УДК 517.5

Н. В. Парфинович (Днепропетров. ун-т)

О ТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ НАИЛУЧШИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ

We find the exact asymptotics (as $n \to \infty$) of the best L_1-approximations of classes W_1^r of periodic functions by splines $s \in S_{2n,r-1}$ and $s \in S_{2n,r+k-1}$ ($S_{2n,r}$ is a set of 2π-periodic polynomial splines of order r with defect 1 and knots at the points $k\pi/n$, $k \in \mathrm{Z}$) under restrictions on their derivatives.

Знайдено точну асимптотику (при $n \to \infty$) найкращих L_1-наближень класів W_1^r періодичних функцій сплайнами $s \in S_{2n,r-1}$ та $s \in S_{2n,r+k-1}$ ($S_{2n,r}$ — множина 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r, дефекту 1 з вузлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathrm{Z}$) з обмеженнями на їх похідні.

1. Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ с соответствующими нормами $\|f\|_p$. Если $r \in \mathrm{N}$, то через W_p^r обозначим класс функций $f \in L_p$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ $\left(f^{(r-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}\right)$ и таких, что $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$; $W^r V$ — класс функций $f \in L_p$ таких, что $f^{(r-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}$ и $\mathrm{V}_0^{2\pi}\left(f^{(r)}\right) \le 1$. Кроме того, пусть $S_{2n,r}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathrm{Z}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике пространства L_p — это величина

$$E(f, H)_p \;:=\; \inf\left\{\|f - h\|_p \colon h \in H\right\}.$$

Наилучшее приближение класса функций $M \subset L_p$ множеством H в метрике L_p определяется равенством

$$E(M, H)_p \;:=\; \sup\left\{E(f, H)_p \colon f \in M\right\}.$$

Величина

$$d_n\left(M, L_p\right) \;:=\; \inf\left\{E(M, H_n)_p \colon H_n \text{ — подпространство } L_p,\ \dim H_n \le n\right\}$$

называется n-поперечником по Колмогорову [1] класса M в пространстве L_p. Пусть еще $M' \subset L_p$ — некоторый класс функций. Положим

$$d_n\left(M, L_p, M'\right) \;:=$$

$$:=\; \inf\left\{E\left(M, H_n \cap M'\right)_p \colon H_n \text{ — подпространство } L_p,\ \dim H_n \le n\right\}.$$

Величины типа $d_n\left(M, L_p, M'\right)$ введены В. Н. Коноваловым [2].

Хорошо известно (см., например, [3, с. 249]), что для классов функций одной переменной при всех $r \in \mathrm{N}$ и $p \in [1, \infty]$

$$d_n\left(W_p^r, L_p\right) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Ясно также, что при любом $r \in \mathrm{N}$

$$d_n\left(W_2^r, L_2, W_2^r\right) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Вместе с тем в работах [2, 4] показано, что в отличие от (1) и (2), при всех $r=2, 3, \ldots$

$$d_n\left(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r\right) \asymp n^{-2}, \quad n\to\infty,$$

и

$$d_n\left(W_1^r, L_1, W_1^r\right) \asymp n^{-2}, \quad n\to\infty. \tag{3}$$

Кроме того, в работах [4, 5] найдены точные значения величин $E\left(W_1^r, S_{2n,r-1}\cap W^{r-1}V\right)_1$ и $E\left(W_1^r, S_{2n,r}\cap W_1^r\right)_1$. С. Б. Стечкин высказал предположение, что при любом фиксированном $\varepsilon>0$ при всех $r=2, 3, \ldots$

$$d_n\left(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon)W_\infty^r\right) \asymp n^{-r}, \quad n\to\infty.$$

В. Ф. Бабенко [6] установил справедливость этой гипотезы, а в [7] получил аналогичные результаты для поперечников $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon)W^{r-1}V\right)$; при этом в [7] показано, что если $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, то при всех $r=3, 4, \ldots$ и $n\to\infty$

