УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВ S_φ^p

We introduce linear vector spaces S_φ^p and study their approximation properties. As a the obtained general results, we deduce statements on approximation of classes of periodi functions by trigonometric polynomials.

Введено лінійні векторні простори S_φ^p, вивчаються їх апроксимаційні властивос док, з одержаних загальних результатів виводяться твердження про наближенн: дичних функцій багатьох змінних за допомогою тригонометричних поліномів.

1. Пространства S_φ^p. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное комплексное век странство и $\varphi = \{\varphi_k\}$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$, — фиксированная счетн: нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя векторов принадлежит φ, определено скалярное произведение $(x,$ творяющее известным условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — произвольные числ:
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ I равенств

$$\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X}: \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}.$$

При этом элементы $x, y \in S_\varphi^p$ отождествляются, если при всех $k \in$ $= \hat{y}_\varphi(k)$. Таким образом, множество S_φ^p порождается пространст: стемой φ и числом p.

Для векторов $f \in S_\varphi^p$ при $p \in [1, \infty)$ определим норму с помощь

$$\| f \|_p = \| f \|_{\varphi,p} = \left\| \hat{f}_\varphi \right\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Сразу же заметим, что если система $\varphi' = \{\varphi'_k\} = \{\varphi_{k_s}\}$, $s = 1,$: чена из системы φ путем любой перестановки ее членов, то в си справедливы равенства

$$S_\varphi^p = S_{\varphi'}^p \quad \text{и} \quad \| f \|_{\varphi,p} = \| f \|_{\varphi',p} \quad \forall f \in S_\varphi^p.$$

Множество S_φ^p — линейное пространство: операции сложения умножения их на числа, определенные во всем $\mathfrak{X}$, остаются пригод любой пары $x, y \in S_\varphi^p$ и для любых чисел λ и μ

$$\lambda x + \mu y = z \in S_\varphi^p.$$

Действительно, так как $x \in \mathfrak{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(x)$ и в силу неравенства Минковского

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{z}(k)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)|^p\right)^{1/p} \leq \lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p. \qquad (4)$$

Ясно также, что норма, введенная равенством (2), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поэтому S_φ^p — линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ.

Отметим еще одно из важнейших свойств пространств S_φ^p. Пусть

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \qquad (5)$$

— ряд Фурье элемента $f \in S_\varphi^p$ по системе φ и

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \quad n \in N,$$

— частные суммы этого ряда. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Среди всех сумм вида* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$ *при данном* $n \in N$ *наименее уклоняется от* $f \in S_\varphi^p$ *частичная сумма* $S_n(f)$. *При этом*

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p. \qquad (6)$$

Действительно, согласно (2) имеем

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\right\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_\varphi(k) - \alpha_k\right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p,$$

откуда и следует нужное утверждение.

При $n \to \infty$ правая часть в (6) стремится к нулю. Отсюда следует, что *для любого элемента* f *из* S_φ^p *его ряд Фурье* (5) *сходится к* f, т. е. система φ полна в S_φ^p и S_φ^p сепарабельно.

Приведем важную для дальнейшего конкретизацию этих построений.

Пусть R^m — m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m-множестве векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{xx})}$ и, в частности, $\boldsymbol{kx} = k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$, $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in R^m,\ -\pi \leq x_k \leq \pi,\ k = 1, \ldots, m\right\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{kx}}, \quad \boldsymbol{k} \in Z^m, \qquad (7)$$

т. е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} \hat{f}(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{8}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы φ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}, \quad k_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

полученную из системы (7) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(t) e^{-ik_s t} dt = \hat{f}(k_s) = \hat{f}_\tau(k_s).$$

Получающиеся при этом множества S_τ^p согласно (3) не зависят от нумерации системы (7) и в дальнейшем обозначаются через S^p.

Пусть теперь $\psi = \{\psi_n\}$, $n \in N$, — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$ существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k,$$

т. е.

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \quad k \in N, \tag{9}$$

то F будем называть ψ-интегралом вектора f и записывать $F = \mathcal{J}^\psi f$. В этом случае иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и записывать $f = F^\psi$.

Пусть, далее,

$$U_\varphi^p = \left\{ f \in S_\varphi^p : \| f \|_{\varphi,p} \le 1 \right\}$$

— единичный шар в пространстве S_φ^p. Тогда через $H_{\varphi,p}^\psi$ обозначим множество ψ-интегралов всех векторов $f \in U_\varphi^p$:

$$H_{\varphi,p}^\psi = \left\{ f \in \mathfrak{X} : f^\psi \in U_\varphi^p \right\}. \tag{10}$$

В дальнейшем предполагаем, что система ψ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} |\psi_n| = 0. \tag{11}$$

Понятно, что это условие заведомо обеспечивает включение $\mathcal{J}^\psi f \subset S_\varphi^p$ для любого элемента $f \in U_\varphi^p$ (ясно, что для такого включения необходимым и достаточным условием является ограниченность чисел $|\psi_n|$, $n \in N$). Поэтому в рассматриваемом случае

$$H_{\varphi,p}^\psi \subset S_\varphi^p.$$

В настоящей работе предлагается способ построения приближающих агрегатов для векторов из $H^\psi_{\varphi,p}$, приспособленный к данному множеству, и показана его состоятельность в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, при минимальных естественных ограничениях на системы ψ, а именно, при требовании (11) и условии

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in N, \tag{12}$$

находятся точные значения поперечников по Колмогорову

$$d_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in H^\psi_{\varphi,p}} \inf_{u \in F_n} \| f - u \|_p, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$d_0\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in H^\psi_{\varphi,p}} \| f \|_p, \tag{13}$$

где G_n — множество всех n-мерных подпространств в S^p_φ. Показано, что при этом экстремальными подпространствами, реализующими нижнюю грань в (13), являются именно построенные здесь подпространства. Из доказанной ниже теоремы 2, в частности, следует, что график величины $d_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$ как функции переменной n в общем случае имеет ступенчатый вид, причем высота и ширина ступени полностью и явно определяются системой ψ.

Здесь также найдены точные значения величин $e_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$ наилучших приближений классов $H^\psi_{\varphi,p}$ с помощью n-членных полиномов по системе φ. Эти значения также явно определяются последовательностью ψ.

Во второй части работы из доказанных утверждений выводятся следствия, из которых непосредственно получаются точные значения колмогоровских поперечников классов периодических функций многих переменных, определяющихся мультипликаторами в пространстве S^p. Полученные результаты распространяют на более общие классы функций известные утверждения А. Н. Колмогорова, К. И. Бабенко и В. М. Тихомирова, которые в рассматриваемой тематике являются основополагающими. Найдены также значения наилучших n-членных приближений (по Стечкину) таких классов.

2. Колмогоровские поперечники классов $H^\psi_{\varphi,p}$. Пусть $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11). Обозначим через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, и через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — систему множеств

$$g_n = g^\psi_n = \{k \in N : |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}. \tag{14}$$

Пусть еще $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots,$ где $\delta_n = |g_n|$ — количество чисел $k \in N$, принадлежащих множеству g_n. Учитывая условие (11), последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ можно определить с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\varepsilon_1 = \sup_{k \in N} |\psi_k|, \qquad g_1 = \{k \in N : |\psi_k| = \varepsilon_1\},$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k \in N \setminus g_{n-1}} |\psi_k|, \tag{15}$$

$$g_n = g_{n-1} \cup \gamma_n, \qquad \gamma_n = \{k \in N : |\psi_k| = \varepsilon_n\}.$$

Последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в дальнейшем играют важную роль, поэтому будем называть их характеристическими для данной последовательности ψ.

