УДК 517:512

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПОЗИТИВНЫХ СИСТЕМ

Criteria of asymptotic stability of positive differential systems are established as conditions of monotone reversibility of linear operators. Structure of monotone and monotonically reversible operators in the space of matrices is investigated.

Встановлюються критерії асимптотичної стійкості позитивних диференціальних систем у вигляді умов монотонної оборотності лінійних операторів. Досліджується структура монотонних і монотонно оборотних операторів у просторі матриць.

1. Введение. Рассмотрим класс линейных дифференциальных систем

$$\frac{dH(t)}{dt} + MH(t) = G(t), \quad H(0) = Y, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $M: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — ограниченный оператор. Фазовое пространство $\mathcal{E}$, в котором действует оператор M, частично упорядочено с помощью некоторого конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Данное предположение позволяет при исследовании системы (1) использовать теорию монотонных и монотонно обратимых операторов относительно конуса [1–3].

Для некоторых классов операторов M и конусов $\mathcal{K}$ свойство устойчивости системы (1) описывается в виде условий разрешимости на $\mathcal{K}$ соответствующего (алгебраического) уравнения

$$MX = Y. \tag{2}$$

Например, асимптотическая устойчивость матричного дифференциального уравнения Ляпунова вида (1) с оператором $MX = -AX - XA^*$ эквивалентна существованию положительно определенных матриц $X = X^* > 0$ и $Y = Y^* > 0$, удовлетворяющих алгебраическому уравнению Ляпунова (2), а также монотонной обратимости оператора M относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}$.

В данной работе устанавливаются критерии асимптотической устойчивости класса позитивных систем (1) в банаховом пространстве, эволюционные операторы которых имеют свойство монотонности относительно нормального воспроизводящего конуса $\mathcal{K}$. Решения таких систем $H(t)$ находятся в конусе $\mathcal{K}$, если $Y \in \mathcal{K}$ и $G(\tau) \in \mathcal{K}$, $0 \leq \tau \leq t$. Вывод критериев осуществляется на основе интегрального представления решений уравнения (2) и теорем Крейна–Бонсалла–Карлина о спектральном радиусе монотонного оператора [1]. Приводятся также результаты исследований, связанных с описанием структуры классов монотонных и монотонно обратимых операторов относительно конусов неотрицательных и неотрицательно определенных матриц.

Отметим, что свойство позитивности системы (1) относительно конуса неотрицательных матриц сводится к условиям внедиагональной неположительности матрицы оператора M [1, 4].

2. Монотонные и монотонно обратимые линейные операторы. Пусть $M: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный оператор, действующий в некотором полуупорядоченном пространстве с нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Оператор M называется *монотонным*, если из $X \geq Y$ следует $MX \geq MY$. Здесь и в дальнейшем неравенство между элементами $X \geq Y (X > Y)$ означает, что $X - Y \in \mathcal{K}$ $(X - Y \in \mathcal{K}_0)$, где $\mathcal{K}_0$ — множество внутренних точек конуса $\mathcal{K}$. Монотонный оператор $\hat{M}$ называется *мажорантой (минорантой)* монотонного оператора M, если оператор $\hat{M}-M$ $(M-\hat{M})$ монотонный. Монотонный оператор M называется *экстремальным*, если он не может быть представлен в виде суммы линейно независимых минорант. Все миноранты экстремального оператора M имеют вид αM, $0 \le \alpha \le 1$. Оператор M называется *строго монотонным (сильно монотонным)*, если $MX > MY$ при $X > Y$ $(X \ge Y,\ X \ne Y)$. Сильно монотонные (экстремальные) операторы являются внутренними (крайними) точками телесного конуса монотонных операторов [1]. Оператор M называется *монотонно обратимым*, если он обратим и обратный оператор M^{-1} монотонный. Монотонная обратимость оператора M эквивалентна существованию решения $X \ge 0$ $(X > 0)$, уравнения (2) при любом $Y \ge 0$ $(Y > 0)$.

Классы монотонных, строго монотонных, сильно монотонных и монотонно обратимых операторов можно описать в виде соответствующих включений:

$$M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad M\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0, \quad M\mathcal{K}\backslash\{0\} \subset \mathcal{K}_0, \quad \mathcal{K} \subset M\mathcal{K}.$$

Из непрерывности оператора M следует, что в случае замкнутого телесного конуса $\mathcal{K}$ включения $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0 \subset M\mathcal{K}_0$ эквивалентны.

