УДК 512.542

В. А. Ведерников (Моск. город. пед. ун-т),
Д. Г. Коптюх (Брянск. пед. ун-т)

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ Ω-КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ

We present the solution of the Shemetkov problem (of studying critical formations) for piecewise composition hereditary formations.

Наведено розв'язання проблеми Л. О. Шеметкова (про дослідження критичних формацій) для частково композиційних спадкоємних формацій.

В теории формаций конечных групп хорошо известна проблема Л. А. Шеметкова об изучении строения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций $\mathfrak{F}$ для некоторого класса групп $\mathfrak{H}$ и непустой совокупности формаций θ [1]; при этом θ-формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\theta$-критической, если $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, но каждая собственная θ-подформация формации $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$. Решению этой проблемы посвящен ряд работ А. Н. Скибы. Им разработаны методы исследования критических формаций и, в частности, получено описание строения минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для произвольной локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа [2]. В работах [3, 4] рассматривается строение $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций в случаях, когда θ — совокупность всех наследственных локальных и композиционных формаций соответственно и $\mathfrak{H} \in \theta$. В теоремах 1–3 настоящей работы получено решение указанной задачи Л. А. Шеметкова для наследственных Ω-композиционных формаций.

Теорема 1. *Пусть θ — полная решетка формаций такая, что $\Omega c\theta \subseteq \theta$ и $\mathfrak{N}_p\theta \subseteq \theta$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$. Пусть f — минимальный $\Omega c\theta$-спутник формации $\mathfrak{F}$, h — максимальный внутренний $\Omega c\theta$-спутник непустой формации $\mathfrak{H}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega c\theta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega c\theta \operatorname{form} G$, где G — монолитическая группа $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и либо $f(A)$ является $h(A)_\theta$-критической формацией при $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\theta$-критической формацией, если $\mathcal{K}(P)$ не содержится в Ω.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{D}$ — Ωcs-формация и $\mathfrak{H}$ — класс групп. Если $\mathfrak{D}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{D}$ содержит $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критическую подформацию $\mathfrak{F}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая Ωcs-формация, h — ее максимальный внутренний Ωcs-спутник. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G$, где G — такая Ωcs-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ — группа простого порядка;*

2) *P — неабелева группа и G — минимальная не $h(\Omega')$-группа;*

3) *P — абелева группа, $\mathcal{K}(P)$ не содержится в Ω, $P < G$ и G — s-базисная группа такая, что максимальная s-подформация $\mathfrak{N}$ из $s \operatorname{form} G$ содержится в $h(\Omega')$;*

4) *$G = [P]H$, где $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega \cap \mathfrak{H}$, $H \neq 1$ — s-базисная группа такая, что максимальная s-подформация $\mathfrak{M}$ из $s \operatorname{form} H$ содержится в $h(A)$.*

Основные результаты данной работы анонсированы в [5–7]. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Обозначения и определения, не приведенные в работе, можно найти в [8–11]. Отметим лишь некоторые из них. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; $\mathcal{K}(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ — объединение классов $\mathcal{K}(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$; если $\mathcal{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой; если A — простая группа, M/N — главный фактор группы G и $\mathcal{K}(M/N) = (A)$, то M/N называется главным A-фактором группы G; $F_A(G)$ — пересечение централизаторов всех главных A-факторов группы G, если в G нет главных A-факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [11]; $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{A}$ обозначают соответственно класс всех групп, класс всех нильпотентных групп, класс всех p-групп и класс всех абелевых групп; $M \lhd G$ обозначает, что M — нормальная подгруппа группы G, $[K]A$ — полупрямое произведение группы K с некоторой ее группой операторов A.

Пусть $\mathfrak{J}$ — класс всех конечных простых групп и G — непустой подкласс класса $\mathfrak{J}$. Любая функция вида

$$f: \Omega \bigcup \{\Omega'\} \to \{\text{формации}\},$$

принимающая одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, называется Ω-композиционным спутником, или, коротко, Ωc-спутником [5]. Пусть $A \in \Omega$ и K/L — главный A-фактор группы G. Если $G/C_G(K/L) \in f(A)$, то K/L называется f-центральным главным фактором группы G. Пусть $\mathfrak{G}_\Omega$ — множество всех Ω-групп. Обозначим $\mathfrak{G}_\Omega$-радикал группы G через $O_\Omega(G)$. Пусть f — Ωc-спутник. Формация

$$\mathfrak{F} = \Omega CF(f) =$$

$$= \left\{G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \bigcap \mathcal{K}(G)\right\}$$