Заметим, что в случае, когда множество $\varepsilon(\psi)$ значений $|\psi_k|$ состоит из конечного числа n_0 элементов, то $\varepsilon_{n_0} = 0$ и при $n < n_0$ множества g_n имеют также конечное число δ_n элементов, а $\delta_{n_0} = \infty$. При этом

$$\delta_{n-1} < \delta_n. \tag{16}$$

Если же множество $\varepsilon(\psi)$ бесконечно, то всегда $\delta_n < \infty$ и выполняется неравенство (16). В обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty.$$

В дальнейшем ради удобства через g_0^ψ обозначим пустое множество и будем считать, что $\delta_0 = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in H^\psi_{\varphi,p}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_\varphi = S_{g_n^\psi}(f)_\varphi = \sum_{k\in g_n^\psi} c_k\varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad S_0(f)_\varphi = \theta, \tag{17}$$

где g_n^ψ — элементы последовательности $g(\psi)$, а θ — нулевой элемент пространства S^p_φ. Положим

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi = \left\| f - S_{n-1}(f)_\varphi \right\|_{\varphi,p} \tag{18}$$

и

$$\mathscr{E}_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Пусть еще

$$E_n^\psi(f)_\varphi = \inf_{a_k} \left\| f - \sum_{k\in g^\psi_{n-1}} a_k\varphi_k \right\|_{\varphi,p} \tag{20}$$

и

$$E_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} E_n^\psi(f)_\varphi. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— система чисел, для которой выполняются условия* (11) *и* (12). *Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$E_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \mathscr{E}_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \varepsilon_n, \tag{22}$$

где ε_n *— n-й член характеристической последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Доказательство. В силу равенств (2) и (9) с учетом определения чисел ε_n и множеств g_n для любого элемента $f \in H^\psi_{\varphi,p}$, полагая $\|\cdot\|_{\varphi,p} = \|\cdot\|$, имеем

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi = \left\| \sum_{k\in\bar g_{n-1}} \hat f_\varphi(k)\varphi_k \right\| = \left\| \sum_{k\in\bar g_{n-1}} \psi_k \hat f^\psi_\varphi(k)\varphi_k \right\| =$$

$$= \left(\sum_{k\in\bar g_{n-1}} |\psi_k|^p \left|\hat f^\psi_\varphi(k)\right|^p \right)^{1/p} \le \varepsilon_n \left\| f^\psi \right\| = \varepsilon_n, \quad \bar g_{n-1} = N \setminus g_{n-1}.$$

Таким образом, всегда

$$\mathcal{E}_n^\psi(f)_\varphi \le \varepsilon_n \quad \forall f \in H^\psi_{\varphi,p}. \tag{23}$$

Пусть теперь k' — любая точка из $\gamma_n = g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ и $f_* = \psi_{k'}\varphi_{k'}$, так что $\|f_*\| = |\psi_{k'}| = \varepsilon_n$. Поскольку $f_*^\psi = \varphi_{k'}$, то $\|f_*^\psi\| = 1$ и, следовательно, $f_* \in H^\psi_{\varphi,p}$. Ясно, что

$$E_n^\psi(f_*)_\varphi = \|f_*\| = \varepsilon_n. \tag{24}$$

Поэтому, объединяя соотношения (23) и (24) и учитывая, что всегда $E_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \le \mathcal{E}_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$, получаем равенство (22).

Следующее утверждение касается величин поперечников $d_n\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — *система чисел, удовлетворяющая условиям* (11) *и* (12). *Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = d_{\delta_{n-1}+1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \ldots = d_{\delta_n-1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = E_n^\psi\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)_\varphi = \varepsilon_n, \tag{25}$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s = 1, 2, \ldots$, — *элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $n > 1$. Подпространство $\Phi_{n-1}^{(\psi)}$ полиномов

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^\psi} a_k \varphi_k \tag{26}$$

имеет размерность δ_{n-1}. Поэтому с учетом (22) находим

$$\varepsilon_n = E_n^\psi\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \ge d_{\delta_{n-1}}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \ge d_{\delta_{n-1}+1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \ge \ldots \ge d_{\delta_n-1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right).$$

Следовательно, для доказательства равенства (25) остается показать, что

$$d_{\delta_n-1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) \ge \varepsilon_n, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Для этого воспользуемся известной теоремой о поперечнике шара (см., например, [1], § 10.2), согласно которой, если множество $\mathfrak{M}$ линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$ с нормой $\|\cdot\|_\mathfrak{X}$ содержит шар $\gamma U_{\nu+1}$ радиуса γ некоторого $(\nu+1)$-мерного подпространства $M_{\nu+1}$ из $\mathfrak{X}$, т. е. если

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \left\{y\colon y \in M_{\nu+1},\ \|y\|_\mathfrak{X} \le \gamma\right\},$$

то

$$d_\nu(\mathfrak{M})_\mathfrak{X} = \inf_{F_\nu \subset G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} \|f - u\|_\mathfrak{X} \ge \gamma,$$

где G_ν — множество всех ν-мерных подпространств в $\mathfrak{X}$.

Пусть $\varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi}$ — пересечение шара радиуса ε_n в S^p_φ с пространством Φ^ψ_n (размерности δ_n) полиномов вида (26):

$$\varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi} = \left\{\Phi_n \in \Phi_n^{(\psi)} : \|\Phi_n\| \le \varepsilon_n\right\}. \tag{28}$$

Для ψ-производной Φ_n^ψ любого элемента $\Phi_n \in \varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi}$, с учетом (28) имеем

$$\|\Phi_n^\psi\| = \left\|\sum_{k\in g_n^\psi}\frac{a_k}{\psi_k}\varphi_k\right\| = \left(\sum_{k\in g_n^\psi}\frac{|a_k|^p}{|\psi_k|^p}\right)^{1/p} \le \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\sum_{k\in g_n^\psi}|a_k|^p\right)^{1/p} \le 1.$$

Следовательно, $\Phi_n \in H_{\varphi,p}^\psi$. Таким образом, шар $\varepsilon_n U_{n,\Phi}^\psi$ δ_n-мерного подпространства $\Phi_n(\psi)$ из S_φ^p находится в классе $H_{\varphi,p}^\psi$, откуда в силу упомянутой теоремы и следует соотношение (27). В случае $n>1$ теорема доказана. При $n=1$ ее доказательство остается без изменений, если считать, что $\Phi_0(\psi)$ состоит из нулевого элемента θ и размерность его равна нулю.

Отметим, что доказательство теоремы 2 по существу совпадает с рассуждениями В. М. Тихомирова [1], § 4.4, который нашел поперечники эллипсоидов в гильбертовом пространстве, т.е. множеств, совпадающих в принятых здесь обозначениях с замыканием множеств $H_{\varphi,2}^\psi$.

3. Наилучшие n-членные приближения классов $H_{\varphi,p}^\psi$. Пусть, как и раньше, $S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ — множество, порожденное произвольным линейным пространством $\mathfrak{X}$, ортонормированной системой $\varphi = \{\varphi_n\}$, $n\in N$, и числом $p\in[1,\infty)$. Следуя С. Б. Стечнику [2], приведем такое определение.

Определение 1. *Пусть n — фиксированное натуральное число, Γ_n — произвольный набор из n натуральных чисел и*

$$P_{\Gamma_n} = \sum_{k\in\Gamma_n} a_k\varphi_k,$$

где a_k — некоторые комплексные числа.

Величина

$$e_n(f)_\varphi = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{a_k,\Gamma_n}\|f-P_{\Gamma_n}\|_{\varphi,p}$$

называется наилучшим n-членным приближением элемента $f\in S_\varphi^p$ в пространстве S_φ^p.

