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} (\Phi^q)^* \omega_1^2 dq$, для кожного $a \in \mathbf{R}^n$ визначимо векторне поле $X_a(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi^{at}(x)$ і введемо кососиметричну білінійну форму $C(a, b) = \overline{\omega}_1^2(X_a, X_b)$, $a, b \in \mathbf{R}^n$.

***Припущення* 1.** $\dim \ker C = k_0 \neq 0$.

Нехай $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k_0}\}$ — базис в $\ker C$.

***Припущення* 2.** $\exists \gamma_0 > 0 \ \forall \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\} \ \max_{1 \le i \le k_0} |\langle \mathbf{m}, \sigma_i \rangle| \ge \gamma_0 |\mathbf{m}|^{-n}$.

Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартний скалярний добуток в координатному векторному просторі (сума добутків компонент), $|\mathbf{m}| := \max_{1 \le i \le n} |m_i|$. Як і в [1], спираючись на теорему Дарбу – Вейнстейна [4] і результати Ю. Мозера [5], введемо в N координати прямого добутку $(p, q \mid \bmod 2\pi)$, $(p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n))$ типу дія-кут, в яких збурений гамільтоніан і дужка Пуассона відповідно набирають вигляду

$$H = H_0(p) + \mu H_1(p, q; \mu), \tag{1}$$

$$\{p_i, p_j\} = \mu c_{ij}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

(тут і надалі всі невиписані елементи дужки Пуассона вважаються тотожно рівними нулю). Введемо такі позначення: $D_R^n = \{x \in \mathbf{C}^n : |x| < R\}$, $\Pi_R^n = \{x \in \mathbf{C}^n : |\operatorname{Im} x| < R\}$, $B_R^n := \operatorname{Re} D_R^n$, де $R > 0$.

***Припущення* 3.** Для деякого $R_0 > 0$ функції H_0 та H_1 — дійсно-аналітичні відповідно в $D_{R_0}^n$ та $D_{R_0}^n \times \Pi_{R_0}^n \times D_{R_0}^1$.

Нехай C — лінійний оператор в координатному просторі $\mathbf{R}^n$ з матрицею $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Неважко бачити, що функції $J_i(p) = \langle p, \sigma_i \rangle$, $i = 1, \ldots, k_0$, утворюють повний набір функцій Казіміра пуассонової структури в $\mathbf{R}^n$, заданої рівностями $\{p_i, p_j\} = c_{ij}$. Спільна поверхня рівня цих функцій є $(n - k_0)$-вимірним афінним підпростором, який є симплектичним листком максимальної вимірності зазначеної пуассонової структури в $\mathbf{R}^n$.

Позначимо через Y_{p_*} обмеження пуассонового векторного поля $X := C \operatorname{grad} H_0$ на симплектичний листок, що проходить через точку p_*.

Означення 1. *Точку p_* будемо називати невиродженою квазістаціонарною точкою еліптичного типу, якщо $X(p_*) = 0$, а оператор DY_{p_*} лінійної частини векторного поля Y_{p_*} в точці p_* має суто уявні і попарно різні власні числа.*

***Припущення* 4.** Точка $p_* = 0$ є невиродженою квазістаціонарною точкою еліптичного типу.

Якщо виконується це припущення, то за теоремою про неявну функцію в деякому околі початку координат в $\mathbf{R}^n$ невироджені квазістаціонарні точки еліптичного типу утворюють k_0-вимірний дійсно-аналітичний багатовид, який можна задати у параметричному вигляді $p = p_0(\eta)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{k_0}) \in \mathcal{U}$, де $\mathcal{U}$ — деяка однозв'язна область в $\mathbf{R}^{k_0}$, що містить точку $\eta = 0$. При цьому можна вважати, що $p_0(0) = 0$, а власні числа оператора $DY_{p_0(\eta)}$ мають вигляд $\pm i\lambda_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m := (n - k_0)/2$, де $\lambda_j(\cdot): \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}$ — дійсно-аналітичні функції з властивістю: $\lambda_i(\eta) \neq \lambda_j(\eta)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$, $\eta \in \mathcal{U}$. Надалі будемо вважати, що $\sup_{\eta \in \mathcal{U}} |p_0(\eta)| := R_1 < R_0$. Поклавши $\Lambda_j(\eta) = \partial H_0(p_0(\eta))/\partial\eta_j$, $j = 1, \ldots, k_0$, припустимо, нарешті, що виконується умова невиродженості Рюссмана [6].

***Припущення* 5.** Функції $\Lambda_1(\eta), \ldots, \Lambda_{k_0}(\eta)$, $\lambda_1(\eta), \ldots, \lambda_m(\eta)$ лінійно незалежні в $\mathcal{U}$.

3. Допоміжна теорема. Перш ніж застосувати КАМ-теорію для встановлення існування квазіперіодичних рухів збуреної системи, останню в околі багатовиду квазістаціонарних точок необхідно звести до спеціального вигляду. У роботі [1] відповідне перетворення координат було побудовано лише для певних нерезонансних значень параметрів η, які, зокрема, виділялися умовою: вектор частот незбуреної системи не належить множині

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^n(T, \gamma, \tau, \varepsilon) := \bigcup_{0 < |\mathbf{m}| \leq N} \left\{ \omega\ \mathbf{C}^n : |\langle \mathbf{m}, \omega \rangle| < \gamma |\mathbf{m}|^{-\tau} \right\}$$

при $N = T|\ln\varepsilon|$ і досить малих значеннях $\varepsilon > 0$. Зараз покажемо, що це перетворення можна довизначити до гладкого і в резонансній області. Згладжувати заміни змінних методу усереднення в резонансних областях, мабуть, вперше запропонував Т. Касуга [7]. Ця ідея успішно використовувалась також в роботах [8 – 10].

Теорема 1. *Нехай* $l \in \mathbf{N}$, $R > 0$, $\tau > 0$, $\gamma > 0$, $\rho \in (0, \min(R_1, R/2))$ — *довільні числа. Тоді числа* $T = T(\rho, l) > 0$, $\mu_0 = \mu_0(R, \rho, \tau, \gamma, l) > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(R, \rho, \tau, \gamma, l) > 0$ *можна вибрати так, щоб при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *існувала заміна змінних* $(p, q \mid \operatorname{mod} 2\pi) \mapsto (I, J, \varphi \mid \operatorname{mod} 2\pi, \psi \mid \operatorname{mod} 2\pi)$, $I = (I_1, \ldots, I_m)$, $J = (J_1, \ldots, J_{k_0})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, *яка залежить від параметрів* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{k_0})$, *задається у вигляді*

$$p = p_0(\eta) + \mu P_\varepsilon(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta, \sqrt{\mu}),$$

$$q = \psi + \Psi(I, \varphi; \xi, \eta) + \mu Q_\varepsilon(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta, \sqrt{\mu})$$

і має такі властивості:

1) *функція* $\Psi : D_\rho^m \times \Pi_\rho^m \times (B_R^m \setminus B_{2\rho}^m) \times \mathcal{U} \mapsto \mathbf{C}^n$ — *дійсно-аналітична і обмежена*;

2) *функції*

$$P_\varepsilon, Q_\varepsilon : D_\rho^m \times D_\rho^{k_0} \times \Pi_\rho^m \times \Pi_\rho^n \times (B_R^m \setminus B_\rho^m) \times \mathcal{U} \times B^1_{\sqrt{\mu_0}} \mapsto \mathbf{C}^n$$

— *гладкі (в сенсі дійсного аналізу) і рівномірно щодо* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *обмежені; таку ж властивість має будь-яка частинна похідна довільного порядку кожної з цих функцій*;

3) *гамільтоніан збуреної системи в нових координатах має вигляд*

$$\langle \Lambda(\eta), J\rangle + \mu[\langle \lambda(\eta), J\rangle + G_1(J;\eta)] + \sum_{j=3}^{2(l+2)} \mu^{j/2} G_{\varepsilon j}(I, J; \xi, \eta) +$$

$$+ g_{\varepsilon l}(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta, \sqrt{\mu}), \tag{3}$$

в якому всі доданки — гладкі рівномірно щодо $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *обмежені в області визначення* $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$. *На підмножині, яка виділяється з цієї області умовами*

$$\Omega(\eta) := \sum_{j=1}^{k_0} \Lambda_j(\eta)\sigma_j \notin \mathfrak{R}^n(T, \gamma/2, \tau, \varepsilon),$$

$$\lambda(\eta) \notin \mathfrak{R}^m(T, \gamma/2, \tau, \varepsilon), \tag{4}$$

функції $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$, *а також всі доданки гамільтоніана дійсно-аналітичні, причому* $g_{\varepsilon l}$ *задовольняє умову*

$$|g_{\varepsilon l}| \le \mu^{l+2} + \varepsilon^{l+2};$$

4) *дужка Пуассона в нових координатах має вигляд*

$$\{\varphi_i, I_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m; \quad \{\psi, J_j\} = \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, k_0;$$

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \nu_{ij}(\eta), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де функції $\nu_{ij}(\eta)$ *— дійсно-аналітичні в* $\mathcal{U}$.

Доведення. На першому етапі застосуємо процедуру симплектичного усереднення збуреного гамільтоніана за кутовими змінними q до членів порядку μ^{l+3} включно. Спочатку зробимо перетворення вигляду $p \mapsto p_0 + \sqrt{\mu}\, p - \mu \dfrac{\partial S_1(q; p_0)}{\partial q}$, в якому p_0 — n-вимірний параметр з областю зміни $D^n_{R_1}$, а $S_1(q; p_0)$ — функція, яка підлягає визначенню. Після цього збурену систему можна розглядати як гамільтонову відносно дужки Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = \sqrt{\mu}\, c_{ij}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

з гамільтоніаном вигляду

$$H_0'(p_0)\, p + \sqrt{\mu}\left[H_1(p_0, q; 0) - \overline{H}_1(p_0) - \left\langle \frac{\partial S_1(q; p_0)}{\partial q}, H_0'(p_0)\right\rangle + \frac{1}{2} H_0''(p_0) p^2\right] + O(\mu),$$

де $\overline{H}_1(p)$ — середнє значення $H_1(p, q, 0)$ по тору T^n. Ми використали очевидний факт: вигляд гамільтонової системи не зміниться, якщо дужку Пуассона домножити на $\sqrt{\mu}$, гамільтоніан — на $\mu^{-1/2}$ і після цього відняти від нього $\mu^{-1/2} H_0(p_0) + \sqrt{\mu}\, \overline{H}_1(p_0)$.

Якщо вибрати $T = T(R_1, l) > 0$ досить великим і покласти $N = |\ln \varepsilon^T|$, то

$$H_1(p_0, q, 0) - \overline{H}_1(p_0) = \sum_{0 < |\mathrm{m}| \le N} H_{1,\mathrm{m}}(p_0) e^{i\langle \mathrm{m}, q\rangle} + R_N H_1(p_0, q, 0)$$

і при цьому $|R_N H_1(p_0, q, 0)| < \varepsilon^{l+3}$ при $|p_0| < R_1$, $|\operatorname{Im} q| < R_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де $\varepsilon_0 > 0$ — досить мале [11].

Нехай $\kappa(\cdot) : [0, \infty) \mapsto [0, 1]$ — гладка функція, тотожно рівна 0 на $[0, 1/2]$ і 1 на $[0, \infty)$. Покладемо

$$S_1(q; p_0) = \sum_{0<|\mathbf{m}|\le N} \frac{\kappa\left(|\mathbf{m}|^\tau \left|\left\langle \mathbf{m}, H_0'(p_0)\right\rangle\right| / \gamma\right)}{i\left\langle \mathbf{m}, H_0'(p_0)\right\rangle} H_{1,\mathbf{m}}(p_0) e^{i\langle \mathbf{m}, q\rangle}.$$

Тоді в області нерезонансних значень p_0, які задовольняють умову

$$H_0'(p_0) \notin \mathfrak{R}^n\left(T, \frac{\gamma}{2}, \tau, \varepsilon\right), \tag{7}$$

гамільтоніан набирає вигляду

$$H_0'(p_0)p + \frac{\sqrt{\mu}}{2} H_0''(p_0)p^2 + \sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{j/2} \tilde{H}_j(p, q; p_0) + O\left(\mu^{l+3} + \sqrt{\mu}\, \varepsilon^{l+3}\right),$$

де, зокрема,

$$\tilde{H}_2 = \frac{\partial H_1}{\partial p} p - \left\langle H_0''(p_0)p, \frac{\partial S_1}{\partial q} \right\rangle.$$

Використовуючи техніку оцінок тригонометричних сум з малими знаменниками [11 – 13], неважко встановити в області $|p_0| < R_1$, $|\operatorname{Im} q| < R_1$ рівномірні щодо $\varepsilon \in (0, 1)$ оцінки для функції S_0 та її частинних похідних довільного порядку (деталі див. у [14]).

