УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

СВЯЗЬ ТЕОРЕМЫ АДАМАРА О ТРЕХ КРУГАХ С НЕКОТОРЫМИ ВОПРОСАМИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

By using the classical Hadamard theorem, we obtain an exact in certain sense inequality among the best polynomial approximations of an analytical function $f(z)$ from the Hardy space $H_p, p \geq 1$, in disks of radii ρ, ρ_1, and ρ_2, $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < 1$.

За допомогою класичної теореми Адамара одержано в певному розумінні точну нерівність між найкращими поліноміальними наближеннями аналітичної функції $f(z)$ з простору Харді H_p, $p \geq 1$, у кругах радіусів ρ та ρ_1, ρ_2, $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < 1$.

В конструктивной теории функций действительного переменного некоторые неравенства, например, колмогоровского типа, нашли свое приложение к задачам теории аппроксимации (см., например, [1, 2]). В случае аналитических функций комплексного переменного определенное приложение к задачам теории полиномиальной аппроксимации имеют некоторые известные классические результаты, например теорема Адамара о трех кругах. Этому вопросу и посвящена данная статья.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая внутри и на границе кольца, которое ограничено двумя окружностями $\gamma_{\rho_j} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho_j\}$, $j = 1, 2$; $0 < \rho_1 < \rho_2$. Обозначим через $M(f, \rho_j)$, $j = 1, 2$, и $M(f, \rho)$, $\rho_1 < \rho < \rho_2$, соответственно максимум $|f(z)|$ на окружностях γ_{ρ_j}, $j = 1, 2$, и $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$.

В 1912 г. Адамар получил оценку сверху величины $M(f, \rho)$ через значения $M(f, \rho_1)$ и $M(f, \rho_2)$, а именно [3, с. 75]:

$$M(f, \rho) \leq M^{\alpha_1}(f, \rho_1) M^{\alpha_2}(f, \rho_2), \tag{1}$$

где $\alpha_1 = \ln(\rho_2/\rho)/\ln(\rho_2/\rho_1)$, $\alpha_2 = \ln(\rho/\rho_1)/\ln(\rho_2/\rho_1)$.

Далее под H_p, $p \geq 1$, будем понимать банахово пространство Харди аналитических в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_p} = \lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p} < \infty,$$

а под $L_p, p \geq 1$, — пространство всех комплекснозначных на γ_1 функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \varphi(e^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

Известно [4], что каждая функция $f(z) \in H_p$ имеет угловые граничные значения $f(e^{it})$ почти во всех граничных точках e^{it}, $0 \leq t < 2\pi$, и $f(e^{it}) \in L_p$. При этом множество граничных значений функций из H_p образует подпространство $\mathfrak{N} \subset L_p$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{int} dt = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{N} \subset L_p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В частности, если функцию $f(z) \in H_p$ идентифицировать с ее угловыми граничными значениями $f(e^{it})$, то H_p можно рассматривать как подпространство в L_p и

$$\|f\|_{H_p} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Согласно теореме Рисса каждый ограниченный линейный функционал F на L_p, $1 \le p < \infty$, имеет единственное представление

$$F(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\psi\left(e^{it}\right)dt \qquad \forall f \in L_p, \tag{2}$$

где $\psi \in L_q(1/p + 1/q = 1)$ и $\|F\| = \|\psi\|_{L_q}$.

Символом $H_{p,\rho}$, $0 < \rho \le 1$; $H_{p,1} \equiv H_p$, обозначим банахово пространство аналитических в круге $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, $U_1 \equiv U$, функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_{p,\rho}} \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|^p dt\right\}^{1/p} < \infty.$$

Пусть P_n — подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного z, степень которых не превышает $n-1$, а $E_n(f; H_{p,\rho})$ — наилучшее приближение функции $f(z) \in H_{p,\rho}$ элементами подпространства P_n в метрике $H_{p,\rho}$. Очевидно, что

$$E_n(f; H_{p,\rho}) = \inf_{c_k \in \mathbb{C}(k=\overline{0,n-1})}\left\|f(\rho z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k z^k\right\|_{H_p} =$$

$$= \inf_{c_k^* \in \mathbb{C}(k=\overline{0,n-1})}\left\|f(\rho z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^* z^k\right\|_{H_p} = E_n(f_\rho, H_p),$$

где $f_\rho(z) \overset{\text{df}}{=} f(\rho z)$.

Основными результатами данной статьи являются следующая теорема и вытекающее из нее следствие.