Согласно (2)

$$\forall f\in S_p^\varphi \quad \|f-P_{\Gamma_n}\|_{\varphi,p}^p = \sum_{k\,\overline{\in}\,\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p + \sum_{k\in\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)-a_k\right|^p \ge$$

$$\ge \sum_{k\,\overline{\in}\,\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p = \|f\|_{\varphi,p}^p - \sum_{k\in\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p.$$

Отсюда следует, что

$$e_n^p(f)_\varphi = \|f\|_{\varphi,p}^p - \sup_{\Gamma_n}\sum_{k\in\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p. \tag{29}$$

При $k\to\infty$ величины $\hat f_\varphi(k)$ стремятся к нулю. Поэтому значение верхней грани в (29) всегда достигается для некоторого набора Γ_n^* (не обязательно единственного), так что

$$e_n^p(f)_\varphi = \|f\|_{\varphi,p}^p - \sup_{\Gamma_n}\sum_{k\in\Gamma_n}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p = \|f\|_{\varphi,p}^p - \sum_{k\in\Gamma_n^*}\left|\hat f_\varphi(k)\right|^p. \tag{30}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — система чисел, удовлетворяющая условиям* (11) *и* (12). *Тогда при любом $n\in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^\psi\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in H_{\varphi,p}^\psi} e_n^p(f)_\varphi = \sup_{q>n} \frac{q-n}{\sum_{k=1}^{q} \overline{\psi}_k^{-p}} = \frac{q_n^*-n}{\sum_{k=1}^{q_n^*} \overline{\psi}_k^{-p}}, \tag{31}$$

где $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}_k\}$, $k=1,2,\ldots,$ *— последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1}<k\le\delta_n, \quad n=1,2,\ldots, \tag{32}$$

и q_n^* *— некоторое натуральное число.*

Доказательство. Если $f\in H_{\varphi,p}^\psi$, то согласно (30) и (9)

$$e_n^p(f)_\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i)\right|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{i\in\Gamma_n^*} |\psi_i|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i)\right|^p. \tag{33}$$

Пусть i_k, $k=1,2,\ldots,$ — натуральные числа такие, что

$$\psi_{i_k} = \overline{\psi}_k, \quad k=1,2,\ldots. \tag{34}$$

Тогда в силу (33)

$$e_n^p(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)\right|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)\right|^p \tag{35}$$

и, следовательно,

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^\psi\right) = \sup_{f\in H_{\varphi,p}^\psi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)\right|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \overline{\psi}_k^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)\right|^p \right).$$

Для нахождения значений правой части этого соотношения воспользуемся следующей леммой для числовых рядов.

Лемма. *Пусть* $\alpha=\{\alpha_k\}$, $k=1,2,\ldots,$ *— невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k>0$ $\forall k\in N$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \tag{36}$$

и $m=\{m_k\}$, $k=1,2,\ldots,$ *— последовательность неотрицательных чисел,* $m_k\ge 0$ *при любых* $k\in N$, *для которой*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1. \tag{37}$$

Пусть, далее,

$$S(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k, \qquad S_{\Gamma_n}(m) = \sum_{k\in\Gamma_n} \alpha_k m_k, \tag{38}$$

где Γ_n *— произвольный набор из* n *натуральных чисел,*

$$\mathscr{E}_n(m) = \mathscr{E}_n^{(\alpha)}(m) = S(m) - \sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m)$$

и

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n^{(\alpha)} = \sup_{|m|\le 1} \mathscr{E}_n(m). \tag{39}$$

Тогда для любого натурального n *существует число* $q^* = q_n^* \in N$, $q_n^* > n$, *такое, что*

$$\mathscr{E}_n = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}}.$$

Число q_n^* *определяется равенством*

$$\sup_{q>n} \frac{q-n}{\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}} = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}}$$

и верхняя грань в (39) *реализуется для последовательности* $m' = \{m'_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, *у которой*

$$m'_k = \begin{cases} \left(\alpha_k \sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases}$$

Предположим, что лемма доказана. Тогда, полагая $\overline{\psi}_k^p = \alpha_k$, $k \in N$, видим, что в силу (11) и (32) числа α_k удовлетворяют требованиям леммы и так как $\forall f \in H_{\varphi,p}^{\psi}$ $\left\| \hat{f}_{\varphi}^{\psi} \right\|_{l_p} \le 1$, то

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^{\psi}\right) \le \sup_{|m|\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \alpha_k m_k\right) = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что в классе $H_{\varphi,p}^{\psi}$ существует элемент f_*, для которого

$$e_n^p(f_*) = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \overline{\psi}_k^{-p}}. \tag{40}$$

С этой целью положим

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} \varphi_{i_k}, \tag{41}$$

где числа i_k выбраны согласно (34) и

$$c_{i_k}^p = \begin{cases} \left(\overline{\psi}_k^p \sum_{j=1}^{q^*} 1/\overline{\psi}_j^p\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases} \tag{42}$$

Элемент h является линейной комбинацией конечного числа элементов φ_j, поэтому он принадлежит к S_{φ}^p, а так как

$$\|h\|_{\varphi,p}^p = \sum_{k=1}^{q^*} c_{i_k}^p = \left(\sum_{j=1}^{q^*} \frac{1}{\overline{\psi}_j^p}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\overline{\psi}_k^p} = 1,$$

то $h \in U_p^{\varphi}$. Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{J}^{\psi} h$, заключаем, что $f_* \in H_{\varphi,p}^{\psi}$ и $f_*^{\psi} = h$.

В силу (35), (41) и (42)

$$e^p_n(f_*)_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi}^p_k c^p_{l_k} - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \overline{\psi}^p_k c^p_{l_k} = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \overline{\psi}_k^{-p}}.$$

Таким образом, соотношение (40), а с ним и теорема 3 доказаны.

Доказательство леммы. Пусть последовательности α и m удовлетворяют условиям леммы ($\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$) и $\Gamma^*_n = \Gamma^*_n(m)$ — набор из n натуральных чисел, для которого

$$\sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m) = S_{\Gamma^*_n}(m). \tag{43}$$

В силу (36) и (37) ряд в (38) сходится, значит, $\alpha_k m_k \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, всегда найдется по крайней мере одно множество Γ^*_n, удовлетворяющее условию (43). Пусть еще

$$\mu = \mu_n(m) = \min_{k\in\Gamma^*_n} \alpha_k m_k.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Если $\alpha \in \mathcal{A}$, то для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ можно указать последовательность $m^* \in \mathcal{M}$, для которой $|m^*| = |m|$, и число $q > n$ такое, что*

$$\alpha_k m^*_k = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \ldots q, \\ \lambda\mu, & k = q+1, \\ 0, & k > q+1, \end{cases} \tag{44}$$

где $\lambda \in [0, 1)$ и при этом будет выполняться неравенство

$$\mathcal{E}_n(m) \le \mathcal{E}_n(m^*). \tag{45}$$

Идея доказательства этого утверждения основана на том, что если при некотором k значение m_k представить в виде $m_k = m'_k + m''_k$, $m'_k, m''_k \ge 0$, то в силу монотонного убывания последовательности α имеем

$$\alpha_l\left(m_l + m'_k\right) + \alpha_k m''_k \ge \alpha_l m_l + \alpha_k m_k \quad \forall l \in [1, k). \tag{46}$$

Последовательность m^* можно построить, например, таким образом. Первый шаг состоит в следующем.