Процедуру симплектичного усереднення гамільтоніана в нерезонансній області будемо проводити за допомогою інфінітезимальної твірної функції вигляду $\sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{j/2} S_j(p, q; p_0)$. Приймаючи її за гамільтоніан, утворимо відповідну гамільтонову систему:

$$\dot{p} = -\sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{j/2} \frac{\partial S_j(p, q; p_0)}{\partial q} + \sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{(j+1)/2} C \frac{\partial S_j(p, q; p_0)}{\partial q},$$

$$\dot{q} = \sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{j/2} \frac{\partial S_j(p, q; p_0)}{\partial p}.$$

Припустимо, що функції $S_j(p, q; p_0)$ дійсно-аналітичні щодо p, q. Тоді перетворення зсуву вздовж траєкторій цієї системи за одиницю часу має вигляд збіжних в околі $\mu = 0$ степеневих рядів і зображується у вигляді

$$p \mapsto p - \sum_{j=2}^{\infty} \mu^{j/2} \left(\frac{\partial S_j(p, q; p_0)}{\partial q} + R_j \right),$$

$$q \mapsto q + \sum_{j=2}^{\infty} \mu^{j/2} \left(\frac{\partial S_j(p, q; p_0)}{\partial q} + T_j \right).$$

Тут функції R_j, T_j — деякі поліноми від частинних похідних першого і вищих порядків функцій $S_2, \ldots, S_{j-1}$. Перетворений гамільтоніан можна подати у вигляді

$$H_0'(p_0)p + \frac{\sqrt{\mu}}{2}H_0''(p_0)p^2 + \sum_{j=2}^{2(l+3)} \mu^{j/2}\left(H_j^*(p, q; p_0) - \left\langle \frac{\partial S_j}{\partial q}, H_0'(p_0)\right\rangle\right) +$$
$$+ O\left(\mu^{l+3} + \sqrt{\mu}\,\varepsilon^{l+3}\right),$$

де $H_2^* = \tilde{H}_2$, а функції $H_j^*, j \geq 3$, утворено за функціями $S_2, \ldots, S_{j-1}$ та $H_0, \ldots$ $\ldots, H_j$.

Функції S_j, $j = 2, \ldots, 2(l+3)$, будуємо за тим самим принципом, що й S_1. Зауважимо, що їх коефіцієнти Фур'є вже будуть залежати і від p. Однак ця деталь не є істотною при одержанні рівномірних щодо $\varepsilon \in (0, 1)$ оцінок зазначених функцій та їх похідних. Перший етап доведення завершуємо масштабним перетворенням $p \mapsto \sqrt{\mu}p$, після якого збурена система стає гамільтоновою відносно дужки Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = c_{ij}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \tag{8}$$

з гамільтоніаном вигляду

$$H_0'(p_0)p + \mu\left[\frac{1}{2}H_0''(p_0)p^2 + \langle g(p_0), p\rangle\right] + \sum_{j=3}^{2l+5} \mu^{j/2} H_{\varepsilon j}(p; p_0) + h_{\varepsilon l}(p, q; p_0, \sqrt{\mu}). \tag{9}$$

Тут, з огляду на явний вигляд функції $\tilde{H}_2$, справджується рівність $g(p_0) =$ $= (2\pi)^{-n}\int_{T^n} \partial H_1(p_0, q; 0)/\partial p\, dq$, функції $H_{\varepsilon j}, h_{\varepsilon l}$ гладкі в сенсі дійсного аналізу і рівномірно щодо $\varepsilon \in (0, 1)$ обмежені в області

$$|p| < R, \quad |\mathrm{Im}\, q| < R_1, \quad |p_0| < R_1, \quad |\sqrt{\mu}| < |\sqrt{\mu_0}|. \tag{10}$$

Таку ж властивість мають їх частинні похідні. Крім цього, в області, яка виділяється з (10) умовою (7), зазначені функції дійсно-аналітичні, причому

$$|h_{\varepsilon l}| < \mu^{l+5/2} + \varepsilon^{l+5/2},$$

якщо $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, а $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ досить малі.

Переходимо до другого етапу доведення. Доповнимо базис $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k_0}\}$ підпростору $\ker C$ векторами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ до базису всього простору $\mathbf{R}^n$ так, щоб після введення нових координат

$$u_i = \langle p, \alpha_i\rangle, \quad v_i = \langle p, \beta_i\rangle, \quad J_j = \langle p, \sigma_j\rangle, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, k_0, \tag{11}$$

і перетворення $q \mapsto q + \sum_{i=1}^{n}(v_i\alpha_i - u_i\beta_i)$ дужка (8) набрала вигляду

$$\{v_i, u_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q, J_j\} = \sigma_j, \quad \{q_i, q_j\} = \nu_{ij}, \tag{12}$$

де ν_{ij} — деякі сталі. Утворимо $2m$-вимірний вектор $w = (u, v)$. Без обмеження загальності вважаємо, що $p_* = 0$ — квазістаціонарна точка. З припущення 4 випливає невиродженість матриці $\partial^2 H_0(0)/\partial w^2$ і можливість подати багатовид квазістаціонарних точок, який проходить через 0 і визначається умовою $\frac{\partial H_0}{\partial w} = 0$, у вигляді $w = w_0(J)$, де $w_0 : \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^{2m}$ — дійсно-аналітичне відображення. Можна вважати, що k_0-вимірний параметр η узгоджений з k_0-вимірною змінною J так, що виконується тотожність

$$\eta_i \equiv \langle p_0(\eta), \sigma_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, k_0.$$

Звідси випливає

$$H_0'(p_0(\eta)) = \left[\frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p} + \frac{\partial H_0}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial p} \right]_{p = p_0(\eta)} = \sum_{j=1}^{k_0} \Lambda_j(\eta) \sigma_j = \Omega(\eta).$$

Тому після звуження на багатовид $p = p_0(\eta)$ умова (7) перетворюється в першу умову (4).

Покладемо тепер у (9) $p_0 = p_0(\eta)$. Тоді, відкинувши в (9) члени порядку $O(\mu^{3/2})$ і доданок $h_{\varepsilon l}$, одержимо функцію

$$\langle \Lambda(\eta), J \rangle + \mu \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial w^2} w^2 + \left\langle \frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial J \partial w} w, J \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial J^2} J^2 + \langle g_1(\eta), w \rangle + \langle g_2(\eta), J \rangle \right]. \tag{13}$$

Оскільки $\lambda_i(\eta) \neq \lambda_j(\eta)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$, для всіх $\eta \in \mathcal{U}$, то симплектичним відносно дужки $\{ v_i, u_j \} = \delta_{ij}$ лінійним перетворенням $w \mapsto \mathbf{W}(\eta) w$, у якому матрична функція $\mathbf{W}(\eta)$ є дійсно-аналітичною в $\mathcal{U}$, квадратичну форму $\frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial w^2} w^2$ можна звести до суми квадратів $\langle L(\eta) w, w \rangle$, де

$$L(\eta) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\eta), \ldots, \lambda_m(\eta), \lambda_1(\eta), \ldots, \lambda_m(\eta)).$$

Тоді заміна змінних

$$w \mapsto \mathbf{W}(\eta) w - \left[\frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial w^2} \right]^{-1} \left[\frac{\partial^2 H_0(p_0(\eta))}{\partial w \partial J} J + g_1(\eta) \right]$$

зводить функцію (13) до вигляду

$$\langle \Lambda(\eta), J \rangle + \mu \left[\frac{1}{2} \langle L(\eta) w, w \rangle + F_1(J; \eta) \right].$$

При цьому для дужки Пуассона виконується рівність (12) і, крім цього, з'являються, взагалі кажучи, ненульові елементи

$$\{ q, u_i \} = a_i(\eta), \quad \{ q, v_i \} = b_i(\eta), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

де $a_i \colon \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^n$, $v_i \colon \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^n$ — дійсно-аналітичні функції.