называется Ω-композиционной формацией или, коротко, Ωc-формацией, а f — Ωc-спутником формации $\mathfrak{F}$. Если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \bigcup \{\Omega'\}$, то f называется внутренним Ωc-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Непустое множество формаций θ называется полной решеткой формаций, если $\varnothing$, $\mathfrak{G} \in \theta$ и пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ [3]. Формации, принадлежащие θ, называются θ-формациями. Если $\mathfrak{B}$ является формацией, то полагаем $\mathfrak{B}\theta = \{\mathfrak{B}\mathfrak{T} \mid \mathfrak{T} \in \theta\}$. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\Omega c \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначим пересечение всех Ωc-формаций, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$, пишем $\Omega c \operatorname{form} G$. Через $\theta \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначим пересечение всех θ-формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. Символом $\Omega c\theta$ обозначим совокупность всех формаций, которые имеют Ω-композиционный спутник, все значения которого принадлежат θ, а такой спутник будем коротко называть $\Omega c\theta$-спутником. Положим $f \leq h$, если $f(A) \subseteq h(A)$ для всех $A \in \Omega \bigcup \{\Omega'\}$. С целью компактного изложения введем следующие сокращения: s-формация — наследственная формация; Ωcs-спутник — Ω-композиционный наследственный спутник; Ωcs-формация — Ω-композиционная наследственная формация. Если $\Omega = (A)$, где A — простая группа, то в перечисленных выше обозначениях и определениях заменяем Ω на A.

Группу G назовем s-критической, если $G \notin s \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных факторов группы G, и, следуя [12, с. 233], s-критическую группу G назовем s-базисной (Ωcs-базисной), если формация $s \operatorname{form} G$

($\Omega cs\,\mathrm{form}\, G$) содержит единственную максимальную s-подформацию (Ωcs-подформацию).

Нам потребуются следующие результаты из работы [6].

Лемма 1 ([6], лемма 5). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, θ — полная решетка формаций и $\mathfrak{F} = \Omega c\theta\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный минимальный $\Omega c\theta$-спутник f такой, что $f(\Omega') = \theta\,\mathrm{form}\,(G/O_\Omega(G) | G \in \mathfrak{X})$, $f(A) = \theta\,\mathrm{form}\,(G/F_A(G) | G \in \mathfrak{X})$, если $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$.*

Лемма 2 ([6], лемма 6). *Пусть f_i — минимальный $\Omega c\theta$-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Лемма 3 ([6], лемма 9). *Если $\mathfrak{F}$ — Ωc-формация, $Z_p \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ и f — внутренний Ωc-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 4 ([6], лемма 10). *Пусть f_1 и f_2 — внутренние Ωc-спутники формации $\mathfrak{F}$ и $Z_p \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p f_1(Z_p) = \mathfrak{N}_p f_2(Z_p)$.*

Лемма 5 ([6], лемма 11). *Пусть θ — полная решетка формаций такая, что $\Omega c\theta \subseteq \theta$ и $\mathfrak{N}_p\theta \subseteq \theta$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$. Если $\mathfrak{F} = \Omega CF(f)$ и f — ее минимальный $\Omega c\theta$-спутник, то формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний $\Omega c\theta$-спутник h, причем $h(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p f(Z_p)$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$.*

***Пример* 1** ([6], пример 1). Пусть $\mathfrak{M}$— формация, $\mathcal{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{M}$ — Ωc-формация.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega CF(f)$, где f — внутренний Ωc-спутник формации $\mathfrak{F}$. Если $f(A)$ является наследственной (нормально наследственной) формацией для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}$ является наследственной (нормально наследственной) формацией.*

Доказательство. Допустим, что $G \in \mathfrak{F}$, $H < G$ ($H \triangleleft G$) и $H \notin \mathfrak{F}$, причем группа G наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда G — монолитическая группа с монолитом M. Пусть $\mathcal{K}(M) = (A)$. Допустим, что $A \notin \Omega$. Тогда $O_\Omega(G) = 1$ и $G \cong G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$. Из $H \in f(\Omega')$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $A \in \Omega$. Допустим, что A — простая неабелева группа. Тогда $F_A(G) = 1$ и, значит, $G \cong G/F_A(G) \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Из $H \in f(A)$ следует $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $A \cong Z_p \in \Omega$. По индукции $HM/M \in \mathfrak{F}$. Пусть $D = H \cap M$. Поскольку $H \notin \mathfrak{F}$, то $D \neq 1$. Из $G/F_A(G) \in f(A)$ и $F_A(G) \subseteq C_G(M) \subseteq C_G(D)$ следует, что $G/C_G(M) \in f(A)$. Поэтому $HC_G(M)/C_G(M) \cong H/C_H(M) \in f(A)$, а значит, $H/C_H(D) \in f(A)$. Поскольку каждый главный A-фактор в H выше D f-централен, то отсюда следует, что $H/F_A(H) \in f(A)$. Пусть $B \in \mathcal{K}(H) \cap (\Omega \setminus (A))$. Тогда $F_B(H/D) = F_B(H)/D$ и из $(H/D)/F_B(H/D) \in f(B)$ следует, что $H/F_B(H) \in f(B)$. Поскольку $H/D \in \mathfrak{F}$, то $H/O_\Omega(H) \cong (H/D)/O_\Omega(H/D) \in f(\Omega')$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Лемма доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega CF(h)$, где h — максимальный внутренний Ωc-спутник формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ наследственна (нормально наследственна) тогда и только тогда, когда $h(A)$ наследственна (нормально наследственна) для любого $A \in \Omega \cup (\Omega')$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Ωc-формация $\mathfrak{F}$ наследственна (нормально наследственна) и h — ее максимальный внутренний Ωc-спутник. Согласно лемме 1 $\mathfrak{F}$ имеет минимальный Ωcs-спутник (Ωcsn-спутник) φ. В силу леммы 3 из [6] φ — внутренний спутник Ωc-формации $\mathfrak{F}$. Пусть f —