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W^{r-1}V\right)_1 \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon_n^{1-r/2}, & \varepsilon_n n^2\to\infty; \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1). \end{cases}$$

В. Ф. Бабенко и Н. В. Парфинович [8] нашли точную асимптотику при $n\to\to\infty$ для последовательности величин $E\left(W_1^r, S_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W^{r-1}V\right)_1$ в случае, когда $\varepsilon_n n^2\to\infty$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$:

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W^{r-1}V\right)_1 = \frac{C_r}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{\pi^2\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{4r}\right)^{r/2}\left(\frac{r-2}{2\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\right)^{r/2-1}.$$

В п. 2 данной статьи будет доказана следующая теорема, которая дополняет результат, полученный в [8].

Теорема 1. *Пусть* $r=3, 4, \ldots$, $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел такая, что* $\varepsilon_n n^2 = O(1)$ *при* $n\to\infty$, *причем существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n n^2 := A(\varepsilon)$. *Положим*

$$M = \frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty},$$

$$A_r = \left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty[M - A(\varepsilon)]$$

и

$$B_r = \frac{2}{r-2}\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty(A(\varepsilon))^{1-r/2}\left[\frac{r-2}{r}M\right]^{r/2}.$$

Тогда при $n\to\infty$ *справедливы следующие соотношения: если*

$$A(\varepsilon) \le \frac{r-2}{r}M,$$

то

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W^{r-1} V\right)_1 = \frac{A_r}{n^2}(1+o(1));$$

если

$$A(\varepsilon) > \frac{r-2}{r} M,$$

то

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W^{r-1} V\right)_1 = \frac{B_r}{n^2}(1+o(1)),$$

когда

$$A(\varepsilon) = \frac{r-2}{r} M K^2, \quad K \in \mathrm{N},$$

и

$$\frac{B_r}{n^2}\left(1 - \left(\frac{r-2}{r}\frac{1}{A(\varepsilon)} M\right)^{1/2}\right)^r (1+o(1)) \le$$

$$\le E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W^{r-1} V\right)_1 \le \frac{B_r}{n^2}(1+o(1)),$$

когда

$$A(\varepsilon) \ne \frac{r-2}{r} M K^2, \quad K \in \mathrm{N}.$$

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. В [9] найден точный порядок $(n \to \infty)$ величин $E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1$ при всех $r, k \in \mathrm{N}$, $r \ge 2$:

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1 \ge C > 0,$$

если последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1 \asymp \frac{1}{\varepsilon_n^{r/k} n^r},$$

если $\alpha_n \to \infty$, $\alpha_n = \varepsilon_n n^k$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, и, наконец,

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1 \asymp \frac{1}{n^r},$$

если $\alpha_n \ge C n^k$, $C > 0$.

В случае $\alpha_n \to \infty$, $\alpha_n = \varepsilon_n n^k$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ Н. В. Парфинович [10] была получена асимптотика для последовательности величин $E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1$:

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\right)_1 = \frac{C_{r,k}}{\varepsilon_n^{r/k} n^r}(1+o(1)),$$

где

$$C_{r,k} = \frac{k}{r+k}\|\varphi_{1,r}\|_\infty \left(\frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty}\frac{r}{r+k}\right)^{r/k}.$$

Следующая теорема дополняет результат, полученный в [10].

Теорема 2. *Пусть* $n, r, k \in \mathrm{N}$, $r \geq 2$ *и* $\alpha_n = \varepsilon_n n^k$, *где* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ *— последовательность положительных чисел, причем существует конечный и строго положительный или бесконечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n := C(\varepsilon)$. *Положим*

$$L = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,1}\|_\infty \|\varphi_{1,r+k-1}\|_\infty}.$$

Тогда если $C(\varepsilon) > rL$, *то при всех* $n \in \mathrm{N}$ *таких, что* $\varepsilon_n > rL$,

$$E\Big(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\Big)_1 = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r};$$

если $C(\varepsilon) = rL$, *то при* $n \to \infty$

$$E\Big(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\Big)_1 = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r}(1 + o(1));$$