Запровадимо нові змінні $I = (I_1, \ldots, I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) | \bmod 2\pi$ та $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) | \bmod 2\pi$ за формулами

$$u_i = \sqrt{2(\xi_i + I_i)} \cos \varphi_i, \quad v_i = \sqrt{2(\xi_i + I_i)} \sin \varphi_i,$$

$$q = \psi + \sum_{i=1}^{n} (v_i a_i(\eta) - u_i b_i(\eta)),$$

де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — m-вимірний параметр. Тепер для дужок Пуассона виконуються рівності (5), а гамільтоніан набирає вигляду

$$\langle \Lambda(\eta), J\rangle + \mu[\langle \lambda(\eta), I\rangle + F_1(J;\eta)] +$$
$$+ \sum_{j=3}^{2l+5} \mu^{j/2} F_{\varepsilon j}(I, J, \varphi; \xi, \eta) + f_{\varepsilon l}(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta, \sqrt{\mu}). \tag{15}$$

При цьому на підмножині, яка виділяється умовами (4), виконується оцінка

$$|f_{\varepsilon l}| < \mu^{l+9/4} + \varepsilon^{l+9/4}.$$

За своїми аналітичними властивостями функції $F_1, F_{\varepsilon j}, f_{\varepsilon l}$ подібні до відповідних функцій в (9).

На третьому, завершальному, етапі доведення виконаємо процедуру симплектичного усереднення функції

$$\langle \Lambda(\eta), I\rangle + \sum_{j=3}^{2l+5} \mu^{j/2-1} F_{\varepsilon j}(I, J, \varphi; \xi, \eta)$$

за змінними φ за допомогою інфінітезимальної твірної функції вигляду $\sum_{j=3}^{2l+5} \mu^{j/2-1} \tilde{S}_j(I, J, \varphi; \xi, \eta)$. Ця процедура практично нічим не відрізняється від тієї, яку було використано на першому етапі. Застосувавши техніку КАМ-теорії, неважко одержати рівномірні щодо $\varepsilon \in (0, 1)$ оцінки для функцій $\tilde{S}_j$ та їх похідних в області $D_\rho^m \times D_\rho^{k_0} \times \Pi_\rho^m \times (B_R^m \setminus B_{2\rho}^m) \times \mathcal{U}$, де $\rho > 0$ — довільне число з $(0, \min(R_1, R/2))$. Нерезонансні значення параметрів η визначаються при цьому другою умовою (4). Слід зауважити, що оскільки функції $\tilde{S}_j$ не залежать від ψ, то при відповідних перетвореннях координати $J_1, \ldots, J_{k_0}$ не змінюються. Тому, застосувавши вказану процедуру до функції (15), приходимо до гамільтоніана (3) з потрібними властивостями. Теорему доведено.

4. Метод штучних параметрів і допоміжна КАМ-теорема. Покладемо $\varepsilon = \mu$ і введемо позначення

$$\mu G_\mu(I, J; \xi, \eta) = \mu G_1(J; \eta) + \sum_{j=3}^{2(l+2)} \mu^{j/2} G_{\mu j}(I, J; \xi, \eta),$$
$$E_\mu(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta) = \mu G_\mu(I, J; \xi, \eta) + g_{\mu l}(I, J, \varphi, \psi; \xi, \eta, \sqrt{\mu}).$$

В області нерезонансних значень (4) при $\varepsilon = \mu$ систему з гамільтоніаном

$$\langle \Lambda(\eta), J\rangle + \mu\langle \lambda(\eta), I\rangle + E_\mu \tag{16}$$

можна розглядати як збурення членами порядку μ^{l+2} системи з гамільтоніаном

$$\langle \Lambda(\eta), J\rangle + \mu\langle \lambda(\eta), I\rangle + \mu G_\mu(I, J; \xi, \eta),$$

яка має вигляд

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{J} = 0,$$
$$\dot{\varphi} = \mu\left[\lambda(\eta) + \frac{\partial G_\mu}{\partial I}\right], \quad \dot{\psi} = \Omega(\eta) + \mu \sum_{i=1}^{k_0} \frac{\partial G_\mu}{\partial J_i} \sigma_i.$$

Остання породжує квазіперіодичні рухи на коізотропних торах, які є спільними поверхнями рівня функцій I, J. Зауважимо, що при $\mu = 0$ ці тори вироджуються в лагранжеві. Крім цього, має місце таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_m^*, \sigma_1^*, \ldots, \sigma_{k_0}^*\}$ — *базис в* $\mathbf{R}^{2m+k_0}$, *дуальний до базиса* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k_0}\}$, $\mathbf{A}$ — *матриця, стовпцями якої є* $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_m^*\}$, *а* $\mathbf{S}$ — *матриця, стовпцями якої є* $\{\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{k_0}^*\}$. *Тоді тор, який відповідає фіксованим значенням* I, J, *у вихідних координатах* p, q *можна задати рівнянням*

$$p = \mathbf{A}[w_0(\eta)+\mu\mathbf{W}(\eta)w_1(\xi+I,\varphi)] + \mathbf{S}[\eta+\mu J] -$$

$$- \mu\frac{\partial S_1(q;p_0(\eta))}{\partial q} + \mu^{3/2}\tilde{P}_\mu(I,J,\varphi,q;\xi,\eta), \tag{17}$$

$$\varphi \in T^m, \quad q \in T^n. \tag{18}$$

Тут $w_0(\eta)$, $\mathbf{W}(\eta)$, $S_1(q;p_0)$ — *функції, побудовані в процесі доведення теореми* 1,

$$w_1(\xi+I,\varphi) = \Big(\sqrt{2(\xi_1+I_1)}\cos\varphi_1,\ldots,\sqrt{2(\xi_m+I_m)}\cos\varphi_m,$$

$$\sqrt{2(\xi_1+I_1)}\sin\varphi_1,\ldots,\sqrt{2(\xi_m+I_m)}\sin\varphi_m\Big),$$

а відображення $\tilde{P}_\mu : B_\rho^m \times B_\rho^{k_0} \times T^m \times T^n \times (B_R^m \setminus B_{2\rho}^m) \times \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^n$ *має ті ж властивості, що й* P_ε *з теореми* 1 *при* $\varepsilon = \mu$. *Крім того,*

$$|\det\mathbf{W}(\eta)| = \left|\frac{\partial w_1(\xi,\varphi)}{\partial(\xi,\varphi)}\right| = 1.$$

Доведення випливає з доведення теореми 1 з урахуванням того, що відображення $w \mapsto \mathbf{W}(\eta)w$ та $(\xi,\varphi) \mapsto w_1(\xi,\varphi)$ симплектичні відносно структур $du \wedge dv$ та $d\xi \wedge d\varphi$.