минимальный Ωc-спутник формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 5 $h(A)=\mathfrak{F}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash \mathfrak{A})$ и, значит, $h(A)$ наследственна (нормально наследственна). Пусть $A \cong Z_p \in \Omega$. Тогда в силу леммы 5 $h(A)=\mathfrak{N}_p f(A)$. Вследствие леммы 4 $\mathfrak{N}_p f(A) = \mathfrak{N}_p \varphi(A)$. Следовательно, $h(A) = \mathfrak{N}_p \varphi(A)$. Поскольку формация $\varphi(A)$ наследственна (нормально наследственна) и согласно теореме 2.4 из [8] формация $\mathfrak{N}_p$ наследственна, то в силу теоремы 2.8 [13, с. 31] формация $h(A)$ наследственна (нормально наследственна).

Достаточность следует из леммы 6. Следствие доказано.

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{F} = \Omega cs\operatorname{form} \mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ — *наследственный класс групп. Тогда* $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X})$.

Доказательство проводится подобно доказательству леммы 4 в [4].

***Следствие* 2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \Omega cs\operatorname{form} G$ *и* $\mathfrak{X}$ — *множество всех подгрупп группы* G. *Тогда* $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X})$.

Лемма 8. *Пусть* G — *монолитическая группа с неабелевым монолитом* P, $\mathfrak{X}$ — *множество всех собственных подгрупп группы* G, $\mathcal{K}(P) = (C)$ *и* $C \notin \Omega$. *Тогда группа* G *является* Ωcs-*базисной, причем максимальная* Ωcs-*подформация* $\mathfrak{B}$ *из* $\mathfrak{F} = \Omega cs\operatorname{form} G$ *имеет такой внутренний* Ωc-*спутник* b, *что* $b(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \Omega \backslash \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, $b(A) = s\operatorname{form}(G/F_A(G))$ *для всех* $A \in \Omega \cap \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ *и* $b(\Omega') = s\operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть b — Ωc-спутник, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{B} = \Omega CF(b)$ и f — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{B} = \left\{H \in \mathfrak{G} \mid H/O_\Omega(H) \in b(\Omega') \text{ и } H/F_A(H) \in b(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(H)\right\}.$$

Пусть $T \in \mathfrak{X}$. Тогда $T/O_\Omega(T) \in s\operatorname{form}\mathfrak{X} = b(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(T)$. Поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathcal{K}(T) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ и, значит, $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1 $b(A) = f(A)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}$, то $T/F_A(T) \in f(A) = b(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(T)$. Следовательно, $T \in \mathfrak{B}$. Поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$.

Покажем, что b является внутренним Ωc-спутником формации $\mathfrak{B}$. Согласно лемме 3.5 из [9] $s\operatorname{form}\mathfrak{X} = \operatorname{form}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$ и, значит, $b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Поскольку $C \notin \Omega$, то главные A-факторы группы G, в случае их существования, находятся выше P. Тогда в любом случае $P \subseteq F_A(G)$. Поскольку P не содержится в $\Phi(G)$, то в G существует максимальная подгруппа M, не содержащая P. Тогда $G/F_A(G) = MF_A(G)/F_A(G) \cong M/M \cap \cap F_A(G) \in H(\mathfrak{X})$ и, значит, $b(A) = s\operatorname{form}(G/F_A(G)) \subseteq s\operatorname{form}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Следовательно, b — внутренний Ωc-спутник формации $\mathfrak{B}$. В силу леммы 6 формация $\mathfrak{B}$ наследственна.

Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная Ωcs-подформация из $\mathfrak{F}$ и m — ее минимальный Ωcs-спутник. Согласно лемме 2 $m \leq f$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$. Если $A \in \Omega \cap \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, то $f(A) = b(A)$. Поэтому $m(A) \subseteq b(A)$. В силу леммы 1 $f(\Omega') = = s\operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) = s\operatorname{form} G$ и согласно лемме 2 из [3] $s\operatorname{form} G$ имеет единственную максимальную s-подформацию $s\operatorname{form}\mathfrak{X} = b(\Omega')$. Поскольку $G \notin \mathfrak{M}$, то $G \notin m(\Omega')$. Поэтому $m(\Omega') \subset f(\Omega')$ и, значит, $m(\Omega') \subseteq b(\Omega')$. Учитывая, что $f(A) = m(A) = b(A)$ для всех $A \in \Omega \backslash \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, имеем $m \leq b$ и согласно лемме 2 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$. Из $b(\Omega') \subset f(\Omega')$ в силу леммы 2 следует, что $\mathfrak{B}$ — единственная максимальная Ωcs-подформация формации $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 52.34 из [12] G является критической группой и, значит, G — s-критическая группа. Теперь в силу определения G является Ωcs-базисной группой. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $G = [P]L$ — *монолитическая группа с монолитом* P, *где* P — p-*группа*, L — s-*базисная группа и* $\mathfrak{M}$ — *максимальная* s-*подформация из* $s\,\mathrm{form}\,L$. *Тогда* G *является* Ωcs-*базисной группой, причем максимальная* Ωcs-*подформация* $\mathfrak{H}$ *из* $\mathfrak{F} = \Omega cs\,\mathrm{form}\,G$ *имеет внутренний* Ωc-*спутник* h *такой, что* $h(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, $h(A) = s\,\mathrm{form}\,(G/F_A(G))$ *для всех* $A \in (\Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})) \setminus (Z_p)$, *и если* $Z_p \in \Omega$, *то* $h(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,L$, $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, *а если* $Z_p \notin \Omega$, *то* $h(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ — *множество всех собственных подгрупп группы* G.