если $C(\varepsilon) < rL$, *то при* $n \to \infty$

$$E\Big(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1} V\Big)_1 =$$

$$= \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r}\left(\frac{2}{\pi}x_0\right)^{-r}\left\{1 - \frac{\varphi_{1,r+k}(x_0)}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}\left(\frac{2}{\pi}x_0\right)^{-k} C(\varepsilon)\right\}(1 + o(1)),$$

где x_0 *— единственное решение уравнения*

$$r\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \|\varphi_{1,r}\|_\infty x^k = C(\varepsilon)\Big((r+k)\varphi_{1,r+k}(x) - x\varphi_{1,r+k-1}(x)\Big)$$

в интервале $(0, \pi/2)$.

Доказательство теоремы 2 будет дано в п. 3.

2. ***Доказательство теоремы*** **1.** Положим

$$E_n = E\Big(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W^{r-1} V\Big)_1.$$

Так же, как и в [7], устанавливаем, что

$$E_n \leq \sup_{1 \leq \lambda \leq n}\left\{\varphi_{\lambda,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\} = \sup_{1 \leq \lambda \leq n} F_n(\lambda).$$

Предполагаем r таким, что $\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \varphi_{\lambda,r}(0)$.

Исследуем $F_n(\lambda)$ на экстремум на промежутке $(0, n]$:

$$F_n'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\left[\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right] - \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right).$$

Необходимое условие экстремума $F_n'(\lambda) = 0$ запишем в виде

$$-(1+\varepsilon_n)\frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) = r\left[\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right]. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_n(\lambda) = \lambda^{r+1} F_n'(\lambda),$$

производная которой имеет вид

$$\Phi_n'(\lambda) = r(1+\varepsilon_n)\frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) -$$

$$- (1+\varepsilon_n)\frac{\pi}{2n}\frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\left[(r-1)\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\left[(r-1)\int\limits_0^{\lambda\pi/(2n)}\varphi_{1,r-2}(t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right]. \qquad (5)$$

При $r > 3$ функция $\varphi_{1,r-2}(t)$ выпукла вниз на отрезке $[0, \pi/2]$. Отсюда и из (5) следует, что $\Phi_n'(\lambda) < 0 \;\; \forall\, \lambda \in (1, n)$.

Если $r = 3$, справедливость неравенства $\Phi_n'(\lambda) < 0$ следует из того, что функция $\varphi_{1,r-2}(t) = \varphi_{1,1}(t)$ линейна на $[0, \pi/2]$ и, монотонно возрастая с ростом t, стремится к нулю при $t \to \pi/2 - 0$.

Ясно, что $\Phi_n(0) > 0 \;\forall\, n \in \mathrm{N}$. Для $\Phi_n(n)$ имеем

$$\Phi_n(n) = (1+\varepsilon_n)\left[r\int\limits_0^{\pi/2}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0).$$

Функция $\varphi_{1,r-1}(t)$ выпукла вниз на отрезке $[0, \pi/2]$ при $r \geq 3$. Поэтому с учетом того, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, при достаточно больших n $\Phi_n(n) < 0$. Таким образом, при $r \geq 3$ и достаточно больших n условие (4) выполняется в единственной точке $\lambda_n \in (1, n)$, причем λ_n — точка максимума.

В [7] доказано, что

$$c_1\varepsilon_n \leq \left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \leq c_2\varepsilon_n,$$

где c_1, c_2 — положительные константы. При достаточно больших n можем записать

$$\tilde{c}_1\sqrt{A(\varepsilon)} \leq \lambda_n \leq \tilde{c}_2\sqrt{A(\varepsilon)},$$

$\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ — положительные константы.