Если $\alpha_1 m_1 < \mu$, то через s_1 обозначим наименьшее из натуральных чисел (больших чем 1), для которого

$$\alpha_1 \sum_{l=1}^{s_1} m_l \ge \mu.$$

Значение m_{s_1} представим в виде $m_{s_1} = \overline{m}_{s_1} + \overline{\overline{m}}_{s_1}$, где $\overline{m}_{s_1}$ подобрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_1\left(\sum_{l=1}^{s_1-1} m_l + \overline{m}_{s_1}\right) = \mu,$$

и положим $m^{(1)} = \left\{m^{(1)}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(1)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s_1-1} m_i + \overline{m}_{s_1}, & k=1, \\ 0, & 1<k<s_1, \\ \overline{\overline{m}}_{s_1}, & k=s_1, \\ m_k, & k>s_1. \end{cases} \tag{47}$$

Если же $\alpha_1 m_1 \geq \mu$, то положим $m^{(1)} = m$. В силу соотношения (46) в обоих случаях имеем

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}). \tag{48}$$

Сделаем второй шаг. Если значение $m_2^{(1)}$ таково, что $\alpha_2 m_2^{(1)} < \mu$, то через s_2 обозначим наименьшее из натуральных чисел, больших чем 2, для которого

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{s_2} m_i^{(1)} \geq \mu,$$

значение $m_{s_2}^{(1)}$ представим в виде $m_{s_2}^{(1)} = \overline{m}_{s_2}^{(1)} + \overline{\overline{m}}_{s_2}^{(1)}$, где $\overline{m}_{s_2}^{(1)}$ подобрано согласно условию

$$\alpha_2 \left(\sum_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \overline{m}_{s_2}^{(1)} \right) = \mu$$

и положим $m^{(2)} = \left\{ m_k^{(2)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(2)} = \begin{cases} m_1^{(1)}, & k=1, \\ \sum_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \overline{m}_{s_2}^{(1)}, & k=2, \\ 0, & 2<k<s_2, \\ \overline{\overline{m}}_{s_2}^{(1)}, & k=s_2, \\ m_k, & k>s_2. \end{cases}$$

Если же окажется, что $\alpha_2 m_2^{(1)} \geq \mu$, то положим $m^{(2)} = m^{(1)}$. Ясно, что и в этом случае выполняется аналог (48):

$$\mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(2)}).$$

Продолжая эту процедуру, на некотором шаге (пусть его номер будет j) построим последовательность $m^{(j)} = \left\{ m_k^{(j)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j)} = \begin{cases} m_k^{(j-1)}, & k=1,2,\ldots,j-1, \\ \sum_{i=j}^{s_j-1} m_i^{(j-1)} + \overline{m}_{s_j}^{(j-1)}, & k=j, \\ 0, & j<k<s_j, \\ \overline{\overline{m}}_{s_j}^{(j-1)}, & k=s_j, \\ m_k, & k>s_j. \end{cases}$$

Для этой последовательности имеем

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \ldots \leq \mathscr{E}_n(m^{(j)}) \tag{49}$$

и, кроме того,

$$\alpha_j \sum_{k\geq j} m_k^{(j)} = \alpha_j \left(\overline{\overline{m}}_{s_j}^{(j)} + \sum_{k>j} m_k \right) < \mu. \tag{50}$$

На следующем шаге положим $m^{(j+1)} = \left\{ m_k^{(j+1)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j+1)} = \begin{cases} m_k^{(j)}, & k = 1, 2, \ldots, j, \\ \sum\limits_{k>j} m_k^{(j)}, & k = j+1, \\ 0, & k > j+1. \end{cases}$$

Принимая во внимание соотношения (44)–(50), видим, что

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(j+1)})$$

и, кроме того,

$$m_k^{(j+1)} = m_k^{(j)} \geq \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, j; \qquad m_{j+1}^{(j+1)} < \mu.$$

Ясно также, что число j удовлетворяет условию $j \geq n$. Теперь величину

$$\beta = \sum_{k=1}^{j} \left(m_k^{(j+1)} - \frac{\mu}{\alpha_k} \right) + m_{j+1}^{(j+1)}$$

представим в виде

$$\beta = \beta_{j+1} + \beta_{j+2} + \ldots + \beta_{j+l}, \qquad \beta_{j+i} \geq 0, \quad i = \overline{1, l},$$

где числа β_ν и l подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_{j+i}\beta_{j+i} = \mu, \quad \alpha_{j+l}\beta_{j+l} < \mu, \qquad i = \overline{1, l-1},$$

и положим $m^* = \left\{ m_k^* \right\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^* = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\alpha_k}, & k = 1, 2, \ldots, j+l-1, \\ \beta_{j+l}, & k = j+l, \\ 0, & k > j+l. \end{cases}$$

Понятно, что последовательность m^* будет искомой: для этого достаточно положить $p = j + l - 1$ и $\lambda = \alpha_{j+l}\beta_{j+l}/\mu$.

Предложение 2 доказано.

Продолжим доказательство леммы. При данном натуральном n обозначим через $\mathscr{M}_n$ подмножество последовательностей m из $\mathscr{M}$, для которых при некотором натуральном q, $q > n$, справедливо представление

$$\alpha_k m_k = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \ldots, q, \\ \lambda\mu, & k = q+1, \ \lambda \in [0, 1), \\ 0, & k > q+1, \end{cases} \tag{51}$$

где μ — некоторое положительное число.

Поскольку построенная выше последовательность $m^* \in \mathscr{M}_n$, то из (45) следует равенство

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m\in\mathcal{M}_n} \mathscr{E}_n(m),$$

означающее, что для нахождения величины $\mathscr{E}_n$ достаточно ограничиться последовательностями $m \in \mathcal{M}_n$.

Если $m \in \mathcal{M}_n$, то в силу (51)

$$\mathscr{E}_n(m) = (q-n)\mu + \lambda\mu = \frac{(q-n+\lambda)|m|}{\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{-1} + \lambda\alpha_{q+1}^{-1}}. \tag{52}$$

При фиксированном n и натуральных $q > n$ рассмотрим функции

$$f(q) = \frac{q-n}{\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{-1}}$$

и

$$f(q,\lambda) = \frac{q-n+\lambda}{\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{-1} + \lambda\alpha_{q+1}^{-1}}, \qquad \lambda \in [0, 1].$$

Видим, что

$$f(q,0) = f(q), \qquad f(q,1) = f(q+1).$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(q,\lambda)}{\partial\lambda} = \left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}}\right)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}}\right)^{-2},$$

то на промежутке $\lambda \in [0, 1]$ эта производная сохраняет знак. Следовательно, на этом промежутке функция $f(q,\lambda)$ с ростом λ либо убывает, либо возрастает. В таком случае для любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется либо $f(q,\lambda) \le f(q)$, либо $f(q,\lambda) \le f(q+1)$. Поэтому в силу (52)

$$\forall m \in \mathcal{M}_n \qquad \mathscr{E}_n(m) \le |m|\max(f(q), f(q+1)).$$

Значит, согласно (52)

$$\mathscr{E}_n \le \sup_{q>n} f(q) = \sup_{q>n}\frac{q-n}{\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{-1}}. \tag{53}$$

Далее, при любом $q > n$ имеем

$$f(q+1) - f(q) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k} + \sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}}\right)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k}\sum_{k=1}^{q+1}\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-1}. \tag{54}$$

Величина

$$r_n(q) = \sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}} = \sum_{k=n+1}^{q}\left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}\right)$$

отрицательна и в силу (36) ее абсолютная величина, не убывая, стремится к бесконечности. Поэтому из (54) следует, что найдется такое значение q_0, начиная с которого функция $f(q)$ будет строго убывающей. Следовательно, на промежутке $(n, q_0]$ существует точка q^*, для которой

$$\sup_{q>n} f(q) = \max_{q\in(n,q_0]} f(q) = f(q^*) = \frac{q^*-n}{\sum_{k=1}^{q^*}\alpha_k^{-1}}. \tag{55}$$

Таким образом, согласно (53) и (55),

$$\mathscr{E}_n \leq \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}}. \tag{56}$$

Остается показать, что строгого неравенства в этом соотношении быть не может. С этой целью рассмотрим последовательность $m' = \{m'_k\}$, у которой

$$m'_k = \begin{cases} \left(\alpha_k \sum\limits_{i=1}^{q^*} \dfrac{1}{\alpha_i}\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases}$$

Ясно, что $m' \in \mathscr{M}_n$ и для нее согласно (52)

$$\mathscr{E}_n(m') = \frac{q^* - n}{\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}}.$$

Объединяя это соотношение и (56), заканчиваем доказательство всех утверждений леммы.