Рассмотрим класс линейных операторов, представимых в виде

$$M = L - P, \quad P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}, \tag{3}$$

где P и L — соответственно монотонный и монотонно обратимый операторы.

Лемма 1. *Монотонная обратимость оператора* (3) *эквивалентна неравенству* $\rho(T) < 1$, *где* $\rho(T)$ — *спектральный радиус пучка операторов* $T(\lambda) = \lambda L - P$. *Если конус* $\mathcal{K}$ *телесный, то оператор* (3) *монотонно обратим в том и только в том случае, когда существуют* $X \in \mathcal{K}_0$ *и* $Y \in \mathcal{K}_0$, *удовлетворяющие уравнению* (2).

Утверждения леммы 1 устанавливаются с помощью соотношений

$$LM^{-1} = PM^{-1} + I = (I-S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k,$$

где I — единичный оператор, $S = PL^{-1}$ — монотонный оператор, спектральный радиус которого совпадает с $\rho(T) < 1$, а также теорем 25.1 и 25.4 [1, с. 199–201].

Отметим, что оператор M — монотонный относительно конуса $\mathcal{K}$ гильбертового пространства в том и только в том случае, когда сопряженный оператор M^* монотонный относительно сопряженного конуса $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{E}^*$. Свойства строгой и сильной монотонности также выполняются или не выполняются одновременно для операторов M и M^*.

3. Устойчивость линейных позитивных систем. Пусть $\mathcal{K}$ — нормальный воспроизводящий конус пространства $\mathcal{E}$. Дифференциальная система (1) называется *позитивной*, если $H(t) \ge 0$ при условиях $Y \ge 0$ и $G(\tau) \ge 0$, $0 \le \tau \le t$. Из представления решения системы (1) в виде

$$H(t) = W_t Y + \int_0^t W_{t-\tau} G(\tau) d\tau, \quad W_t = e^{-Mt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} M^k,$$

следует, что для позитивной системы экспоненциальный оператор W_t должен быть монотонным относительно конуса $\mathcal{K}$ при всех $t \ge 0$. Обратно, если $Y \ge 0$, $G(\tau) \ge 0$ и оператор W_t монотонный, то $H(t) \ge 0$ для любого $t \ge 0$. Поэтому свойство позитивности системы (1) относительно конуса $\mathcal{K}$ можно описать в виде включений $W_t\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ или $\mathcal{K} \subset W_{-t}\mathcal{K}$ для каждого $t \geq 0$.

Теорема 1. *Позитивная система* (1) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда оператор M монотонно обратим.*

Доказательство. Рассмотрим однородную систему

$$\frac{dZ(t)}{dt} + MZ(t) = 0, \quad Z(0) = Y, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Условия асимптотической устойчивости систем (1) и (4) совпадают. Интегрируя систему (4) с учетом условия $Z(\infty) = 0$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{dZ(t)}{dt} dt + M\int_0^\infty Z(t)dt = -Y + MX = 0,$$

где

$$X = \int_0^\infty Z(t)dt, \quad Z(t) = W_tY. \tag{5}$$

Следовательно, для асимптотически устойчивой системы (1) интеграл (5) является решением уравнения (2). При этом из условия позитивности следует, что $X \geq 0$ при $Y \geq 0$.

Покажем справедливость обратного утверждения, используя спектральные свойства монотонных операторов и функций от оператора. Из монотонности операторов W_t и M^{-1} следует монотонность их произведения $V_t = W_tM^{-1}$. Спектры операторов W_t и V_t составляют соответствующие числа $e^{-\lambda t}$ и $e^{-\lambda t}/\lambda$ при $\lambda \in \sigma(M)$. Согласно теоремам Крейна–Бонсалла–Карлина [1], спектральный радиус монотонного оператора является точкой его спектра. Поэтому для любого $\lambda \in \sigma(M)$ выполняются неравенства

$$e^{-\mathrm{Re}\lambda t} \leq e^{-\alpha t} = \rho(W_t), \quad \frac{e^{-\mathrm{Re}\lambda t}}{|\lambda|} \leq \frac{e^{-\beta t}}{\beta} = \rho(V_t),$$