Доказательство. Пусть h — Ωc-спутник, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{H} = \Omega CF(h)$ и f — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{H} = \left\{ H \in \mathfrak{G} \mid H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') \text{ и } H/F_A(H) \in h(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(H) \right\}.$$

Пусть $T \in \mathfrak{M}$. Тогда $T/O_\Omega(T) \in \mathfrak{M} \subseteq h(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(T)$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathcal{K}(T) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, и, значит, $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Если $A \cong Z_p$, то $T/F_A(T) \in \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Пусть A неизоморфна Z_p. Тогда согласно лемме 1 $h(A) = f(A)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}$, то $T/F_A(T) \in f(A) = h(A)$. Следовательно, $T/F_A(T) \in h(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(T)$. Поэтому $T \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что h — внутренний Ωc-спутник формации $\mathfrak{H}$. Поскольку L — s-базисная группа, то L — монолитическая с монолитом Q. Поскольку $C_G(P) = P$, то в силу леммы 3.9 из [8] $O_p(L) = 1$. Пусть $\mathcal{K}(Q) = (B)$. Тогда B неизоморфна Z_p и $L/O_\Omega(L) \in s\,\mathrm{form}\,L \subseteq h(\Omega')$. Так как $L \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{K}(L) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(L)$. Тогда $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ и $L/F_A(L) \in f(A)$. Если A неизоморфна Z_p, то $f(A) = h(A)$ и $L/F_A(L) \in h(A)$. Пусть $A \cong Z_p$. Тогда $Q \subseteq F_A(L)$. Из s-базисности группы L по определению следует, что $L \notin s\,\mathrm{form}\,(L/Q)$. Поэтому $s\,\mathrm{form}\,(L/Q) \subset s\,\mathrm{form}\,L$ и, значит, $s\,\mathrm{form}\,(L/Q) \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $L/F_A(L) \in \mathfrak{M} = h(Z_p)$ и $L \in \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Если $A \cong Z_p$, то $h(A) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть A неизоморфна Z_p и $\mathfrak{L} = (L) \cup \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $F_A(G) \supseteq P$, то $G/F_A(G) = LF_A(G)/F_A(G) \cong L/L \cap F_A(G) \in \mathfrak{L}$. В силу наследственности класса $\mathfrak{L}$ согласно лемме 3.5 из [9] получим $h(A) = s\,\mathrm{form}\,(L/F_A(G)) \subseteq s\,\mathrm{form}\,\mathfrak{L} = \mathrm{form}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Если $Z_p \in \Omega$, то $h(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,L \subseteq s\,\mathrm{form}\,\mathfrak{L} = \mathrm{form}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $Z_p \notin \Omega$ и M — собственная подгруппа группы G. Тогда $M \in \mathfrak{X}$, а значит, $M \in s\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = h(\Omega')$. Поэтому $M/O_\Omega(M) \in h(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(M)$. Тогда A неизоморфна Z_p и $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Поскольку $\mathfrak{M} \in \mathfrak{F}$, то $M/F_A(M) \in f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(M)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $(\mathfrak{X})$ — наследственный класс, то $h(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ и тем самым установлено, что h является внутренним Ωc-спутником формации $\mathfrak{H}$. Из леммы 6 следует, что формация $\mathfrak{H}$ наследственна.

Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная Ωcs-подформация из $\mathfrak{F}$ и b — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{B}$. Согласно лемме 2 $b \le f$. Покажем, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Тогда $b(A) = f(A) = h(A) = \varnothing$. Если $A \in (\Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})) \setminus (Z_p)$, то $b(A) \subseteq f(A) = h(A) = s\,\mathrm{form}\,(G/F_A(G))$. Пусть $Z_p \in \Omega$. Тогда в силу леммы 1

$$b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,(G/O_\Omega(G)) \subseteq s\,\mathrm{form}\,L = h(\Omega')$$

и $f(Z_p) = s\,\mathrm{form}\,(G/F_{Z_p}(G)) = s\,\mathrm{form}\,L$. Допустим, что $b(Z_p) = f(Z_p) = s\,\mathrm{form}\,L$. Согласно лемме 3 $\mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$ и, значит, $G \in \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega cs\,\mathrm{form}\,G \subseteq$