Поскольку $\lambda_n\pi/(2n) \to 0$ при $n \to \infty$, то, используя разложения функций $\varphi_{1,r-1}(t)$ и $\varphi_{1,r}(t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки 0, (4) перепишем в виде

$$-\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r-2}(0)(1+o(1)) =$$

$$= r\left[\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\left(\varphi_{1,r}(0) + \frac{\varphi_{1,r-2}(0)}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2(1+o(1))\right)\right]$$

или

$$(1+\varepsilon_n)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\left(\frac{r-2}{2}\right)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty(1+o(1)) = r\varepsilon_n\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty.$$

Отсюда для λ_n^2 получаем

$$\lambda_n^2 = \frac{r}{r-2}\frac{A(\varepsilon)}{M}(1+o(1)).$$

Если $\lambda_n \leq 1$ или

$$A(\varepsilon) \leq \frac{r-2}{r}M,$$

то

$$E_n \le \max_{1\le\lambda\le n} F_n(\lambda) = F_n(1) =$$

$$= \left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty - (1+\varepsilon_n)\left[\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{2}(1+o(1))\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty - A(\varepsilon)\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty(1+o(1))\right] =$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^2}\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty [M - A(\varepsilon)].$$

Если

$$A(\varepsilon) > \frac{r-2}{r} M,$$

т. е. $\lambda_n > 1$, то

$$E_n \le \max_{1\le\lambda\le n} F_n(\lambda) = F_n(\lambda_n) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r}\left[-\varepsilon_n\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty + \frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2(1+o(1))\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{1}{\lambda_n^r}\left[\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty\lambda_n^2 - A(\varepsilon)\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty\right](1+o(1)) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{r-2}{r}\frac{M}{A(\varepsilon)}(1+o(1))\right]^{r/2} \times$$

$$\times\left[\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty\frac{r}{r-2}\frac{A(\varepsilon)}{M}(1+o(1)) - A(\varepsilon)\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty\right](1+o(1)) =$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^2}\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty (A(\varepsilon))^{1-r/2}\frac{2}{r-2}\left[\frac{r-2}{r}M\right]^{r/2}.$$

Необходимые оценки сверху для E_n получены.

Получим для E_n оценки снизу. В [8] установлено, что

$$E_n \ge \max_{1\le l\le n} F_n(l) = \max_{1\le l\le n}\frac{1}{l^r}\left\{\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{l\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Если

$$A(\varepsilon) \le \frac{r-2}{r} M,$$

то

$$A(\varepsilon) \ge F_n(1) = \frac{1+o(1)}{n^2}\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty [M - A(\varepsilon)].$$

Если

$$A(\varepsilon) > \frac{r-2}{r} M$$

и

$$A(\varepsilon) = \frac{r-2}{r} MK^2, \quad K \in \mathrm{N},$$

т. е. $\lambda_n = K(1+o(1))$ при достаточно больших n, то

$$E_n \geq F_n(K) = \frac{1+o(1)}{\lambda_n^r}\left\{\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda_n(1+o(1))\pi}{2n}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^2}\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty (A(\varepsilon))^{1-r/2}\frac{2}{r-2}\left[\frac{r-2}{r}M\right]^{r/2}.$$

Если

$$A(\varepsilon) \neq \frac{r-2}{r}MK^2, \quad K \in \mathrm{N},$$

то выберем $l \in \mathrm{N}$ так, чтобы было

$$l-1 < \lambda_n < l.$$

В этом случае

$$E_n \geq F_n(l) = \frac{1}{l^r}\left\{\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{l\pi}{2n}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{l^r}\left\{-\varepsilon_n\varphi_{1,r}(0) + (1+\varepsilon_n)\left(\frac{l\pi}{2n}\right)^2\frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{2}(1+o(1))\right\} =$$

$$= \left(\frac{l-1}{l}\right)^r\frac{1}{(l-1)^r}\left\{-\varepsilon_n\varphi_{1,r}(0) + (1+\varepsilon_n)\frac{l^2}{n^2}\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty(1+o(1))\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1+o(1)}{n^2}\left(\frac{l-1}{l}\right)^r\frac{1}{\lambda_n^r}\left[\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,2}\right\|_\infty\lambda_n^2 - A(\varepsilon)\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty\right] \geq$$

$$\geq \frac{1+o(1)}{n^2}\left(1-\frac{1}{\lambda_n}\right)^r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty(A(\varepsilon))^{1-r/2}\frac{2}{r-2}\left[\frac{r-2}{r}M(1+o(1))\right]^{r/2} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^2}\left(1-\left(\frac{r-2}{r}\frac{M}{A(\varepsilon)}\right)^{1/2}\right)^r B_r.$$

Необходимые оценки снизу получены. Теорема доказана.