Теорема. *Пусть аналитическая в круге U функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди H_p, $1 \le p < \infty$. Тогда для любых ρ_1, ρ_2 и ρ, удовлетворяющих условиям $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < 1$, справедливо неравенство*

$$E_n(f; H_{p,\rho}) \le E_n^{\alpha_1}\left(f; H_{p,\rho_1}\right) E_n^{\alpha_2}\left(f; H_{p,\rho_2}\right), \tag{3}$$

которое является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in H_p$, обращающая (3) *в равенство.*

Доказательство. Обозначим через $P_{n,q}^\perp$ множество функций $g(e^{it}) \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$, которые на единичной окружности ортогональны алгебраическим полиномам комплексного переменного z степени $\le n-1$, т. е.

$$P_{n,q}^\perp = \left\{g\left(e^{it}\right) \in L_q : \int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right)e^{ikt}\,dt = 0,\ k = \overline{0, n-1}\right\}.$$

Очевидно, что вместе с функцией $g(e^{it})$ множеству $P_{n,q}^\perp$ принадлежат также и функции $\pm g(e^{i(t\pm\beta)})$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$. Сформулируем в нужном нам виде один результат Г. Ц. Тумаркина и С. Я. Хавинсона [5], касающийся использования двойственных соотношений для решения задачи наилучшего приближения в комплексной плоскости:

Пусть X^* — *пространство, сопряженное банахову пространству* X, $\mathcal{L}$ — *произвольное линейное многообразие в* X, $\mathfrak{M}$ — *множество всех линейных функционалов* $\mu \in X^*$ *таких, что* $\mu(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{L}$. *Тогда*

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{L}} \| f - \varphi \|_X = \sup_{\substack{\mu \in \mathfrak{M}, \\ \|\mu\| \le 1}} |\mu(f)| \quad \forall f \in X, \tag{4}$$

причем существует функционал $\mu_* \in \mathfrak{M}$, *для которого верхняя грань в* (4) *достигается.*

В силу (4) и (2) для рассматриваемого случая запишем

$$E_n(f; H_{p,\rho}) = \sup_{\substack{\psi \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\psi\|_{L_q} \le 1}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \psi(e^{it}) \, dt \right|. \tag{5}$$

Рассмотрим далее аналитическую в круге U функцию

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z e^{it}) \tilde{\psi}(e^{it}) \, dt, \tag{6}$$

у которой $\tilde{\psi}(e^{it}) \in P_{n,q}^{\perp}$ и $\|\tilde{\psi}\|_{L_q} \le 1$. Используя неравенство (1), для $\tilde{f}(z)$ получаем

$$M(\tilde{f}, \rho) \le M^{\alpha_1}(\tilde{f}, \rho_1) M^{\alpha_2}(\tilde{f}, \rho_2). \tag{7}$$

На основании (5) – (7) и рассуждений, использованных при доказательстве предложения 4.3.1 из [6, с. 78], имеем

$$\sup_{\substack{\tilde{\psi} \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde{\psi}\|_{L_q} \le 1}} \max_{\theta} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \tilde{\psi}(e^{i(t-\theta)}) \, dt \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde{\psi}\|_{L_q} \le 1}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \tilde{\psi}(e^{it}) \, dt \right| = E_n(f; H_{p,\rho}) \le$$

$$\le \left\{ \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde{\psi}\|_{L_q} \le 1}} \max_{\theta} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\rho_1 e^{it}) \tilde{\psi}(e^{i(t-\theta)}) \, dt \right| \right\}^{\alpha_1} \times$$

$$\times \left\{ \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde{\psi}\|_{L_q} \le 1}} \max_{\theta} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\rho_2 e^{it}) \tilde{\psi}(e^{i(t-\theta)}) \, dt \right| \right\}^{\alpha_2} =$$

$$= \left\{ \sup_{\substack{\tilde\psi \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde\psi\|_{L_q} \le 1}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f\left(\rho_1 e^{it}\right) \tilde\psi\left(e^{it}\right) dt \right| \right\}^{\alpha_1} \left\{ \sup_{\substack{\tilde\psi \in P_{n,q}^{\perp}, \\ \|\tilde\psi\|_{L_q} \le 1}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f\left(\rho_2 e^{it}\right) \tilde\psi\left(e^{it}\right) dt \right| \right\}^{\alpha_2} =$$

$$= E_n^{\alpha_1}\left(f; H_{p,\rho_1}\right) E_n^{\alpha_2}\left(f; H_{p,\rho_2}\right).$$

Таким образом, неравенство (3) доказано.