где α и β — некоторые точки спектра оператора M. Правые части этих неравенств принимают вещественные положительные значения при $t \geq 0$. Из первого неравенства (при достаточно малом $t < 2\pi/\rho(M)$) следует, что α — вещественная точка спектра оператора M такая, что $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \alpha$ при любом $\lambda \in \sigma(M)$. Для того чтобы выполнялось второе неравенство при любом сколь угодно большом значении t и для любого $\lambda \in \sigma(M)$, необходимо положить $\beta = \alpha > 0$. Следовательно, $\mathrm{Re}\lambda \geq \alpha > 0$ при каждом $\lambda \in \sigma(M)$, т. е. система (1) асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Замечание. Свойство позитивности системы (4) равносильно монотонной обратимости семейства операторов $M_c = M - cI$, $c < \alpha$, где $\alpha = \inf\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$ [3]. При этом $\alpha \in \sigma(M)$, если $\sigma(M) \neq \varnothing$. Если операторы M и M_c при $c < \alpha$ монотонно обратимы, то $\alpha > 0$. В противном случае выполняется двусторонняя операторная оценка $M \leq M_\alpha \leq M_c$ и оператор M_α должен быть монотонно обратимым, что противоречит условию $\alpha \in \sigma(M)$ [1]. Поэтому $\alpha > 0$, если $M_c^{-1} \geq 0$ для любого $c \leq 0$. Если $0 < c < \alpha$, то произвольное решение системы (4) удовлетворяет оценке

$$\|Z(t)\| \leq qe^{-ct}\|Y\|, \quad t \geq 0, \quad q > 0,$$

т. е. система (4) экспоненциально устойчива. Если α — собственное значение оператора M, то система (4) имеет частное решение вида $Z(t) = e^{-\alpha t}Y$, $Y \neq 0$.

Следовательно, для системы (4), позитивной относительно конуса $\mathcal{K}$, соотношения $\alpha > 0$ и $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$ эквивалентны и являются критериями ее экспоненциальной устойчивости. Если $\mathcal{K} \subset M_c\mathcal{K}$ при $c \le 0$, то система (4) позитивна и экспоненциально устойчива.

При использовании теоремы 1 необходимо установить свойство позитивности системы (1).

Лемма 2. *Если две системы вида* (1), *отвечающие операторам* M_1 *и* M_2 *позитивны, то система* (1) *с оператором* $M_1 + M_2$ *также позитивна.*

Данное утверждение устанавливается на основе соотношений

$$e^{-(M_1+M_2)t} = E(t) + t^3R(t) = \lim_{k\to\infty}\left[E\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k,$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-M_1t}e^{-M_2t} + e^{-M_2t}e^{-M_1t}\right),$$

где $R(t)$ — некоторая целая оператор-функция, и свойства замкнутости конуса монотонных операторов [5]. В случае коммутирующих операторов M_1 и M_2 выполняется соотношение

$$e^{-(M_1+M_2)t} = e^{-M_1t}e^{-M_2t}, \quad t \ge 0.$$

Рассмотрим класс операторов (3). Из монотонности оператора P вытекает монотонность оператор-функции e^{Pt}, $t \ge 0$. Учитывая леммы 1, 2 и теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* M — *оператор вида* (3) *и при любом* $t \ge 0$ *оператор* e^{-Lt} *монотонный относительно нормального телесного конуса* $\mathcal{K}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) *система* (1) *асимптотически устойчива;*

b) *оператор* M *монотонно обратим;*

c) *существуют* $X > 0$ *и* $Y > 0$, *удовлетворяющие уравнению* (2);

d) $\rho(T) < 1$, *где* $T(\lambda) = \lambda L - P$.

Сформулируем следствия приведенных результатов для матричных уравнений, используя нормальные телесные конусы неотрицательных и неотрицательно определенных матриц.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\mathcal{K} \subset R^{n\times m}$ — *конус* $n \times m$*-матриц с неотрицательными элементами и в пространстве* $R^{n\times m}$ *действует оператор*

$$M = \sum_k A_kXB_k, \quad A_k \in R^{n\times n}, \quad B_k \in R^{m\times m}. \tag{6}$$

При этом все внедиагональные элементы матрицы

$$C = \sum_k A_k \otimes B_k^T,$$

где $\otimes$ — *знак кронекерова произведения, неположительны. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) *система* (1) *асимптотически устойчива;*

b) *для любой положительной матрицы* $Y > 0$ *уравнение* (2) *имеет положительное решение* $X > 0$;

c) *существуют матрицы* $X > 0$ *и* $Y > 0$, *удовлетворяющие уравнению* (2);

d) *для некоторого* $\alpha > 0$ *оператор* $P = \alpha I - M$ *монотонный и* $\rho(P) < \alpha$.