$\subseteq \mathfrak{B}$. Получили противоречие. Следовательно, $b(Z_p) \subset f(Z_p) = s\,\mathrm{form}\, L$. Так как $s\,\mathrm{form}\, L$ содержит единственную максимальную s-подформацию $\mathfrak{M}$, то $b(Z_p) \subseteq \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Следовательно, $b \le h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $Z_p \notin \Omega$. Тогда $O_\Omega(G) = 1$ и $f(\Omega') = s\,\mathrm{form}\, G$. Поскольку $G \notin \mathfrak{B}$, то $b(\Omega') \subset f(\Omega')$. В силу леммы 2 из [3] $f(\Omega')$ имеет единственную максимальную s-подформацию $\mathfrak{C} = s\,\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G. Тогда $b(\Omega') \subseteq \mathfrak{C} = h(\Omega')$. Поэтому и в этом случае $b \le h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $h \le f$ и $h(\Omega') \subset f(\Omega')$, то $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная $\Omega\,c\,s$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 52.44 из [12] G является критической и, значит, s-критической группой. Тогда в силу определения G — $\Omega\,c\,s$-базисная группа. Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\Omega c\theta}$-критическая формация и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, G \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, G$ не содежится в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \Omega c\theta\,\mathrm{form}\, G$. Пусть $\mathcal{K}(P) = (A)$. Согласно лемме 5 формация $\mathfrak{H}$ имеет максимальный внутренний $\Omega c\theta$-спутник h, причем $h(A) = \mathfrak{H}$ для любого A из $\{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \varphi(Z_p)$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$, где φ — минимальный $\Omega c\theta$-спутник формации $\mathfrak{H}$. В силу следствия 5 из [6] можем считать, что $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$.

Пусть $A \in \Omega$. Тогда $P \subseteq O_\Omega(G)$ и, значит, $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Допустим, что $f(A) \subseteq h(A)$. Тогда каждый главный A-фактор группы G h-централен в G. Пусть $B \in (\Omega \cap \mathcal{K}(G)) \setminus (A)$. В силу леммы 2.8 из [9] $F_B(G/P) = F_B(G)/P$ и $G/F_B(G) \cong (G/P)/F_B(G/P) \in h(B)$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $f(A)$ не содержится в $h(A)$. Пусть $h(A) = \varnothing$. Тогда в силу леммы 5 $A \cong Z_p$, а из леммы 1 следует, что $Z_p \notin \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ и, значит, $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $Z_p \in \mathcal{K}(G)$, то $f(Z_p) \ne \varnothing$. Поскольку $\mathfrak{F} \ne \varnothing$, то $f(\Omega') \ne \varnothing$ и $Z_p \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G \cong A$ и согласно лемме 1 $f(A) = \theta\,\mathrm{form}\,(A/A)$ — атом решетки θ, т. е. $f(A)$ имеет собственную лишь пустую θ-подформацию. Поэтому $f(A)$ является $h(A)_\theta$-критической формацией.

Пусть $h(A) \ne \varnothing$ и $\mathfrak{M}$ — собственная θ-подформация формации $f(A)$. Допустим, что $\mathfrak{M}$ не содержится в $h(A)$ и $B \in \mathfrak{M} \setminus h(A)$ — группа минимального порядка с таким свойством. Тогда B — монолитическая группа. Пусть A — абелева p-группа. В силу леммы 5 $h(A) = \mathfrak{N}_p h(A)$. Поэтому $O_p(B) = 1$. Согласно лемме 18.8 из [9] существует точный неприводимый $F_p[B]$-модуль R. Пусть $H = [R]B$. Поскольку $H/O_p(H) \cong B \in f(A)$, то вследствие леммы 3 $H \in \mathfrak{N}_p f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, H = \mathfrak{F}$. Тогда согласно лемме 1 $f(A) = \theta\,\mathrm{form}\,(H/F_A(H)) = \theta\,\mathrm{form}\, B \subseteq \mathfrak{M} \subset f(A)$. Получили противоречие. Следовательно, $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, H \subset \mathfrak{F}$. Тогда по условию $\Omega c\theta\,\mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{F}$ и в силу леммы 1 $H/F_A(H) \cong B \in h(A)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$ и $f(A)$ является $h(A)_\theta$-критической формацией.

Пусть $A \notin \Omega$. Тогда $O_\Omega(G) = 1$ и согласно лемме 1 $f(\Omega') = \theta\,\mathrm{form}\, G$. Поскольку $G \notin \mathfrak{H}$, то $f(\Omega')$ не содержится в $\mathfrak{H} = h(\Omega')$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная θ-подформация формации $f(\Omega')$ и $\mathfrak{F}_1 = \Omega c\theta\,\mathrm{form}\, \mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{B} \subseteq f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть f_1 — минимальный $\Omega c\theta$-спутник формации $\mathfrak{F}_1$. В силу леммы 2 $f_1 \le f$. Согласно лемме 1 $f_1(\Omega') = \theta\,\mathrm{form}\,(B/O_\Omega(B) \mid B \in \mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B} \subset f(\Omega')$ и в силу леммы 2 $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Тогда по условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Следовательно, $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\theta$-критической формацией.