***Замечание* 1.** Если система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ такова,что при некотором фиксированном $n \in N$ множество $g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$, определяемое формулой (14), содержит более одной точки, то в силу (25)

$$d_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \varepsilon_n \quad \forall \nu \in [\delta_{n-1}, \delta_n - 1].$$

Значения же $e_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$ с увеличением номера ν всегда строго убывают:

$$e^p_{\nu+1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \sup_{q > \nu+1} \frac{q - \nu - 1}{\sum_{k=1}^q \overline{\psi}_k^{\,-p}} < \sup_{q > \nu+1} \frac{q - \nu}{\sum_{k=1}^q \overline{\psi}_k^{\,-p}} \leq e^p_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right),$$

т. е. всегда $e_{\nu+1}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) < e_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$ и, к тому же, всегда $e_{\delta_{n-1}}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) < \varepsilon_n = d_{\delta_{n-1}}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right)$. Действительно, согласно (31)

$$e^p_{\delta_{n-1}}\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{\sum_{k=1}^{\delta_{n-1}} \overline{\psi}_k^{\,-p} + \sum_{k=\delta_{n-1}+1}^q \overline{\psi}_k^{\,-p}} <$$

$$< \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^q \overline{\psi}_k^{\,-p}} \leq \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{(q - \delta_{n-1}) \overline{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{\,-p}} = \overline{\psi}^{\,p}_{\delta_{n-1}+1} = \varepsilon_n^p.$$

Таким образом, всегда

$$e_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) < d_\nu\left(H^\psi_{\varphi,p}\right).$$

4. Колмогоровские поперечники и наилучшие n-членные приближения периодических функций многих переменных в пространстве S^p. Пусть, как и раньше, $L = L(R^m)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m и (8) — ряд Фурье функции $f \in L$ по системе (7). При этом эквивалентные функции считаются неразличимыми.

Пусть, далее, S^p — пространство, порожденное множеством L, системой (11) и некоторым числом $p \in [1, \infty)$ с нормой $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{S^p}$, определяемой согласно (2), для которой в силу (3) справедливы равенства

$$\|f\|_p = \|f\|_{S^p} = \left(\sum_{k\in Z^m}\left|\hat f(k)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Пусть теперь $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел (кратная последовательность). Для функций $f\in L$ наряду с (8) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2}\sum_{k\in Z^m}\psi(k)\hat f(k)e^{ikx}.$$

Если этот ряд является рядом Фурье некоторой функции F из L, то F назовем ψ-интегралом функции f и будем записывать $F(x) = \mathcal{J}^{\psi}(f;x)$. При этом иногда удобно функцию f называть ψ-производной функции F и записывать $f(x) = D^{\psi}(F;x) = F^{\psi}(x)$. Множество ψ-интегралов всех функций $f\in L$ обозначается через L^{ψ}. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^{\psi}\mathfrak{N}$ будет обозначать множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f\in \in L^{\psi}$, то коэффициенты Фурье функций f и f^{ψ} связаны соотношением

$$\hat f(k) = \psi(k)\hat f^{\psi}(k), \quad k\in Z^m.$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U^p в пространстве S^p:

$$U^p = \left\{f\colon f\in S^p,\ \|f\|_p\le 1\right\}.$$

В таком случае полагаем $L^{\psi}U^p = L_p^{\psi} = L_p^{\psi}\left(R^m\right)$. Относительно системы ψ предполагается, что

$$\lim_{|k|\to\infty}\psi(k) = 0. \tag{57}$$

Заметим, что если $f\in L^{\psi}S^p$ и $|\psi(k)|\le C$, $k\in Z^m$, $C = \text{const}$, то $f\in S^p$, т. е. условие (57) всегда гарантирует включение $L_p^{\psi}\subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — множество значений величин $|\psi(k)|$, $k\in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$g_n = g_n^{\psi} = \left\{k\in Z^m\colon |\psi(k)|\ge\varepsilon_n\right\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\delta_n = \delta_n^{\psi} = |g_n|$ — количество чисел $k\in Z^m$, принадлежащих множеству g_n.

Вследствие условия (57) в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются равенствами (15) с учетом того, что на этот раз $k\in Z^m$. Как и раньше, считается, что $g_0 = g_0^{\psi}$ — пустое множество и $\delta_0 = \delta_0^{\psi} = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f\in L^{\psi}$ рассмотрим тригонометрические полиномы

$$S_n(f;x) = S_{g_n^{\psi}}(f;x) = (2\pi)^{-m/2}\sum_{k\in g_n^{\psi}}\hat f(k)e^{ikx},$$

$$n\in N, \quad S_0(f;x) = 0, \tag{17'}$$

где g_n^{ψ} — элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть

$$\mathcal{E}_n^\psi(f)_p = \| f(\mathfrak{x}) - S_{n-1}(f;\mathfrak{x}) \|_{S^p}, \tag{18′}$$

$$\mathcal{E}_n^\psi(L_p^\psi)_p = \sup_{f \in L_p^\psi} \mathcal{E}_n^\psi(f)_p, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{19′}$$

$$E_n^\psi(f)_p = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_{n-1}^\psi} a_k e^{ikx} \right\|_{S^p} \tag{20′}$$

и

$$E_n(L_p^\psi)_p = \sup_{f \in L_p^\psi} E_n^\psi(f)_p, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{21′}$$

Пусть, далее,

$$d_n(L_p^\psi)_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^\psi} \inf_{u \in F_n} \| f - u \|_{S^p}, \quad n \in N,$$

$$d_0(L_p^\psi)_p \overset{\text{df}}{=} \sup_{f \in L_p^\psi} \| f \|_{S^p}$$

— поперечники по Колмогорову классов L_p^ψ (G_n — множество всех n-мерных подпространств в S^p) и

$$e_n(L_p^\psi)_p = \sup_{f \in L_p^\psi} \inf_{a_k, \Gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \Gamma_n} a_k e^{ikx} \right\|_{S^p}$$

— величина наилучшего n-членного приближения класса L_p^ψ в пространстве S^p (Γ_n — произвольный набор из n векторов $k \in Z^m$).

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения — аналоги, а по существу — частные случаи теорем 1 – 3.