3. ***Доказательство теоремы 2.*** Как и выше, для сокращения записей положим

$$E_n = E\left(W_1^r, S_{2n,r+k-1} \cap \alpha_n W^{r+k-1}V\right)_1.$$

В [9] установлено, что

$$E_n \leq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}\sup_{1\leq\lambda\leq n} G_n(\lambda),$$

где

$$G_n(\lambda) = \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{\lambda^r} - \beta_n\frac{\varphi_{1,r+k}(\lambda\pi/(2n))}{\lambda^{r+k}},$$

$$\beta_n = \alpha_n\frac{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}.$$

Здесь и далее r и k считаем таковыми, что $\varphi_{1,r+k}(0) = \left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty$. Для производной функции $G_n(\lambda)$ в [9] получено следующее:

$$G_n'(\lambda) = \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{\lambda^{r+k+1}}\left[-r\lambda^k + \beta_n(r+k)\right] +$$

$$+ \frac{\beta_n}{\lambda^{r+k+1}}\left[(r+k)\int_0^{\lambda\pi/(2n)}\varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right] \qquad (6)$$

и

$$G_n'(\lambda) = \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{\lambda^{r+k+1}}\left[-r\lambda^k + \beta_n(r+k) + \gamma_n\beta_n\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)^2\right],$$

где $|\gamma_n| \le C_1$, C_1 — некоторая константа. Введем в рассмотрение функцию

$$H_n(\lambda) = \frac{\lambda^{r+k+1}}{\varphi_{1,r+k}(0)}G_n'(\lambda)$$

и вычислим ее производную

$$H_n'(\lambda) = -rk\lambda^{k-1} + \frac{\pi}{n}\gamma_n\beta_n\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right). \qquad (7)$$

Поскольку при $r \ge 2$ функция $\varphi_{1,r+k-1}(t)$ выпукла вниз на $[0, \pi/2]$, то, как видно из (6), γ_n — величина отрицательная. Отсюда и из (7) заключаем, что $H_n'(\lambda) < 0$ для всех λ из $[1, n]$.

Из соотношения (6) следует, что

$$G_n'(n) = \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{n^{r+k+1}}\left[-rn^k + \beta_n(r+k)\right] +$$

$$+ \frac{\beta_n}{n^{r+k+1}}\left[(r+k)\int_0^{\pi/2}\varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt - \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{n^{r+k+1}}rn^k + \frac{\beta_n}{n^{r+k+1}}\left\|\varphi_{1,r+k-1}\right\|_\infty\left\|\varphi_{1,1}\right\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}}\left[-r\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty + \varepsilon_n\frac{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}{L}\right]. \qquad (8)$$

Из последнего выражения вытекает, что если $C(\varepsilon) > rL$, то при n таких, что $\varepsilon_n > rL$, $G_n'(n) > 0$. Таким образом, $\sup\limits_{1\le\lambda\le n} G_n(\lambda)$ достигается в точке n.

Теперь для E_n можем записать

$$E_n \le \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}\sup_{1\le\lambda\le n} G_n(\lambda) = \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}G_n(n) =$$

$$= \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}\frac{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}{n^r} = \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{n^r},$$

и нужная оценка сверху в данном случае получена.