Відзначимо, що зображення тора у вигляді (17), в якому фігурують старі кутові координати q, знадобиться нам у подальшому при обгрунтуванні метричного твердження основної теореми.

Покажемо, як можна в області параметрів ξ, η виділити таку множину $\mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}$, щоб при всіх досить малих $\mu > 0$ і $(\xi,\eta) \in \mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}$ система з гамільтоніаном (16) мала коізотропний інваріантний тор в μ^l-околі тривіального тора $I = 0$, $J = 0$. З цією метою скористаємось модифікацією методу штучних параметрів Боголюбова–Мозера [15–12], запропонованою М. Б. Севрюком та М. Ерманом (див. [16, 17]). Тут будемо дотримуватись схеми, пристосованої для цілей теорії збурень коізотропних інваріантних торів.

Розглянемо замість (16) гамільтоніан

$$\langle\Lambda+\mu\Theta, J\rangle + \mu\langle\lambda+\theta, I\rangle + E_\mu(I,J,\varphi,\psi;\xi,\eta), \tag{19}$$

у якому $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k_0})$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{k_0})$, $\theta = (\theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_m)$ — поки що вільні параметри. Виявляється, можна знайти гладку залежність параметрів Θ і θ від всіх інших, при якій, за умови достатньої малості μ, система з гамільтоніаном (19) має інваріантний коізотропний тор в $O(\mu^l)$-околі тривіального. Позначивши через $|\cdot|_k$ норму в просторі C^k-диференційовних у сенсі Вітні відображень, наведемо формулювання відповідного результату.

Теорема 2. *Нехай* $a \in (1, 2)$, $b \in (0, 1)$ — *довільні числа,* l, R, ρ, τ, γ — *ті ж числа, що й у теоремі 1. Існує число* $\mu_* > 0$ *таке, що при кожному* $\mu \in \in (0, \mu_*)$ *і всіх* $(\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$ *з множини* $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^{2k_0+2m}$, *яка визначається умовами*

$$|\Lambda| < R, \quad |\lambda| < R; \quad \eta \in \mathcal{U} - \rho; \quad 2\rho < \xi_j < R, \quad j = 1, \ldots, m;$$

$$\left| \left\langle \sum_{j=1}^{k_0} \Lambda_j \sigma_j, \hat{\mathbf{m}} \right\rangle + \mu \langle \lambda, \tilde{\mathbf{m}} \rangle \right| \geq \mu\gamma |\mathbf{m}|^{-\tau} \qquad \forall \mathbf{m} = (\hat{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}) \in \mathbf{Z}^{m+n} \setminus \{0\}, \tag{20}$$

$$|\langle \Omega(\eta), \hat{\mathbf{m}} \rangle| \geq \gamma |\hat{\mathbf{m}}|^{-\tau} \qquad \forall \hat{\mathbf{m}} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}, \tag{21}$$

$$|\langle \lambda(\eta), \tilde{\mathbf{m}} \rangle| \geq \gamma |\tilde{\mathbf{m}}|^{-\tau} \qquad \forall \tilde{\mathbf{m}} \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}, \tag{22}$$

система з гамільтоніаном (19) *при*

$$\Theta = \Theta_\mu(\Lambda, \lambda, \xi, \eta), \qquad \theta = \sqrt{\mu}\,\theta_\mu(\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$$

має інваріантний тор, який задається рівняннями

$$I = I_\mu(\varphi, \psi; \Lambda, \lambda, \xi, \eta), \quad J = J_\mu(\varphi, \psi; \Lambda, \lambda, \xi, \eta), \quad \varphi \in T^m, \quad \psi \in T^n,$$

і на якому потік визначається системою

$$\dot{\varphi} = \mu\lambda, \qquad \dot{\psi} = \sum_{j=1}^{k_0} \Lambda_j \sigma_j. \tag{23}$$

Тут $\mathcal{U} - \rho$ — *підобласть, яка міститься в* $\mathcal{U}$ *разом зі своїм* ρ*-околом, а*

$$\Theta_\mu : \mathcal{M} \mapsto \mathbf{R}^{k_0}, \qquad \theta_\mu : \mathcal{M} \mapsto \mathbf{R}^m,$$

$$I_\mu : T^m \times T^n \times \mathcal{M} \mapsto \mathbf{R}^m, \qquad J_\mu : T^m \times T^n \times \mathcal{M} \mapsto \mathbf{R}^{k_0}$$

— *гладкі в сенсі Вітні відображення. При цьому для кожного* $k \in \mathbf{N}$ *знайдеться стала* $C_k > 0$ *така, що*

$$\begin{aligned} \left|\Theta_\mu\right|_k &\leq C_k\left(1 + \mu^{bl+1-ak}\right); & \left|\theta_\mu\right|_k &\leq C_k\left(1 + \mu^{bl+1/2-ak}\right); \\ \left|I_\mu\right|_k &\leq C_k \mu^{bl+1-ak}; & \left|J_\mu\right|_k &\leq C_k \mu^{bl+1-ak}. \end{aligned} \tag{24}$$

При фіксованих $(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) \in \mathcal{M}$ *відображення* I_μ, J_μ — *дійсно-аналітичні щодо* φ, ψ.

Доведення використовує ітераційний процес послідовних симплектичних замін змінних I, J, φ, ψ та перетворень параметрів Θ, θ, мета яких полягає в тому, щоб в границі звести гамільтоніан (19) до вигляду

$$\langle \Lambda, J \rangle + \mu \langle \lambda, I \rangle + E_\mu^\infty(I, J, \varphi, \psi; \Lambda, \lambda, \xi, \eta), \tag{25}$$

де функція E_μ^∞ має таку властивість: на множині $\mathcal{M}$ вона та її частинні похідні за змінними I, J при $I = 0$, $J = 0$ обертаються в 0. Зрозуміло, що система з гамільтоніаном (25) матиме тривіальний інваріантний тор, потік на якому визначатиметься системою (23). Відзначимо, що перетворення параметрів Θ, θ здійснюється, з одного боку, для того, щоб частоти квазіперіодичних рухів на згаданому тривіальному інваріантному торі визначались лише параметрами Λ та λ, а з іншого — для забезпечення прискореної збіжності процесу.