Теорема 1′. *Пусть* $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ *— система чисел, удовлетворяющая условию (57) и такая, что*

$$\psi(k) \neq 0 \quad \forall k \in Z^m. \tag{58}$$

Тогда при любых $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$

$$E_n(L_p^\psi)_p = \mathcal{E}_n(L_p^\psi)_p = \varepsilon_n, \tag{22′}$$

где ε_n *— n-й член последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Теорема 2′. *Пусть* $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ *— система чисел, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(L_p^\psi)_p = d_{\delta_{n-1}+1}(L_p^\psi)_p = \ldots = d_{\delta_n - 1}(L_p^\psi)_p = E_n(L_p^\psi)_p = \varepsilon_n, \tag{25′}$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s \in N$, *— элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Теорема 3′. *Пусть* $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ *— система чисел, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e_n^p\left(L_p^\psi\right)_p = \sup_{q>n} \frac{q-n}{\sum_{s=1}^{q} \overline{\psi}_s^{-p}} = \frac{q^*-n}{\sum_{s=1}^{q^*} \overline{\psi}_s^{-p}}, \tag{31'}$$

где $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}_s\}$, $s \in N$, *— последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\overline{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

в которых δ_s *и* ε_s *— элементы последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$, *а* q^* *— некоторое натуральное число.*

Доказательство. Отправляясь от заданной системы ψ, фигурирующей в теоремах $1'-3'$, перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ так, чтобы числами s при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n)$ были перенумерованы векторы k из множеств $g_k^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ в каком-нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\overline{\psi}' = \{\overline{\psi}_s'\}_{s=1}^\infty$, положив

$$\overline{\psi}_s' = \psi(k_s), \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{59}$$

Поскольку

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx} = (2\pi)^{-m/2} \sum_{s=1}^{\infty} \hat{f}(k_s) e^{ik_s x},$$

то из (59) заключаем, что

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f;x) = \mathcal{J}^{\psi}(f;x) \quad \forall f \in L$$

и, следовательно,

$$L_p^{\psi'} = L_p^{\psi}.$$

Однако

$$L_p^{\psi'} = H_{\varphi',p}^{\psi'},$$

где множество $H_{\varphi',p}^{\psi'}$ определяется согласно равенству (10):

$$H_{\varphi',p}^{\psi'} = \left\{ f \in L \colon f^{\psi'} \in U_{\varphi'}^p \right\},$$

в котором $U_{\varphi'}^p = U^p$ и $\varphi' = \left\{(2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}\right\}_{s=1}^\infty$. К тому же последовательности $\varepsilon(\psi')$ и $\varepsilon(\psi)$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства

$$S_{g_n^{\psi'}}(f)_{\varphi'} = S_{g_n^{\psi}}(f;x), \qquad \mathscr{E}_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} = \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p,$$

$$\mathscr{E}_n\left(H_{\varphi',p}^{\psi'}\right) = \mathscr{E}_n\left(L_p^{\psi}\right)_p, \qquad E_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} = E_n^{\psi}(f)_p$$

и

$$E_n\left(H_{\varphi',p}^{\psi'}\right) = E_n\left(L_p^{\psi}\right)_p,$$

в которых левые части определяются равенствами (17) – (21), а правые — соотношениями (17′) – (21′). Отсюда заключаем, что утверждения теорем 1′ и 2′ следуют из теорем 1 и 2. Ясно также, что и $e_n\left(L_p^{\psi}\right)_p = e_n\left(H_{\varphi',p}^{\psi'}\right)$ и $\overline{\psi}' = \overline{\psi}$. Поэтому и теорема 3′ вытекает из теоремы 3.

***Замечание* 2.** Выражение (2) определяет норму только при $p \in [1, \infty)$ (при $p \in (0, 1)$ не выполняется неравенство (4)), однако оно имеет смысл при всех $p > 0$. Поэтому если под знаком $\|\cdot\|_p$ понимать правую часть соотношения (2), то все утверждения, доказанные выше, остаются справедливыми за исключением оценки снизу поперечников d_ν, поскольку в применяемой здесь теореме о поперечнике шара предполагается, что $\mathfrak{X}$ — нормированное пространство.

***Замечание* 3.** Если последовательность ψ такова, что ряд

$$\sum_{k \in Z^m} \psi(k) e^{ikx}$$

— ряд Фурье некоторой суммируемой функции $\mathcal{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^\psi \mathfrak{N}$ является возможность представления f сверткой вида

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(x-t) \mathcal{D}_\psi(t)\, dt, \tag{60}$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(x) = f^\psi(x)$. Таким образом, классы $L^\psi \mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [3], §1.9).

***Замечание* 4.** Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, — пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\| f \|_{L_p} = \left(\int\limits_{Q_m} | f(t) |^p dt \right)^{1/p}. \tag{61}$$

Связь между множествами L_p и S^p устанавливает известная теорема Хаусдорфа – Юнга (см., например, [4], п. XII.2), утверждающая, что:

I. Если $f \in L_p$, $p \in (1, 2]$, и $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье функции f, определяемые по формуле

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t) e^{ikt} dt,$$

то

$$\left(\sum_{k \in Z^m} \left| \hat{f}(k) \right|^{p'} \right)^{1/p'} \le (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \| f \|_{L_p}, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1.$$

II. Пусть $\{c_k\}_{k \in Z^m}$ — последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{k \in Z^m} |c_k|^p < \infty, \quad p \in (1, 2],$$

тогда существует функция $f \in L_{p'}$, для которой $\hat{f}(k) = c_k$, и

$$\| f \|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_{k \in Z^m} |c_k|^p \right)^{1/p}, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p \in (1, 2]$, то

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \|f\|_{L_p}, \tag{62}$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \|f\|_{S^p}. \tag{62'}$$

В частности, при $p = p' = 2$ справедливы равенства

$$L_2 = S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}. \tag{63}$$

5. Следствия для пространств L_p. В силу соотношений (62) и (62′) теоремы 1′ – 3′, доказанные для пространств S^p, содержат информацию и для пространств L_p, которая является наиболее полной вследствие (63) в случае, когда $p = 2$.

Ввиду особой важности этого случая, приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и раньше, $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел и $L^\psi\mathfrak{N}$ — множество ψ-интегралов всех функций $f \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L = L(R^m)$, $m \ge 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U_{L_2} в пространстве L_2:

$$U_{L_2} = \left\{ f : f \in L_2, \|f\|_{L_2} \le 1 \right\}. \tag{64}$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (61) при $p = 2$. В таком случае положим $L^\psi U_{L_2} = U^\psi_{L_2}$.

Считая выполненным условие (57), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f; x)$ согласно (17′) и для $f \in U^\psi_{L_2}$ положим

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2} = \|f(x) - S_{n-1}(f; x)\|_{L_2},$$

$$\mathscr{E}_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} \mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2},$$

$$E^\psi_n(f)_{L_2} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g^\psi_{n-1}} a_k e^{ikx} \right\|_{L_2}$$

и

$$E_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} E^\psi_n(f)_{L_2}.$$

Пусть еще

$$d_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in U^\psi_{L_p}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{L_2}, \quad n \in N,$$

$$d_0\left(U^\psi_{L_2}\right) = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} \|f\|_{L_2},$$

где G_n — множество всех n-мерных подпространств в L_2 и

$$e_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} \inf_{a_k, \Gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \Gamma_n} a_k e^{ikx} \right\|_{L_2}$$

— величина наилучшего n-членного приближения класса $U^\psi_{L_2}$ в пространстве L_2 (Γ_n — произвольный набор из n векторов $k \in Z^m$). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ *— система чисел, удовлетворяющая условиям* (57) *и* (58). *Тогда при любых* $n \in N$ *выполняются равенства*

$$E_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \mathscr{E}_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{65}$$

$$d_{\delta_{n-1}}\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = d_{\delta_{n-1}+1}\left(U^\psi_{L_2}\right) = \ldots = d_{\delta_n - 1}\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = E_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{66}$$

$$e_n^2\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = \sup_{q>n} \frac{q-n}{\sum_{s=1}^{q} \overline{\psi}_s^{-2}} = \frac{q^*-n}{\sum_{s=1}^{q^*} \overline{\psi}_s^{-2}}. \tag{67}$$

В этих равенствах ε_s *и* δ_s *— элементы характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, q^* *— некоторое натуральное число и*

$$\overline{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. В силу (63) и (64) видим, что $U_{L_2} = U^2$ и, следовательно, $U^\psi_{L_2} = L^\psi_2$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathscr{E}^\psi_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_2 = \mathscr{E}_n\left(L^\psi_2\right)_2,$$

$$E_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = E_n\left(L^\psi_2\right)_2,$$

$$d_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2} = d_n\left(L^\psi_2\right)_2$$

и

$$e_n\left(U^\psi_{L_2}\right)_2 = e_n\left(L^\psi_2\right)_2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда заключаем, что равенства (65) – (67) следуют из соотношений (22′), (25′) и (31′). Отметим, что равенства (65) и (66) в одномерном случае, т. е. при $m = 1$ в несколько другой терминологии были получены еще в 1936 г. в известной работе А. Н. Колмогорова [5], положившей начало исследованию поперечников различных функциональных классов. В общем случае эти равенства можно получить и путем анализа результатов и рассуждений упоминавшегося § 4.4 книги В.М. Тихомирова [1].