Достаточность. Поскольку $G \notin \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная $\Omega c\theta$-подформация из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный $\Omega c\theta$-спутник. Согласно лемме 2 $b \leq f$. Покажем, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega$. Тогда по условию $f(A)$ является $h(A)_\theta$-критической формацией. Допустим, что $b(A) = f(A)$. Если A — неабелева группа, то $F_A(G) = 1$ и согласно лемме 1 $f(A) = \theta \operatorname{form} G$. Поэтому $G \in b(A) \subseteq \mathfrak{B}$ и, значит, $\mathfrak{F} = \Omega c\theta \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Значит, A — абелева p-группа. Аналогично, как при доказательстве леммы 7 [4, с. 13] (строки 14–28), получим противоречие. Следовательно, $b(A) \subset f(A)$. Так как по условию $f(A)$ является $h(A)_\theta$-критической формацией и $b(A)$ — θ-формация, то $b(A) \subseteq h(A)$. Пусть $C \in \Omega \cap (\mathcal{K}(\mathfrak{F}) \setminus (A))$. Поскольку $G/P \in \mathfrak{H}$, то

$$(G/P)/F_C(G/P) = (G/P)/(F_C(G)/P) \cong G/F_C(G) \in h(C).$$

Поэтому $b(C) \subseteq f(C) = \theta \operatorname{form}(G/F_C(G)) \subseteq h(C)$. Далее,

$$b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) \subseteq \theta \operatorname{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega').$$

Поскольку согласно лемме 1 $f(C) = \varnothing$ любого $C \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, то $b(C) \subseteq$ $\subseteq h(C)$ для любого C из $\{\Omega'\} \cup \Omega$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $A \notin \Omega$. Тогда по условию $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\theta$-критической формацией. Далее, $P \subseteq F_C(G)$ для всех $C \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем $b(C) \subseteq h(C)$ для любого $C \in \Omega$. Допустим, что $b(\Omega') = f(\Omega')$. Поскольку $O_\Omega(G) = 1$, то в силу леммы 1 $f(\Omega') =$ $= \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) = \theta \operatorname{form}(G)$. Тогда $G \in b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Значит, $b(\Omega') \subset f(\Omega')$ и по условию $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega c\theta}$-критической формацией. Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *Пусть f — минимальный Ωc-спутник формации $\mathfrak{F}$, h — максимальный внутренний Ωc-спутник непустой формации $\mathfrak{H}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega c}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega c \operatorname{form} G$, где G — монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и либо $f(A)$ является $h(A)$-критической формацией при $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической формацией при $\mathcal{K}(P) \not\subseteq \Omega$.*

Доказательство. Пусть θ — множество всех формаций групп. Тогда $\Omega c\theta \subseteq \theta$, $\mathfrak{N}_p\theta \subseteq \theta$ для всех простых p, формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ являются $\Omega c\theta$-формациями соответственно с минимальным $\Omega c\theta$-спутником f и максимальным внутренним $\Omega c\theta$-спутником h. Применив теорему 1, получим требуемые утверждения. Следствие доказано.

Замечание. Пусть θ — множество всех (нормально) наследственных формаций. Тогда согласно лемме 7 $\Omega c\theta \subseteq \theta$. Поскольку произведение двух (нормально) наследственных формаций является (нормально) наследственной формацией, то $\mathfrak{N}_p\theta \subseteq \theta$. Поэтому из теоремы 1 получаем следствия для Ωcs-формаций (Ωcsn-формаций) $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, подобные следствию 3. Приведем лишь одно из них.

***Следствие* 4.** *Пусть f — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{F}$, а h — максимальный внутренний Ωcs-спутник непустой формации $\mathfrak{H}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ =*

$= \Omega cs \operatorname{form} G$, *где* G — *монолитическая группа из* $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ *с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$ *и либо* $f(A)$ *является* $h(A)$-*критической формацией при* $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega$, *либо* $f(\Omega')$ *является* $h(\Omega')$-*критической формацией при* $\mathcal{K}(P) \not\subseteq \Omega$.

Доказательство теоремы **2.** Пусть $G \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{H}$ и группа G минимального порядка с таким свойством. Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то $G = 1$ и в силу примера 1 получим, что (1) является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией. Пусть $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{X}$ — множество всех подгрупп группы G. Ясно, что $(\mathfrak{X})$ является наследственным классом и $\mathfrak{L} = \Omega cs \operatorname{form} G = \Omega cs \operatorname{form} (\mathfrak{X})$. Согласно лемме 7 $\mathcal{K}(\mathfrak{L}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Поскольку множество $\mathfrak{X}$ конечное и каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет конечное множество композиционных факторов, то $\mathcal{K}(\mathfrak{L})$ содержит лишь конечное множество попарно неизоморфных групп. Тогда в силу лемм 1, 2 и леммы 8.8 из [9] формация 2 содержит лишь конечное множество Ωcs-подформаций. Поэтому в $\mathfrak{L}$ существует минимальная Ωcs-подформация $\mathfrak{F}$, не содержащаяся в $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, а каждая собственная Ωcs-подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$, то согласно определению $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией. Теорема доказана.