Если $C(\varepsilon) = rL$, то с учетом (8) получаем $G_n'(n) = o\left(1/n^{r+1}\right)$, и, следовательно, $\sup\limits_{1\le\lambda\le n} G_n(\lambda)$ достигается в точке $\lambda_n = n - \mu_n$, где $\mu_n \ge 0$ и $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$E_n \leq \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} \sup_{1\leq\lambda\leq n} G_n(\lambda) = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} G_n(\lambda_n) =$$

$$= \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \|\varphi_{1,r+k}\|_\infty - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(\lambda_n \pi/(2n))}{\lambda_n^k} \right\} =$$

$$= \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} \frac{1}{(n-\mu_n)^r} \left\{ \|\varphi_{1,r+k}\|_\infty - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(\pi/2) + o(1)}{(n-\mu_n)^k} \right\} = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r}(1+o(1)).$$

Если $C(\varepsilon) < rL$, то, как видно из (8), при всех n таких, что $\varepsilon_n < rL$, будет $G_n'(n) < 0$. Используя (6), получаем

$$G_n'(1) = \varphi_{1,r+k}(0)[-r + \beta_n(r+k)] +$$

$$+ \beta_n \left[(r+k) \int_0^{\pi/(2n)} \varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt - \frac{\pi}{2n} \varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right].$$

Учитывая тот факт, что

$$\varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \asymp \frac{1}{n}$$

и

$$\int_0^{\pi/(2n)} \varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt \asymp \frac{1}{n^2}$$

при $n \to \infty$, видим, что при достаточно больших n $G_n'(1) > 0$. Таким образом, в этом случае $\sup\limits_{1\leq\lambda\leq n} G_n(\lambda)$ достигается в точке $\lambda_n \in (1, n)$, причем λ_n единственна.

Используя (6), можем записать необходимое условие экстремума для функции $G_n(\lambda)$:

$$-r\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty \lambda^k + \frac{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty^2}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \varepsilon_n n^k (r+k) +$$

$$+ \frac{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \varepsilon_n n^k \left\{ (r+k) \int_0^{\lambda\pi/(2n)} \varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{2n} \varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$-r\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \|\varphi_{1,r}\|_\infty + \varepsilon_n \|\varphi_{1,r+k}\|_\infty (r+k) + \varepsilon_n (r+k) \int_0^{\lambda\pi/(2n)} \varphi_{1,r+k-1}(t)\,dt -$$

$$- \varepsilon_n \frac{\lambda\pi}{2n} \varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) = 0,$$

или

$$r\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \|\varphi_{1,r}\|_\infty \left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)^k = \varepsilon_n (r+k) \varphi_{1,r+k}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \varepsilon_n \frac{\lambda\pi}{2n} \varphi_{1,r+k-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right). \quad (9)$$

Наряду с (9) рассмотрим уравнение

$$r\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \|\varphi_{1,r}\|_\infty x^k = C(\varepsilon)(r+k)\varphi_{1,r+k}(x) - C(\varepsilon) x \varphi_{1,r+k-1}(x). \quad (10)$$

Уравнение (9) на $[0, 2\pi]$ имеет единственное решение $\lambda_n \in (1, n)$. Покаж что уравнение (10) на $[0, 2\pi]$ также имеет единственное решение $x_0 \in (0, \pi/$

Рассмотрим на $[0, \pi/2]$ функцию

$$\psi(x) = r\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty x^k - C(\varepsilon)(r+k)\varphi_{1,r+k}(x) + C(\varepsilon)x\varphi_{1,r+k-1}(x)$$

и вычислим ее производную

$$\psi'(x) = kr\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty x^{k-1} -$$

$$- C(\varepsilon)(r+k-1)\int_0^x \varphi_{1,r+k-2}(t)\,dt + C(\varepsilon)x\varphi_{1,r+k-2}(x).$$

Поскольку при $r \geq 2$ функция $\varphi_{r+k-2}(t)$ выпукла вниз (линейна при r : $k = 1$) на $[0, \pi/2]$, то $\psi'(x) > 0$ для всех $x \in (0, \pi/2)$. Кроме того,

$$\psi(0) = -(r+k)\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty < 0$$

и

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty - C(\varepsilon)\frac{\pi}{2}\left\|\varphi_{r+k-1}\right\|_\infty > 0,$$