Отметим также, что, как следует из равенств (65) и (66), в пространстве L_2 значения поперечников множеств $U^\psi_{L_2}$ реализуют приближения суммами (17′), т. е. полиномами, которые являются наилучшими в смысле поперечников в пространствах S^p при всех $p \in [1, \infty)$ для классов L^ψ_p. Это позволяет предположить, что именно суммы (17′) будут наилучшим аппаратом приближения (опять таки в смысле колмогоровских поперечников) и в пространствах L_p при всех $p \ge 1$ для соответствующих множеств $U^\psi_{L_p}$:

$$U^\psi_{L_p} = L^\psi U_{L_p}, \quad U_{L_p} = \left\{ f \colon f \in L_p, \ \| f \|_{L_p} \le 1 \right\}.$$

Пусть $p \in (1, 2]$ и $f \in L^\psi_p$, где $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ — кратная последовательность, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Положим

$$\mathscr{E}_n^{\psi}(f)_{L_q} = \| f(x) - S_{n-1}(f;x) \|_{L_q},$$

где $S_{n-1}(f;x)$ — полиномы, построенные согласно (17′), а $\|\cdot\|_{L_q}$ — норма, определяющаяся равенством (61). Пусть, далее,

$$\mathscr{E}_n\left(L_p^{\psi}\right)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^{\psi}} \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_{L_q},$$

$$E_n^{\psi}(f)_{L_q} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} a_k e^{ikx} \right\|_{L_q}$$

и

$$E_n^{\psi}\left(L_p^{\psi}\right)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^{\psi}} E_n^{\psi}(f)_{L_q}.$$

Пусть еще

$$d_n\left(L_p^{\psi}\right)_{L_2} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{u \in F_n} \| f - u \|_{L_q}, \quad n \in N,$$

$$d_0\left(L_p^{\psi}\right)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^{\psi}} \| f \|_{L_q},$$

где G_n — множество всех n-мерных пространств в L_q и

$$e_n\left(L_p^{\psi}\right)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{a_k, \Gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \Gamma_n} a_k e^{ikx} \right\|_{L_q},$$

где Γ_n — произвольный набор из n векторов $k \in Z^m$. Согласно (62′) получаем

$$\mathscr{E}_n^{\psi}(f)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p.$$

Поэтому, в силу (22′), имеем

$$\mathscr{E}_n\left(L_p^{\psi}\right)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \varepsilon_n,$$

где, как и выше, ε_n — n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Следовательно, и

$$E_n\left(L_p^{\psi}\right)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1.$$

Пусть теперь k' — любая точка из $\gamma_n = g_n^{\psi} \setminus g_{n-1}^{\psi}$ и $f_* = (2\pi)^{-m/2} \psi(k') e^{ik'x}$. Тогда $f_* \in L_p^{\psi}$ и

$$E_n^{\psi}(f_*)_{L_{p'}} = \| f_* \|_{L_{p'}} = (2\pi)^{m(1/p'-1/2)} |\psi(k')| \| e^{ikx} \|_{L_{p'}} =$$

$$= (2\pi)^{m(1/p'-1/2)} \varepsilon_n = \varepsilon_n (2\pi)^{m(1/2-1/p)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Если* $p \in (1, 2]$ *и последовательность* $\Phi(k)$ *удовлетворяет условиям* (57) *и* (58), *то*

$$\forall n \in N \qquad E_n^\psi\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}} = \mathcal{E}_n\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}} = \varepsilon_n (2\pi)^{m(1/2-1/p)}. \tag{68}$$

Аналогично, с учетом соотношений, (62′) и (68) в ранее принятых обозначениях получаем следующие оценки:

$$\mathcal{E}_n (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \geq d_{\delta_{n-1}}\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}} \geq d_{\delta_{n-1}+1}\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}} \geq \ldots \geq d_{\delta_n - 1}\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}}$$

и

$$e_n\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(1/2-1/p)} \sup_{q>n} \frac{(q-n)}{\sum_{s=1}^{q} \overline{\psi}_s^{-p}} = \frac{(q^* - n)}{\sum_{s=1}^{q^*} \overline{\psi}_s^{-p}}.$$

Заметим, что в силу теоремы 4 эти соотношения становятся равенствами при $p = 2$. Отметим также, что величины, подобные $e_n\left(L_p^\psi\right)_{L_{p'}}$, изучались ранее в работах [6, 7] и др.

6. Примеры. Во всех предыдущих построениях центральное место занимают последовательности ψ: они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (57) и (58), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности ψ никаких ограничений не налагалось. Поэтому сами системы ψ, а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы ψ, у которых числа $\psi(k)$ представляются произведениями значений одномерных последовательностей $\psi_j = \left\{\psi_j(k_j)\right\}_{k_j=1}^{\infty}$:

$$\psi(k) = \psi(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{j=1}^{m} \psi_j(k_j), \qquad k_j \in Z^1, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если к тому же

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \qquad j = \overline{1, m}$$

(через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное с z), то множества g_n^ψ симметричны относительно всех координатных плоскостей и, как не трудно убедиться,

$$\sum_{k \in Z^m} \psi(k) e^{ikt} = \sum_{k \in Z_+^m} 2^{m-q(k)} \prod_{j=1}^{m} \left|\psi_j(k_j)\right| \cos\left(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}\right), \tag{69}$$

где $Z_+^m = \left\{k \in Z^m,\ k_i \geq 0, i = \overline{1, m}\right\}$, $q(k)$ — число координат вектора k, равных нулю, а числа β_{k_j} определяются равенствами

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Re}\psi_j(k_j)}{\left|\psi_j(k_j)\right|}, \qquad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Im}\psi_j(k_j)}{\left|\psi_j(k_j)\right|}.$$

В таком случае множество ψ-интегралов действительных функций φ из $L(R^m)$ состоит из действительных функций f и в случае, когда ряд в (69) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathcal{D}_\psi(t)$, согласно замечанию 3 справедлива формула (60).

Аппроксимационные характеристики различных подмножеств из L^{ψ} (при тех или иных ограничениях на последовательности $\psi_j(k_j)$) рассматривались в [2, 8, 9] и др.

При конкретных значениях $\psi_j(k_j)$, именно в случае, когда

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где r_j — некоторые действительные числа, эти характеристики изучались, как хорошо известно, многими авторами.

***Пример* 1.** Пусть $m = 2$ и последовательности $\psi_1(k_1)$, $\psi_2(k_2)$ заданы равенствами (70) при условии $r_1 = r_2 = r > 0$.

Классы $U_{L_2}^{\psi}$, определяющиеся такими последовательностями, с точки зрения нахождения их поперечников впервые рассматривались К. И. Бабенко [10, 11], которым в этом случае фактически было получено и соотношение (66).

В данной ситуации характеристическая последовательность $\varepsilon(\psi)$ состоит из элементов $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, множества g_n^{ψ} — множества векторов $k = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию

$$k_1' k_2' \leq n, \tag{71}$$

где

$$k_j' = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Такие соотношения впервые появились в упомянутых работах К. И. Бабенко и сейчас их принято называть гиперболическими крестами.