Данное утверждение является следствием теоремы 2 и известных свойств M-матриц. Действительно, матричные уравнения (1) и (2) можно представить в виде

$$\frac{dh(t)}{dt} + Ch(t) = g(t), \qquad Cx = y,$$

где $h(t)$, $g(t)$, x и y — векторы, построенные из транспонированных строк соответствующих матриц $H(t)$, $G(t)$, X и Y [6]. Поэтому свойство позитивности системы (1) равносильно условию внедиагональной неположительности элементов матрицы C [1, 4]. При этом монотонная обратимость оператора M эквивалентна неотрицательности матрицы C^{-1} и согласно [4] — размещению спектра матрицы C в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, а также представлению $C = \alpha I - S$, где $S \geq 0$, $\rho(S) < \alpha$.

Отметим, что при условиях следствия 1 неравенство $C^{-1} \geq 0$ эквивалентно положительности всех главных ведущих миноров матрицы C [4, 7].

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{K} \subset C^{n\times n}$ — конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц и в пространстве $C^{n\times n}$ действует оператор*

$$M = L - P, \quad LX = -A^*X - XA, \quad PX = \sum_k A_k^* X A_k, \tag{7}$$

где A, $A_k \in C^{n\times n}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) *система* (1) *асимптотически устойчива;*

b) *матричное уравнение* (2) *имеет положительно определенное решение $X = X^* > 0$ при любой положительно определенной правой части $Y = Y^* > 0$;*

c) *существуют матрицы $X = X^* > 0$ и $Y = Y^* > 0$, удовлетворяющие уравнению* (2);

d) *вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны и $\rho(T) < 1$, где $T(\lambda) = \lambda L - P$.*

Утверждения следствия 2 вытекают из леммы 2 и теоремы 2. Действительно, оператор-функции

$$e^{-Lt}X = e^{A^*t}Xe^{At}, \qquad e^{Pt}X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^k X, \quad t \geq 0,$$

являются монотонными и, согласно лемме 2, система (1) с оператором (7) позитивна. Согласно теореме 2 утверждения a)–d) эквивалентны. При этом следует учесть, что монотонная обратимость оператора L эквивалентна расположению спектра матрицы A слева от мнимой оси (теорема Ляпунова).

Отметим, что решение системы (4) с оператором (7) можно рассматривать в качестве матрицы вторых моментов для стохастической системы Ито

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_k A_k x(t) dw_k(t),$$

где w_k — компоненты стандартного винеровского процесса (см., например, [8–10]). При этом асимптотическая устойчивость системы (4) эквивалентна асимптотической устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения данной стохастической системы [8]. В случае $P = 0$ соотношения (1) и (2) с оператором (7) представляют соответственно дифференциальное и алгебраическое уравнения Ляпунова, для которых все утверждения следствия 2 известны.

4. Структура монотонных и монотонно обратимых операторов относительно конуса неотрицательно определенных матриц. При изучении и использовании матричных уравнений важную роль выполняют различные представления линейных операторов, в частности,

$$MX = \sum_{i,j=1}^{k} \gamma_{ij} A_i X A_j^* \equiv \sum_{p,q=1}^{n} x_{pq} H_{pq} \equiv \sum_{s=1}^{r} \sigma_s D_s X D_s^*, \tag{8}$$

где

$$\Gamma = \Gamma^*, \quad H_{pq} = B_p \Gamma B_q^*, \quad B_p = \left\| a_{\xi p}^{i} \right\|_{\xi, i=1}^{m,k}, \quad h_{pq}^{\xi\eta} = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s d_{\xi p}^{(s)} \overline{d_{\eta q}^{(s)}},$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — ненулевые собственные значения блочной матрицы H [11–13]. Для индексов инерции эрмитовых матриц H и Γ выполняются соотношения $i_{\pm}(H) \leq i_{\pm}(\Gamma)$, где $i_{\pm}(\cdot)$ — количества положительных и отрицательных собственных чисел матрицы с учетом кратностей. При этом равенства выполняются в случае линейной независимости матричных коэффициентов $A_1, \ldots, A_k \in$ $\in C^{m\times n}$. Матрицы $D_1, \ldots, D_r$ в (8) являются ортонормированными: $(D_s, D_g) =$ $= \delta_{sg}$, где $(P, Q) = \mathrm{tr}\,(QP^*)$ — скалярное произведение.