Доказательство теоремы **3.** *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией и f — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 4 $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G$, где G — такая монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $f(A)$ является $h(A)_s$-критической формацией при $\mathcal{K}(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_s$-критической формацией, если $\mathcal{K}(P)$ не содержится в Ω.

Пусть A — неабелева группа. Так как в силу следствия 5 из [6] $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, то $A \notin \Omega$ и в силу леммы 8 G является Ωcs-базисной группой. Из $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критичности формации $\mathfrak{F}$ следует, что максимальная Ωcs-подформация $\mathfrak{B}$ формации $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$. Согласно лемме 8 $\mathfrak{B}$ имеет внутренний Ωc-спутник b такой, что $b(\Omega') = s \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G, а вследствие леммы 5 $h(\Omega') = \mathfrak{H}$. Поэтому $s \operatorname{form} \mathfrak{X} \subseteq h(\Omega')$. Следовательно, G — минимальная не $h(\Omega')$-группа и G — группа типа 2.

Пусть A — абелева группа. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $A \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega cs \operatorname{form} A \subseteq \mathfrak{F}$. Если $A \notin \mathfrak{H}$, то $\Omega cs \operatorname{form} A$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией, то $\Omega cs \operatorname{form} A = \mathfrak{F}$. Поэтому $G = P$ — группа простого порядка p. Ввиду 51.34 из [12] группа G является критической и, значит, s-критической. Если $G \in \Omega$, то $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G = \mathfrak{N}_p$ содержит единственную максимальную Ωcs-подформацию $\mathfrak{M} = (1)$. По определению G является Ωcs-базисной группой и, значит, G — группа типа 1. Пусть $G \notin \Omega$. Тогда в силу примера 1 получим $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G = \operatorname{form} G$ и опять $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную Ωcs-подформацию $\mathfrak{M} = (1)$. Поэтому G является Ωcs-базисной группой типа 1.

Пусть $A \in \mathfrak{H}$ и $A \notin \Omega$. Тогда $P < G$, $O_{\Omega}(G) = 1$ и согласно лемме 1 $f(\Omega') = s \operatorname{form} G$. В силу леммы 5 $h(\Omega') = \mathfrak{H}$ и, значит, $f(\Omega')$ является $\mathfrak{H}_s$-критической формацией. Пусть $F \in f(\Omega') \setminus \mathfrak{H}$ и группа F минимального порядка с таким свойством. Тогда F — монолитическая группа, $s \operatorname{form} F \subseteq f(\Omega')$ и $s \operatorname{form} F$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Поэтому $f(\Omega') = s \operatorname{form} F$. Так как $F \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} F$. Значит, в качестве группы G можно выбрать группу F. Тогда каждый собственный фактор группы G принадлежит $f(\Omega')$ и, значит, $\mathfrak{H}$. Следовательно, $s \operatorname{form} \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{L}$ — множество всех собственных факторов группы G. Поэтому $G \notin s \operatorname{form} \mathfrak{L}$ и согласно определению G является s-критической группой. Покажем, что G является s-базисной группой. Согласно лемме 8.8 из [9] $f(\Omega') = s \operatorname{form} G$ содержит лишь конечное множество

s-подформаций. Пусть $\mathfrak{R}$ — максимальная s-подформация формации $f(\Omega')$, $\mathfrak{F}_1 = \Omega cs \operatorname{form} \mathfrak{R}$ и f_1 — минимальный Ωcs-спутник формации $\mathfrak{F}_1$. Поскольку $\mathfrak{R} \subseteq f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда в силу леммы 2 $f_1 \leq f$. Согласно лемме 1 $f_1(\Omega') = s \operatorname{form}(R/O_\Omega(R) \mid R \in \mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R} \subset f(\Omega')$ и, значит, вследствие леммы 2 $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критичности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому и $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим, что $f(\Omega')$ содержит две различные максимальные s-подформации $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$. Тогда $f(\Omega') = s \operatorname{form}(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}_1) \subseteq \mathfrak{H}$, а значит, $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $f(\Omega')$ содержит единственную максимальную s-подформацию и по определению G является s-базисной группой. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество всех подгрупп группы G Тогда $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form}(\mathfrak{D})$. Поскольку $(\mathfrak{D})$ является наследственным классом, то в силу леммы 7 $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \mathcal{K}(\mathfrak{D})$; так как $\mathfrak{D}$ является конечным множеством и каждая группа из $\mathfrak{D}$ имеет конечное множество композиционных факторов, то $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ содержит конечное число попарно неизоморфных простых групп. Согласно лемме 8.8 из [9] $s \operatorname{form} H$ содержит лишь конечное множество наследственных подформаций для любой конечной группы H. Применяя леммы 1 и 2, заключаем, что $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество Ωcs-подформаций. Допустим, что $\mathfrak{F}$ имеет две различные максимальные Ωcs-подформации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Тогда по условию $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, и $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную Ωcs-подформацию. По определению G является Ωcs-базисной группой и G — группа типа 3.