поэтому уравнение (10) на $[0, \pi/2]$ имеет единственное решение $x_0 \in (0, \pi$ Рассмотрим на $[0, \pi/2]$ функцию

$$\psi_n(x) = r\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty x^k - \varepsilon_n(r+k)\varphi_{1,r+k}(x) + \varepsilon_n x\varphi_{1,r+k-1}(x).$$

(Заметим, что условие $\psi_n(\lambda\pi/(2n)) = 0$ эквивалентно условию (9).) Ясно, последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к ψ при $n \to \infty$ $[0, \pi/2]$. Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется $n_0(\delta)$ такое, что при всех $\geq n_0(\delta)$ и при всех $x \in [0, \pi/2]$

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| < \min\left\{\frac{|\psi(x_0-\delta)|}{2}, \frac{|\psi(x_0+\delta)|}{2}\right\}.$$

Так как $\psi_n(\lambda_n\pi/(2n)) = \psi(x_0) = 0$, то с учетом монотонности функции ψ получаем $|x_0 - \lambda_n\pi/(2n)| < \delta$. Таким образом, для λ_n можем записать

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}x_0 n(1+o(1)), \qquad ($$

а для E_n получим

$$E_n \leq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} G_n(\lambda_n) =$$

$$= \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}\left\{\frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{\left(\frac{2}{\pi}x_0 n\right)^r}(1+o(1)) - \beta_n\frac{\varphi_{1,r+k}(x_0)}{\left(\frac{2}{\pi}x_0 n\right)^{r+k}}(1+o(1))\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}x_0\right)^{-r}\frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{n^r}\left\{1 - \frac{C(\varepsilon)}{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\left(\frac{2}{\pi}x_0\right)^{-k}\varphi_{1,r+k}(x_0)\right\}(1+o(1)).$$

Необходимые оценки сверху получены и в этом случае.

Перейдем к оценкам снизу. Так же, как и в [9], для любого $l \in \mathrm{N}$ и для любого $\tau \in \mathrm{R}$ имеем

$$E \geq \sup_{l\in\mathrm{N}} \sup_{\tau\in\mathrm{R}} \left\{ \left\| \varphi_{l,r} \right\|_\infty - \alpha_n \sup_{a\in A_n} \sum_{j=1}^{2n} a_j \varphi_{l,r+k}\left(\tau + \frac{j\pi}{n}\right) \right\} =$$

$$= \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \sup_{\tau\in\mathrm{R}} \sup_{1\leq l\leq n} \left\{ \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{l^r} - \beta_n \sup_{a\in A_n} \sum_{j=1}^{2n} a_j \varphi_{l,r+k}\left(\tau + \frac{j\pi}{n}\right) \right\}.$$

Здесь

$$A_n = \left\{ a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) \in \mathrm{R}^{2n} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{2n} a_j = 0,\ \sum_{j=1}^{2n} \left| a_j \right| \leq 1 \right\}.$$

Далее,

$$E_n \geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \max_{1\leq l\leq n} \sup_{\tau\in\mathrm{R}} \left\{ \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{l^r} - \beta_n \inf_{\lambda\in\mathrm{R}} \max_j \left| \varphi_{l,r+k}\left(\tau + \frac{j\pi}{n}\right) - \lambda \right| \right\} \geq$$

$$\geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \max_{1\leq l\leq n} \left\{ \frac{\varphi_{1,r+k}(0)}{l^r} - \beta_n \max_j \left| \varphi_{l,r+k}\left(\tau_0 + \frac{j\pi}{n}\right) \right| \right\},$$

где τ_0 выбрано так, чтобы максимум функции $\varphi_{l,r+k}(t+\tau_0)$ достигался в точке $\pi/(2n)$. Но при таком выборе τ_0

$$E_n \geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \max_{1\leq l\leq n} \left\{ \frac{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}{l^r} - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(l\pi/(2n))}{l^{r+k}} \right\} = \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \max_{1\leq l\leq n} G_n(l).$$