Опишемо тепер вказані послідовні перетворення, пропускаючи технічні деталі, які можна знайти у [18]. Для того щоб одержати гамільтоніан першого кроку процесу, виконуємо в (19) заміну параметрів

$$\Theta \mapsto \Theta - \frac{\partial G_1(0,\eta)}{\partial J} - \sum_{j=3}^{2(l+2)} \mu^{j/2-1} \frac{\partial G_{\mu j}(0,0;\xi,\eta)}{\partial J}, \tag{26}$$

$$\theta \mapsto \theta - \sum_{j=3}^{2(l+2)} \mu^{j/2-1} \frac{\partial G_{\mu j}(0,0;\xi,\eta)}{\partial I} \tag{27}$$

і від одержаної функції віднімаємо її середнє значення за всіма кутовими змінними при $I = 0$, $J = 0$. Одержимо гамільтоніан $H^{(1)} = \langle \Lambda + \mu\,\Theta, J\rangle + \mu\langle \lambda + \theta, I\rangle + E_\mu^{(1)}$. Для скорочення подальших викладок введемо такі позначення:

$$y = (I, J); \quad \phi = (\varphi, \psi); \quad x = (y, \phi); \quad \vartheta = (\Theta, \theta); \quad z = (x, \vartheta).$$

Оскільки до кінця даного доведення параметри ξ, η відіграватимуть пасивну роль, не будемо відзначати, що вони є у позначеннях функцій та визначеннях множин.

Нехай додатні числа a, b, α пов'язані між собою нерівностями $1 < a < 1 + \alpha$, $2\alpha + b < 1$, $a + \alpha < 2$. Введемо послідовності чисел

$$\mu_0 = \mu^{l/a}, \quad \mu_i = \mu_0^{a^i}, \quad \delta_i = \frac{\rho}{12 \cdot 2^i}, \quad N_i = \frac{4a^i}{3\delta_i}|\ln \mu_1|,$$

$$\rho_0 = \rho, \quad \rho_{i+1} = \rho_i - 6\delta_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Через $\mathcal{L}_i(R, \gamma)$, $i = 1, 2, \ldots$, позначимо множину тих $(\Lambda, \lambda) \in \mathbf{C}^{k_0+m}$, які задовольняють нерівності $|\Lambda| < R$, $|\lambda| < R$ та (20) при всіх $0 < |\mathbf{m}| \le N_{i-1}$. Введемо також множини $\mathcal{E}_i = \left\{\vartheta \in \mathbf{C}^{k_0+m} : |\vartheta| \le \mu_i^{\alpha}\right\}$,

$$\mathcal{Z}_i = \left\{z \in \mathbf{C}^{2k_0+3m+n} : |y| < \rho_i,\ |\operatorname{Im}\phi| < \rho_i,\ |\vartheta| < \mu_i^{\alpha}\right\}$$

та операції

$$P_0(\cdot) = (2\pi)^{-(m+n)} \int_{T^{m+n}} \cdot\, d\phi, \quad P_N(\cdot) = \sum_{0 \le |\mathbf{m}| \le N} e^{i\langle \mathbf{m}, \phi\rangle} P_0\left(\cdot\, e^{-i\langle \mathbf{m}, \phi\rangle}\right).$$

Припустимо тепер, що на i-му кроці одержано гамільтоніан $H^{(i)} = \langle \Lambda, J\rangle + \mu\langle \lambda, I\rangle + \mu\langle \vartheta, y\rangle + E_\mu^{(i)}$, який є дійсно-аналітичною функцією на множині $\mathcal{Z}_i \times \mathcal{L}_i(R + \rho, \gamma/2)$ і задовольняє на ній такі умови:

$$P_0 E_\mu^{(i)}\Big|_{y=0} = 0; \quad \left|E_\mu^{(i)}\big|_{y=0}\right| \le \mu^2 \mu_i; \quad \left|\frac{\partial E_\mu^{(i)}}{\partial y}\bigg|_{y=0}\right| \le \mu^2 \mu_i;$$
$$\left|\frac{\partial H^{(i)}}{\partial z}\right| \le c_i; \quad \left|\frac{\partial^2 H^{(i)}}{\partial z^2}\right| \le \mu c_i, \tag{28}$$

де стала $c_i > 0$ не залежить від μ.

Визначимо функції $u_\mu(\phi, \vartheta, \Lambda, \lambda)$, $v_{j\mu}(\phi, \vartheta, \Lambda, \lambda)$, $j = 1, \ldots, k_0 + m$, як розв'язки системи рівнянь

$$\{ u, \langle \Lambda, J \rangle + \mu \langle \lambda, I \rangle \} = P_{N_i} E_\mu^{(i)} \Big|_{y=0},$$

$$\{ v_j, \langle \Lambda, J \rangle + \mu \langle \lambda, I \rangle \} = \left(P_{N_i} - P_0 \right) \left[\frac{\partial E_\mu^{(i)}}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{k_0+m} \frac{\partial^2 E_\mu^{(i)}}{\partial y_j \partial y_k} \{ y_k, u \} \right]_{y=0}.$$

Нехай $x \mapsto x + \chi_\mu^{(i)}$ — перетворення зсуву за одиницю часу вздовж траєкторій гамільтонової системи з гамільтоніаном $S_\mu = u_\mu + \sum_{j=1}^{k_0+m} v_{j\mu} y_j$. Покладемо

$$\Delta_\mu^{(i)} = -\frac{1}{\mu} P_0 \left[\frac{\partial E_\mu^{(i)}}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{k_0+m} \frac{\partial^2 E_\mu^{(i)}}{\partial y_j \partial y_k} \{ y_k, u \} \right]_{y=0}.$$

Виявляється, що $\chi_\mu^{(i)} : \mathcal{Z}_{i+1} \times \mathcal{L}_{i+1}(R + \rho, \gamma/2) \mapsto \mathbf{C}^{k_0+2m+n}$ та $\Delta_\mu^{(i)} : \mathcal{E}_{i+1} \times \times \mathcal{L}_{i+1}(R + \rho, \gamma/2) \mapsto \mathbf{C}^{k_0+m}$ — дійсно-аналітичні відображення, для яких у відповідних областях визначення виконуються нерівності

$$\left| \chi_\mu^{(i)} \right| \le \mu \mu_i^b; \quad \left| \frac{\partial \chi_\mu^{(i)}}{\partial z} \right| \le \mu \mu_i^b;$$

$$\left| \Delta_\mu^{(i)} \right| \le \mu \mu_i^b; \quad \left| \frac{\partial \Delta_\mu^{(i)}}{\partial z} \right| \le \mu \mu_i^b.$$

Крім того, якщо в гамільтоніані $H^{(i)}$ зробити заміну змінних і параметрів за правилом $x \mapsto x + \chi_\mu^{(i)}$, $\vartheta \mapsto \vartheta + \Delta_\mu^{(i)}$ і від одержаної функції відняти її середнє значення за змінними ϕ при $y = 0$, то у такий спосіб і одержимо гамільтоніан $(i+1)$-го кроку ітераційного процесу:

$$H^{(i+1)} = \langle \Lambda, J \rangle + \mu \langle \lambda, I \rangle + \mu \langle \vartheta, y \rangle + E_\mu^{(i+1)}.$$

Тут $E_\mu^{(i+1)}$ — дійсно-аналітична на множині $\mathcal{Z}_{i+1} \times \mathcal{L}_{i+1}(R + \rho, \gamma/2)$ функція, яка задовольняє умови (28), якщо попередньо в них зробити заміну i на $i+1$ і покласти $c_{i+1} = c_i + \mu \mu_i^b$.