Числа $\delta_n = \delta_n^{\psi}$ в рассматриваемом случае — число векторов $k \in Z^2$, удовлетворяющих условию (71). Можно подсчитать, что

$$\delta_1 = 9, \quad \delta_2 = 21, \quad \delta_3 = 33, \quad \delta_4 = 49, \quad \delta_5 = 61,$$
$$\delta_6 = 81, \quad \delta_7 = 93, \quad \delta_8 = 113, \ldots .$$

Поэтому, полагая $d_{\nu} = d_{\nu}\left(U_{L_2}^{\psi}\right)_{L_2}$, на основании равенства (66) имеем

$$d_1 = \ldots = d_8 = 1; \quad d_9 = \ldots = d_{20} = 2^{-r}; \quad d_{21} = \ldots = d_{32} = 3^{-r};$$
$$d_{33} = \ldots = d_{48} = 4^{-r}; \quad d_{49} = \ldots = d_{60} = 5^{-r}; \quad d_{61} = \ldots = d_{80} = 6^{-r};$$
$$d_{81} = \ldots = d_{92} = 7^{-r}; \quad d_{93} = \ldots = d_{112} = 8^{-r}; \ldots .$$

***Пример* 2.** Пусть, по-прежнему, $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha|k_j|} e^{-i\beta k_j \operatorname{sign} k_j \pi/2}, \quad j = 1, 2,$$

где $\alpha > 0$, β_{k_j} — произвольные действительные числа. Тогда $\varepsilon_n = e^{-\alpha(n-1)}$, $n \in N$, а g_n^{ψ} — множества векторов $k = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию $|k_1| + |k_2| \leq n - 1$, и $\delta_n = 1 + 2n(n-1)$, $n \in N$. Равенство (66) в этом случае имеет вид

$$d_{2n(n-1)+1} = d_{2n(n-1)+2} = \ldots = d_{2n(n+1)} = e^{-\alpha n}.$$

Здесь, как и раньше, $d_{\nu} = d_{\nu}\left(U_{L_2}^{\psi}\right)_{L_2}$.

***Пример* 3.** Пусть снова $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha k_j^2} e^{-i\beta_{k_j} \operatorname{sign} k_j \pi/2}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha > 0,$$

где β_{k_j} — произвольные действительные числа. В этом случае элементами характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ есть упорядоченные по убыванию числа $e^{-\alpha(n_1^2+n_2^2)}$, $n_1, n_2 \in Z^1$, а множества g_n^ψ состоят из векторов $k = (k_1, k_2) \in Z^2$, для которых

$$k_1^2 + k_2^2 \le \log_{e^\alpha} \frac{1}{\varepsilon_n} \overset{\text{df}}{=} R_n^2,$$

т. е. g_n^ψ состоят из векторов k, находящихся внутри концентрических окружностей, радиусы R_n которых таковы, что число R_n^2 представимо суммой квадратов двух целых чисел. Можно подсчитать, что

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \delta_1 = 1; \quad \varepsilon_2 = e^{-\alpha}, \quad \delta_2 = 5; \quad \varepsilon_3 = e^{-2\alpha}, \quad \delta_3 = 9;$$

$$\varepsilon_4 = e^{-4\alpha}, \quad \delta_4 = 13; \quad \varepsilon_5 = e^{-5\alpha}, \quad \delta_5 = 21; \quad \varepsilon_6 = e^{-8\alpha}, \quad \delta_6 = 25;$$

$$\varepsilon_7 = e^{-9\alpha}, \quad \delta_7 = 29; \quad \varepsilon_8 = e^{-10\alpha}, \quad \delta_8 = 33; \quad \varepsilon_9 = e^{-13\alpha}, \quad \delta_9 = 41;$$

$$\varepsilon_{10} = e^{-16\alpha}, \quad \delta_{10} = 45; \quad \varepsilon_{11} = e^{-17\alpha},$$

$$\delta_{11} = 53, \quad \varepsilon_{12} = e^{-18\alpha}, \quad \delta_{12} = 57, \ldots .$$

В этом случае равенство (66) показывает, что

$$d_1 = \ldots = d_4 = e^{-\alpha}; \quad d_5 = \ldots = d_8 = e^{-2\alpha}; \quad d_9 = \ldots = d_{12} = e^{-4\alpha};$$

$$d_{13} = \ldots = d_{20} = e^{-5\alpha};$$

$$d_{21} = \ldots = d_{24} = e^{-8\alpha}; \quad d_{25} = \ldots = d_{28} = e^{-9\alpha};$$

$$d_{29} = \ldots = d_{32} = e^{-10\alpha}; \quad d_{33} = \ldots = d_{40} = e^{-13\alpha};$$

$$d_{41} = \ldots = d_{44} = e^{-16\alpha};$$

$$d_{45} = \ldots = d_{52} = e^{-17\alpha}; \quad d_{53} = \ldots = d_{56} = e^{-18\alpha}; \ldots .$$

Здесь также $d_\nu = d_\nu\left(U^\psi_{L_2}\right)_{L_2}$.

Отметим, что подсчеты в примерах 1–3 были выполнены А. С. Сердюком и их результаты приводятся здесь с его любезного согласия.

***Пример* 4.** (к теоремам 3 и 3′). Пусть система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $|\psi_k| = k^{-r}$, $r > 0$. В таком случае $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, и $\overline{\psi}_k = |\psi_k| = k^{-r}$, $k \in N$. Поэтому согласно (31)

$$e_n^p\left(H^\psi_{\varphi,p}\right) = \sup_{q>n} \frac{q-n}{\sum_{k=1}^q k^{rp}}.$$

Пусть, например, $rp = 1$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^q k = \frac{q(q+1)}{2},$$

то

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^{\psi}\right) = \sup_{q>n}\frac{2(q-n)}{q(q+1)} = \frac{2\left(q^*-n\right)}{q^*\left(q^*+1\right)},$$

где

$$q^* = n + \sqrt{n^2+n}.$$

Пример 4′. Пусть в теореме 3 $\psi_k = e^{-k}$. Тогда $\varepsilon_n = e^{-n}$, $\overline{\psi}_k = e^{-k}$ и согласно (31)

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^{\psi}\right) = \sup_{q>n}\frac{q-n}{\sum_{k=1}^{q}e^{kp}} = \sup_{q>n}\frac{q-n}{e^p\left(e^{pq}-1\right)/\left(e^p-1\right)} = \frac{e^p-1}{e^p}\sup_{q>n}\frac{q-n}{e^{pq}-1}.$$

Величина $(q-n)/\left(e^{pq}-1\right)$ при $q\geq n+1/p$ убывает. Поэтому при $p\geq 1$

$$e_n^p\left(H_{\varphi,p}^{\psi}\right) = \frac{e^p-1}{e^p}\frac{1}{e^{p(n+1)}-1}.$$

Основные результаты данной работы анонсированы в [12]. Автор сердечно благодарит А. С. Сердюка и Т. А. Андрееву за большую помощь в подготовке к печати настоящей работы.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
2. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1995. **102**, № 1. – С. 37 – 40.
3. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
5. *Kolmohorov A.N.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklass // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – S. 107 – 110.
6. *Temlyakov V.N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 569 – 587.
7. *Temlyakov V.N.* Greedy algorithms and M-term approximation with regard to redundant dictionaries // J. Approxim. Theory. – 1999. – **98**. – P. 117 – 145.
8. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.
9. *Романюк А.С.* О приближении классов периодических функций многих переменных // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 662 – 672.
10. *Бабенко К.И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247 – 250.
11. *Бабенко К.И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Там же. – 1960. – **132**, № 5. – С. 982 – 985.
12. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).

Одержано 15.12.2000