Поскольку при $C(\varepsilon) > rL$ $\max\limits_{1\leq l\leq n} G_n(l) = G_n(n)$, то

$$E_n \geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} G_n(n) = \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \left\{ \frac{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty}{n^r} - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(\pi/2)}{n^{r+k}} \right\} = \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{n^r}.$$

Пусть $C(\varepsilon) = rL$. Ясно, что $n-1 \leq \lambda_n \leq n$, где $\lambda_n = n - \mu_n$ ($\mu_n \geq 0$, $\mu_n \to \infty$ при $n \to \infty$) — точка максимума функции $G_n(n)$. Теперь для E_n получим

$$E_n \geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} G_n(n) \geq$$

$$\geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^r \frac{1}{(n-1)^r} \left\{ \left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(\pi/2) + o(1)}{n^k} \right\} \geq$$

$$\geq \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^r \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \left\|\varphi_{1,r+k}\right\|_\infty - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(\pi/2) + o(1)}{n^k} \right\} =$$

$$= \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{n^r} (1 + o(1)).$$

Если $C(\varepsilon) < rL$, то выберем $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы выполнялось

$$l - 1 \leq \lambda_n \leq l, \tag{12}$$

где $\lambda_n \in (0, n)$ — точка максимума функции $G_n(n)$. Тогда, учитывая (12), имеем

$$E_n \geq \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} G_n(l) = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty} \frac{1}{l^r} \left\{ \|\varphi_{1,r+k}\|_\infty - \beta_n \frac{\varphi_{1,r+k}(l\pi/(2n))}{l^k} \right\} =$$

$$= \|\varphi_{1,r}\|_\infty \frac{1}{(l-1)^r} \frac{(l-1)^r}{l^r} \left\{ 1 - \frac{C(\varepsilon) n^k}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \frac{\varphi_{1,r+k}(l\pi/(2n))}{l^k} (1+o(1)) \right\} \geq$$

$$\geq \|\varphi_{1,r}\|_\infty \frac{1}{(\lambda_n)^r} \frac{(l-1)^r}{l^r} \left\{ 1 - \frac{C(\varepsilon) n^k}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \frac{\varphi_{1,r+k}(\lambda_n \pi/(2n))}{\lambda_n^k} (1+o(1)) \right\}.$$

Так как $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а значит, и $l \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\left(\frac{(l-1)}{l} \right)^r \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, с учетом (11) будем иметь

$$E_n \geq \left(\frac{2}{\pi} x_0 \right)^{-r} \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r} \left\{ 1 - \frac{C(\varepsilon) n}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \left(\frac{2}{\pi} x_0 \right)^{-k} \varphi_{1,r+k}(x_0) \right\} (1+o(1)).$$

Необходимые оценки снизу получены. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В. Ф. Бабенко за помощь и внимание к работе.

1. *Колмогоров А. Н.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // Математика и механика: Избранные труды. – М.: Наука, 1985. – С. 186 – 189.
2. *Коновалов В. Н.* Оценка поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, вып. 3. – С. 369 – 380.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9 – 18.
5. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие L_1-приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1410 – 1413.
6. *Бабенко В. Ф.* О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, вып. 6. – С. 24 – 30.
7. *Бабенко В. Ф.* О наилучших L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там же. – 1992. – **51**, вып. 5. – С. 12 – 19.
8. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* О наилучших L_1-приближениях функциональных классов сплайнами при наличии ограничений на их производные // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 435 – 444.
9. *Бабенко В. Ф., Азар Л., Парфинович Н. В.* О приближении классов периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные. Ряды Фурье: теория и применение // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – Киев, 1998. – С. 18 – 29.
10. *Parfinovich N. V.* On the best approximation of classes of periodic functions by splines under restrictions on their derivatives // East. J. Approxim. – 1999. – **5**, № 3. – P. 267 – 278.

Получено 20.08.99