Тепер визначимо дві послідовності відображень

$$X_\mu^{(i)} : \mathcal{Z}_i \times \mathcal{L}_i \left(R + \rho, \frac{\gamma}{2} \right) \mapsto \mathbf{C}^{k_0+2m+n},$$

$$\Xi_\mu^{(i)} : \mathcal{E}_i \times \mathcal{L}_i \left(R + \rho, \frac{\gamma}{2} \right) \mapsto \mathbf{C}^{k_0+m}$$

рекурентними співвідношеннями

$$X_\mu^{(1)} = x; \quad X_\mu^{(i+1)} = X_\mu^{(i)} \left(x + \chi_\mu^{(i)}, \vartheta + \Delta_\mu^{(i)}, \Lambda, \lambda \right),$$

$$\Xi_\mu^{(1)} = \vartheta; \quad \Xi_\mu^{(i+1)} = \Xi_\mu^{(i)} \left(\vartheta + \Delta_\mu^{(i)}, \Lambda, \lambda \right).$$

Неважко впевнитись у тому, що

$$\left| X_\mu^{(i+1)} - X_\mu^{(i)} \right| \le 2 \mu \mu_i^b; \quad \left| \Xi_\mu^{(i+1)} - \Xi_\mu^{(i)} \right| \le 2 \mu \mu_i^b \tag{29}$$

для всіх $(z, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{Z}_{i+1} \times \mathcal{L}_{i+1}(R+\rho, \gamma/2)$. З цих нерівностей випливає рівномірна збіжність послідовності $X_\mu^{(i)}$ на множині $\mathcal{Z}_\infty \times \mathcal{L}_\infty(R+\rho, \gamma/2)$ до відображення $X_\mu^{(\infty)}(x, \Lambda, \lambda)$, а послідовності $\Xi_\mu^{(i)}$ на множині $\{\vartheta = 0\} \times \mathcal{L}_\infty(R + \rho, \gamma/2)$ до відображення $\Xi_\mu^{(\infty)}(\Lambda, \lambda)$. Зрозуміло, що при фіксованих $(\Lambda, \lambda) \in \mathcal{L}_\infty(R+\rho, \gamma/2)$ відображення $X_\mu^{(\infty)}$ дійсно-аналітичне щодо x в області, яка виділяється в $\mathbf{C}^{k_0+m}$ умовами $|y| < \rho/2$, $|\operatorname{Im}\phi| < \rho/2$.

Залишилось пояснити, чому граничні відображення гладкі за Вітні. Виберемо $\beta > 0$ так, щоб $1+\beta < a$. Можна показати, що для досить малих $\kappa \in (0, 1)$ та $\mu_* > 0$, всіх $\mu \in (0, \mu_*)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ та $i = 1, 2, \ldots$, праві частини нерівностей (29) обмежені числами $\mu^{bl+1-ak} r_i^k$, де $r_i = \mu^{1+\beta}\kappa^i$. Крім цього, множина $\mathcal{L}_\infty(R, \gamma)$ міститься в $\mathcal{L}_i(R+\rho, \gamma/2)$ разом зі своїм r_i-околом. Звідси випливає, що відображення $X_\mu^{(\infty)}(x, \Lambda, \lambda)$ та $\Xi_\mu^{(\infty)}(\Lambda, \lambda)$ гладкі в сенсі Вітні, а їх C^k-норми обмежені числами $C_k \mu^{bl+1-ak}$ [2, 16].

Відображення Θ_μ та θ_μ будуємо шляхом суперпозиції відображень (26) та (27) з $\Xi_\mu^{(\infty)}$. Для одержання відображень I_μ та J_μ використовуються відповідні I та J компоненти відображення $X_\mu^{(\infty)}$ при $I = 0$ та $J = 0$.

***Зауваження* 1.** Кутові координати (φ, ψ) в теоремі 2 одержуються $O(\mu^{bl+1})$-деформацією відповідних кутових координат з теореми 1.

5. Основна теорема. Переходимо до побудови множини $\mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $|\Lambda(\eta)| < R - \gamma$, $|\lambda(\eta)| < R - \gamma$, якщо $\eta \in \mathcal{U}$. Для того щоб теорему 2 можна було застосувати до системи з гамільтоніаном (16), потрібно пов'язати параметри $\Lambda, \lambda, \xi, \eta$ рівностями

$$\begin{aligned} \Lambda + \mu\Theta_\mu(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) &= \Lambda(\eta), \\ \lambda + \sqrt{\mu}\,\theta_\mu(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) &= \lambda(\eta). \end{aligned} \tag{30}$$

Будемо вважати, що функції Θ_μ, θ_μ вже продовжено до гладких на множині

$$|\Lambda| < R, \quad |\lambda| < R, \quad \eta \in \mathcal{U}, \quad 0 < \xi_j < R, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тоді при всіх досить малих $\mu > 0$ систему (30) можна розв'язати відносно Λ, λ:

$$\Lambda = \Lambda(\eta) + \mu\tilde{\Lambda}_\mu(\xi, \eta),$$

$$\lambda = \lambda(\eta) + \sqrt{\mu}\,\tilde{\lambda}_\mu(\xi, \eta),$$

і при цьому функції $\tilde{\Lambda}_\mu$ та $\tilde{\lambda}_\mu$ k разів неперервно диференційовні в області $\mathcal{G} - \gamma$, де

$$\mathcal{G} = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{k_0+m} : \eta \in \mathcal{U},\ 0 < \xi_j < R,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Виділимо з $\mathcal{G} - \gamma$ підмножину $\mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}$, в точках якої виконується система умов (21), (22) та

$$\sum_{j=0}^{k_0} \left| \left\langle (\Lambda(\eta) + \mu \tilde{\Lambda}_\mu(\xi, \eta))_j \sigma_j, \hat{\mathbf{m}} \right\rangle + \mu \left\langle (\lambda(\eta) + \sqrt{\mu}\, \tilde{\lambda}(\xi, \eta)), \tilde{\mathbf{m}} \right\rangle \right| \geq \mu\gamma |\mathbf{m}|^{-\tau}$$

для всіх $\mathbf{m} = (\hat{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}) \in \mathbf{Z}^{m+n} \backslash \{0\}$. Тут $(\cdot)_j$ означає j-ту компоненту відповідного вектора. Через $\mathcal{T}^0_{l,\mu}(\xi, \eta)$ позначимо тор, заданий рівнянням (17) при $I = 0$, $J = 0$, яке перепишемо у вигляді

$$p = \Pi^0_{l,\mu}(\varphi, q; \xi, \eta), \quad \varphi \in T^m, \quad q \in T^n.$$