Линейная независимость матриц $A_1, \ldots, A_k$ эквивалентна линейной независимости семейства операторов $A_i X A_j^*$. Поэтому произвольный линейный оператор $M: C^{n\times n} \to C^{m\times m}$ представим в виде (8), причем $M\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_m$, где $\mathcal{H}_n$ — пространство эрмитовых матриц порядка n. При этом сопряженный оператор имеет вид

$$M^* Y = \sum_{i,j=1}^{k} \bar{\gamma}_{ij} A_i^* Y A_j.$$

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_n$ — конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц порядка n. Исследуем классы монотонных и монотонно обратимых операторов вида (8), предполагая, что $n = m$. В случае $n \neq m$ все построения и выводы аналогичны.

Класс монотонных операторов (8) в терминах вещественных матриц описывается в виде

$$\sum_{s=1}^{r} \sigma_s \tilde{D}_s \tilde{X} \tilde{D}_s^T \geq 0 \quad \forall \tilde{X} = \begin{bmatrix} S & K \\ -K & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad \tilde{D}_s = \begin{bmatrix} R_s & G_s \\ -G_s & R_s \end{bmatrix},$$

$$X = S + iK, \quad D_s = R_s + iG_s, \quad S^T = S, \quad K^T = -K, \quad s = 1, \ldots, r.$$

Это следует из эквивалентности матричных неравенств $X \geq 0$ и $\tilde{X} \geq 0$.

Если $H \geq 0$, в частности, $\Gamma \geq 0$, то оператор M монотонный. Однако оператор M может быть монотонным даже в тех случаях, когда $i_-(H) \neq 0$ или $i_-(\Gamma) \neq 0$. Простейшим примером такого оператора является оператор транспонирования:

$$X^T = \sum_{p,q=1}^{n} x_{pq} E_{pq}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{1n} & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix}, \quad i_{\pm}(E) = \frac{n(n \pm 1)}{2},$$

где E_{pq} — элементы единичного базиса пространства $C^{n\times n}$. Если для некоторого вектора $x \in C^n$ $(z \in C^n)$ выполняется равенство

$$\mathrm{rang}\,[A_1 x, \ldots, A_k x] = k \quad \left(\mathrm{rang}\left[B_1^* z, \ldots, B_n^* z\right] = k\right),$$

то неравенство $\Gamma \geq 0$ эквивалентно монотонности оператора M.

Свойство монотонности оператора M можно определить в виде

$$G_z = \left\| z^* H_{pq} z \right\|_1^n \geq 0 \quad \forall z \in C^n. \tag{9}$$

При этом условия строгой (сильной) монотонности эквивалентны соотношениям $G_z \geq 0$, $G_z \neq 0$ $\forall z \neq 0$ ($G_z > 0$ $\forall z \neq 0$). Вычисляя главные миноры матрицы (9), отвечающие заданным наборам номеров строк и столбцов p, получаем алгебраические условия монотонности оператора M

$$\Theta_p = \left\| \Theta_{ij}^{(p)} \right\| \geq 0, \qquad \Theta_{ij}^{(p)} = \sum_{\xi,\eta} \det \begin{bmatrix} h_{p_1 p_1}^{\xi_1 \eta_1} & \ldots & h_{p_1 p_\nu}^{\xi_1 \eta_\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p_\nu p_1}^{\xi_\nu \eta_1} & \ldots & h_{p_\nu p_\nu}^{\xi_\nu \eta_\nu} \end{bmatrix},$$

$$p = \{p_1, \ldots, p_\nu\}, \quad 1 \leq p_1 < \ldots < p_\nu \leq n, \quad \nu = 1, n,$$

$$\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\}, \quad i = \{i_1, \ldots, i_\nu\}, \quad 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_\nu \leq n,$$

$$\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_\nu\}, \quad j = \{j_1, \ldots, j_\nu\}, \quad 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_\nu \leq n.$$

Здесь суммирование проводится по всем наборам индексов $\xi(\eta)$, совпадающим после упорядочивания с $i(j)$, а строки (столбцы) матрицы Θ_p, отвечающие наборам индексов $i(j)$, построены в лексикографическом порядке.