Пусть $A \in \mathfrak{H} \cap \Omega$ и $|A| = p$. Тогда $f(A)$ является $h(A)_s$-критической формацией. Пусть H — группа наименьшего порядка из $f(A) \setminus h(A)$ и $\mathfrak{K}$ — множество всех собственных секций группы H. Тогда H — монолитическая минимальная не $h(A)$-группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ и $\mathfrak{K} \subseteq h(A)$. Так как $H \notin h(A)$, то $H \notin s \operatorname{form} \mathfrak{K}$ и, значит, H является s-критической группой. В силу леммы 5 $h(A) = \mathfrak{N}_p h(A)$. Поэтому $O_p(H) = 1$ и согласно лемме 18.8 из [9] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль M. Пусть $R = [M]H$. Из $R/O_p(R) \in f(A)$ согласно лемме 3 следует, что $R \in \mathfrak{N}_p f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $R \in \mathfrak{H}$. Тогда в силу леммы 1 $R/F_A(R) \cong H \in h(A)$, что невозможно. Следовательно, $R \notin \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} R$. Как при доказательстве теоремы 1 [4, с. 15] (строки 8–16), нетрудно показать, что H является s-базисной группой. Теперь в силу леммы 9 R является Ωcs-базисной группой и $G = R$ является группой типа 4.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G$, где G — Ωcs-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ типа 1 – 4. Из $G \notin \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией.

Пусть G — группа типа 1, т. е. $G = P$ и $G \cong Z_p$. Если $Z_p \in \Omega$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную Ωcs-подформацию $\mathfrak{M} = (1)$. Поскольку $(1) \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ является Ωcs-критической формацией. Пусть $Z_p \notin \Omega$. Тогда в силу примера 1 $\mathfrak{F} = \Omega cs \operatorname{form} G = \operatorname{form} G$ и опять $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную Ωcs-подформацию $\mathfrak{M} = (1)$ и, значит, формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической.

Пусть G — группа типа 2. Тогда $G^{\mathfrak{H}} = P$ — неабелева группа, $\mathcal{K}(P) = (A)$ и $A \notin \Omega$. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G. Так как G — минимальная не $h(\Omega')$-группа, то $\mathfrak{X} \subseteq h(\Omega')$ и, значит, $s \operatorname{form} \mathfrak{X} \subseteq h(\Omega')$. Согласно лемме 1 $f(\Omega') = s \operatorname{form} G$, а в силу леммы 2 из [3] $f(\Omega')$ содержит единственную максимальную s-подформацию $s \operatorname{form} \mathfrak{X}$. Следовательно, $f(\Omega')$

является $h(\Omega')$-критической формацией. Тогда согласно следствию 4 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией.

Пусть G — группа типа 3. В силу леммы 1 $f(\Omega') = s\,\mathrm{form}\,G$. Так как $G \notin h(\Omega')$, то $f(\Omega')$ не содержится в $h(\Omega')$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная s-подформация из $f(\Omega')$. Поскольку G — s-базисная группа, то по определению $f(\Omega')$ имеет единственную максимальную s-подформацию $\mathfrak{N}$, причем $\mathfrak{N} \subseteq h(\Omega')$. Тогда $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq h(\Omega')$ и, значит, $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической формацией. Теперь согласно следствию 4 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией.

Пусть G — группа типа 4. Пусть $\mathcal{K}(P) = (A)$ и $A \cong Z_p$. Допустим, что $H \in h(A)$. Тогда в силу леммы 3 $G \in \mathfrak{N}_p h(A) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $H \notin h(A)$. Так как $C_G(P) = P$, то $F_A(G) = P$ и согласно лемме 1 $f(A) = s\,\mathrm{form}\,(G/P) = s\,\mathrm{form}\,H$ не содержится в $h(A)$. По условию H — s-базисная группа и единственная максимальная s-подформация $\mathfrak{M}$ из $s\,\mathrm{form}\,H$ содержится в $h(A)$. Отсюда следует, что $f(A)$ является $h(A)_s$-критической формацией и согласно следствию 4 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega cs}$-критической формацией. Теорема доказана.

1. *Шеметков Л. А.* Экраны ступенчатых формаций // VI Всесоюз. симп. по теории групп. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 37–50.
2. *Скиба А. Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 250–268.
3. *Селькин В. М., Скиба А. Н.* О наследственных критических функциях // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, №5. – С. 1145–1153.
4. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Композиционные наследственные критические формации // Вопросы алгебры. – 1997. – Вып. 11. – С. 6–19.
5. *Коптюх Д. Г.* Частично композиционные критические формации // Тез. докл. Междунар. конф. Симметрия в естествознании. – Красноярск, 1998. – С. 68–69.
6. *Ведерников В. А., Коптюх Д. Г.* Частично композиционные формации групп // Вопросы алгебры. – 1999. – Вып. 15.
7. *Ведерников В. А., Коптюх Д. Г.* Ω–композиционные наследственные критические формации // Тез. докл. Второй междунар. алгебр. конф. в Украине, посв. памяти проф. Калужнина. – Киев; Винница, 1999. – С. 61.
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
9. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
10. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск: Белар. навука, 1997. – 240 с.
11. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.
12. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1969. – 264 с.
13. *Ведерников В. А.* Элементы теории классов групп. – Смоленск: СГПИ, 1988. – 96 с.

Получено 05.07.99