Теорема 3. *Нехай для системи з гамільтоніаном* $H_0(p) + \mu H_1(p, q, \mu)$ *на симплектичному багатовиді* $(M, \omega_0^2 + \mu\omega_1^2)$ *виконуються припущення* 1–5. *Тоді для довільного натурального* $l \geq 2$ *та як завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *додатні числа* γ, τ, μ_* *можна вибрати так, щоб для кожного* $\mu \in (0, \mu_*)$ *існувало відображення* $\Pi_\mu \in C^\infty(T^m \times T^n \times \mathcal{G} \mapsto \mathbf{R}^n)$ *з такими властивостями:*

1) *при фіксованих* $(\xi, \eta) \in \mathcal{G}$ *відображення* $\Pi_\mu(\cdot, \xi, \eta): T^m \times T^n \mapsto \mathbf{R}^n$ *дійсно-аналітичне*;

2) *виконується нерівність* $\left| \Pi_\mu - \Pi^0_{l,\mu} \right|_1 < \mu^l$;

3) *якщо* $(\xi, \eta) \in \mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}$, *то гамільтонова система* $(M, \omega_0^2 + \mu\omega_1^2, H_0 + \mu H_1)$ *має коізотропний інваріантний тор* $\mathcal{T}_\mu(\xi, \eta)$, *який описується рівнянням*

$$p = \Pi_\mu(\varphi, q; \xi, \eta), \quad \varphi \in T^m, \quad q \in T^m;$$

4) *потік на такому торі квазіперіодичний з раціонально незалежними базисними частотами* $\mu\left(\lambda(\eta) + \sqrt{\mu}\, \tilde{\lambda}_\mu(\xi, \eta)\right)$, $\sum_{j=1}^{k_0} \left(\Lambda(\eta) + \mu\, \tilde{\Lambda}_\mu(\xi, \eta)\right)_j \sigma_j$;

5) *виконується умова масивності множини інваріантних торів збуреної системи*

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{(\xi,\eta)\in\mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau}} \mathcal{T}_\mu(\xi, \eta) \right) \Big/ \operatorname{mes}\left(\bigcup_{(\xi,\eta)\in\mathcal{G}} \mathcal{T}^0_{l,\mu}(\xi, \eta) \right) > 1 - \varepsilon.$$

Доведення: Існування відображення Π_μ, яке має властивості 1–4, є наслідком теорем 1, 2 і твердження 1, якщо числа a, b вибрати так, щоб $bl + 2 - a > l$. Той факт, що відношення $\operatorname{mes} \mathcal{G}_{\mu,\gamma,\tau} / \operatorname{mes} \mathcal{G}$ можна зробити як завгодно близьким до 1 при відповідному виборі чисел μ, γ, τ, $0 < \mu \ll \gamma \ll 1$, випливає з умови 5 та відомих результатів метричної теорії діофантових наближень на підбагатовидах евклідового простору [16, 19, 20]. Отже, тепер потрібно дослідити метричні властивості відображення $\Pi^0_{l,\mu}(\cdot, q; \cdot, \cdot): \mathcal{G} \mapsto \mathbf{R}^n$ при фіксованому q. З (17) випливає, що це дифеоморфізм. Зручно перейти до координат w, J (11), в яких зазначене відображення можна подати у вигляді

$$w = w_0(\eta) + \mu[\mathbf{W}(\eta) w_1(\xi, \varphi) + w_2(q; \eta)] + O(\mu^{3/2}),$$

$$J = \eta + \mu J_1(q; \eta) + O(\mu^{3/2}),$$

де функції w_2, J_1 з'являються за рахунок доданка $-\mu \partial S_1 / \partial q$ у формулі (17). Тепер маємо таке зображення для модуля якобіана:

$$\left|\det\frac{\partial(w,J)}{\partial(\xi,\varphi,\eta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\mu\mathbf{W}(\eta)\dfrac{\partial w_1(\xi,\varphi)}{\partial(\xi,\varphi)} + O(\mu^{3/2}) & \dfrac{\partial w_0(\eta)}{\partial\eta} + O(\mu) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{k_0} + O(\mu)\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \mu^{2m}(1 + O(\mu)),$$

де $\mathbf{1}_{k_0}$ — одинична $(k_0 \times k_0)$-вимірна матриця. Отже, коефіцієнт стиску об'єму досліджуваного відображення дорівнює $c\mu^{2m}(1 + O(\mu))$, де c — модуль визначника матриці $[\mathbf{A}; \mathbf{S}]$. З властивості 2 випливає, що основний член асимптотики модуля якобіана відображення $\Pi_\mu(\cdot, q; \cdot, \cdot)$: $\mathcal{G} \mapsto \mathbf{R}^n$ при $\mu \to \to 0$ має вигляд $c\mu^{2m}$. Звідси легко одержуємо твердження 5.

Автори висловлюють щиру подяку академіку А. М. Самойленку за низку цінних зауважень.

1. *Парасюк І. О.* Біфуркація канторової множини коізотропних інваріантних торів гамільтонової системи при збуренні симплектичної структури // Нелінійні коливання. – 1998. – **1**, № 2. – С. 81–89.
2. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Communs Pure and Appl. Math. – 1982. – **35**, № 5. – P. 653–695.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
4. *Гийемин В., Стернберг С.* Геометрические асимптотики. – М.: Мир, 1981. – 504 с.
5. *Moser J.* On the volume elements on a manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **120**. – P. 286–294.
6. *Rüssmann H.* Non-degeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. – 1989. – № 134. – P. 15–18.
7. *Kasuga T.* On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics // Proc. Jap. Acad. – 1961. – **37**. – P. 366–382.
8. *Нейштадт А. И.* Об осреднении в многочастотных системах // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 6. – С. 1295–1298.
9. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 2. – С. 378–395.
10. *Самойленко А. М.* Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 5. – С. 103–146.
11. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Там же. – 1963. – **18**, вып. 5. – С. 13–40.
12. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. – 1967. – **169**. – P. 136–176.
13. *Rüssmann H.* On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equation of first order with constant coefficients on the torus // Lect. Notes Phys. – 1975. – **38**. – P. 598–624.
14. *Кубічка А. А., Парасюк І. О.* Диференційовна за Вітні сім'я коізотропних інваріантних торів гамільтонової системи, близької до виродженої // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика. Механіка. – 2000. – Вип. 4. – С. 20–29.
15. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
16. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1997. – **1645**. – 195 p.
17. *Sevryuk M. B.* Invariant tori of Hamiltonian systems that are nondegenerate in Ruessman's sense // Dokl. Math. – 1996. – **53**, № 1. – P. 69–72.
18. *Парасюк І. О.* Збурення вироджених коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 71–85.
19. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 3. – С. 59–62.
20. *Bakhtin V. I.* A strengthened extremal property of Chebyshev polynomials // Moscow. Univ. Math. Bull. – 1987. – **42**, № 2. – P. 24–26.

Одержано 14.03.2000