Используя спектральное разложение неотрицательно определенных матриц, можно показать, что условия (9) выполняются в том и только в том случае, когда блоки матрицы H представимы в виде [11]

$$H_{pq} = U_p U_q^* + V_q V_p^*, \quad p, q = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Из (8) и (10) вытекает общее представление монотонного оператора.

Лемма 3. *Линейный оператор M является монотонным относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц в том и только в том случае, когда он представим в виде*

$$MX = \sum_i A_i X A_i^* + \sum_j B_j X^T B_j^*. \tag{11}$$

Можно установить, что операторы типа AXA^* и BX^TB^* являются экстремальными. Следовательно, согласно лемме 4, монотонные операторы представимы в виде суммы своих экстремальных минорант. В представлении (11) число слагаемых экстремальных минорант можно уменьшить, если некоторые из них линейно выражаются через остальные, в частности, если матрицы A_i (или B_j) линейно зависимы.

Монотонный оператор M — строго монотонный в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X_0 \geq 0$ выполняется неравенство $MX_0 > 0$. Действительно, для любой матрицы $X > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $X \geq \varepsilon X_0$ и, следовательно, $MX \geq \varepsilon M X_0 > 0$.

Строго монотонный оператор может быть необратимым. Так, оператор Шура $MX = A \odot X$ является строго монотонным тогда и только тогда, когда $A \geq 0$, $a_{ii} > 0$ для любого i, а критерием его обратимости служат неравенства $a_{ij} \neq 0$ для любых i, j. Линейный оператор $MX = (\operatorname{tr} X) I$ — сильно монотонный, но необратимый.

Перейдем к описанию класса монотонно обратимых операторов. Учитывая структуру монотонного оператора (11), полагаем

$$MX = M_0X - M_1X - \ldots - M_rX, \quad M_jX = \begin{cases} A_jXA_j^*, & j \in J_1, \\ A_jX^TA_j^*, & j \in J_2, \end{cases} \tag{12}$$

где $A_j \in C^{n\times n}$, J_1 и J_2 — некоторые подмножества индексов. Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Линейный оператор* (12) *монотонно обратим в том и только в том случае, когда выполнены соотношения*

$$\rho(T) < 1, \quad T(\lambda) = \lambda T_0 - T_1 - \ldots - T_r, \quad \det A_0 \neq 0, \tag{13}$$

$$T_j = \begin{cases} A_j \otimes \overline{A}_j, & j \in J_1, \\ (A_j \otimes \overline{A}_j)E, & j \in J_2, \end{cases} \quad E = \sum_{t,i=1}^{n} E_{ti} \otimes E_{it}.$$

где $\rho(T)$ — *спектральный радиус пучка матриц* $T(\lambda)$.

Операторы вида (12) с линейно независимыми матричными коэффициентами A_j не являются монотонными. Если оператор одновременно монотонный и монотонно обратим, то он является экстремальным оператором типа AXA^* или AX^TA^*, где A — некоторая матрица полного ранга. Условия (13) можно обобщить на случай прямоугольных матричных коэффициентов при ограничении $\operatorname{rang} A_0 = m < n$. Легко привести пример монотонно обратимого оператора, не представимого в виде (12). Общее представление линейных монотонно обратимых операторов пока не установлено.

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 1. – С. 3 – 95.
3. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., Ван Дуйн К., Де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
4. *Fiedler M., Pták V.* On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors // Czech. Math. J. – 1962. – **12** (87). – P. 382 – 400.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
8. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы. – Ташкент: Фан, 1966. – С. 14 – 45.
9. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.
10. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (Алгебраические критерии). – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.
11. *Мазко А. Г.* Матричные уравнения и неравенства в задачах локализации спектра // Вопросы аналитической механики и ее приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 203 – 218.
12. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1341 – 1351.
13. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – **28**. – 216 с.

Получено 16.09.99,
после доработки — 21.01.2000