Рассмотрим далее вопрос о наилучшем полиномиальном приближении индивидуальной функции $f_0(z) = z^{n_0}$, $n_0 \in N$, $n_0 \ge n$. Очевидно, что

$$E_n(f_0; H_{p,\rho}) \le \|f_0\|_{H_{p,\rho}} = \rho^{n_0}.$$

С другой стороны, поскольку $\psi_0(e^{it}) = e^{-in_0 t} \in P_{n,q}^{\perp}$ и $\|\psi_0\|_{L_q} = 1$, то из (5) следует оценка снизу

$$E_n(f_0; H_{p,\rho}) \ge \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f_0\left(\rho e^{it}\right) \psi_0\left(e^{it}\right) dt \right| = \rho^{n_0}.$$

Таким образом, имеем равенство $E_n(f_0; H_{p,\rho}) = \rho^{n_0}$. С учетом этого факта и неравенства (3) для функции $f = f_0$ получаем

$$\rho^{n_0} \le \rho_1^{n_0 \alpha_1} \rho_2^{n_0 \alpha_2},$$

где $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < 1$, или

$$\rho \le \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2}. \tag{8}$$

Полагая $r_{1,2} = \rho_2 / \rho_1$, преобразуем правую часть неравенства (8):

$$\rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} = \rho_1^{\log_{r_{1,2}}(\rho_2/\rho)} \rho_2^{\log_{r_{1,2}}(\rho/\rho_1)} =$$

$$= \rho_1^{\log_{r_{1,2}}(\rho_2/\rho) + \log_{r_{1,2}}(\rho/\rho_1)} r_{1,2}^{\log_{r_{1,2}}(\rho/\rho_1)} = \rho. \tag{9}$$

Следовательно, в соотношении (8) имеет место знак равенства, и для функции $f_0(z) = z^{n_0}$ неравенство (3) обращается в равенство. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть Q — произвольный класс аналитических в круге U функций, принадлежащих пространству Харди H_p, $1 \le p < \infty$, и $E_n(Q; H_{p,\rho}) = \sup\{E_n(f; H_{p,\rho}) : f \in Q\}$ — наилучшее приближение класса Q подпространством алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\le (n-1)$. Тогда для любого ρ, удовлетворяющего условию $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < 1$, справедливо неравенство*

$$E_n(Q; H_{p,\rho}) \le E_n^{\alpha_1}\left(Q; H_{p,\rho_1}\right) E_n^{\alpha_2}\left(Q; H_{p,\rho_2}\right), \tag{10}$$

которое является точным в том смысле, что существуют функциональные класcы, обращающие (10) *в равенство.*

Действительно, на основании (3) неравенство (10) очевидно.

Приведем теперь примеры функциональных классов, для которых в (10) имеет место знак равенства. Пусть $\Phi(x)$ — положительная неубывающая функция, определенная при $x > 0$ и такая, что $\lim\{\Phi(x) : x \to 0\} = \Phi(0) = 0$. Символом $H_p\Phi$ обозначим класс функций $f(z) \in H_p$, для которых

$$\frac{n}{\pi-2}\int_0^{\pi/(2n)}\omega_2(f,2x)_p dx \le \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

где $\omega_2(f,2x)_p = \sup\left\{\left\|f\left(e^{i(\bullet+\theta)}\right)-2f\left(e^{i(\bullet)}\right)+f\left(e^{i(\bullet-\theta)}\right)\right\|_{H_p} : |\theta|\le x\right\}$. Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z=\rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. Очевидно, что $f_a^{(1)}(z)=\partial f(z)/\partial t = f_z^{(1)}(z)z_t^{(1)} = f_z^{(1)}(z)\,zi$ и $f_a^{(r)}(z)=\left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a^{(1)}$, $r=2,3,\ldots$. Под $W_a^r H_p\Phi$ понимаем класс функций $f(z)\in H_p$, для которых $f_a^{(r)}(z)\in H_p\Phi$. В случае $r=0$ полагаем $f_a^{(0)}(z)=f(z)$, $W_a^0 H_p\Phi = H_p\Phi$.

Л. В. Тайков [7] вычислил точные значения колмогоровских n-поперечников классов $W_a^r H_p\Phi$, $r\in\mathbb{Z}_+$, в метрике пространства H_p при дополнительном ограничении на мажорирующую функцию $\Phi(x)$ при $0<x\le\pi/2$:

$$\frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)} \ge \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}1-\dfrac{2}{\pi\lambda}\sin(\pi\lambda/2), & 0<\lambda\le 2;\\ 2(1-1/\lambda), & \lambda\ge 2,\end{cases} \tag{11}$$

и привел пример функции $\Phi(x)=x^{2/(\pi-2)}$, удовлетворяющей условиям (11).

Из результатов, полученных в [8] в процессе нахождения точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников классов $W_a^r H_p\Phi$ в метрике пространства $H_{p,\rho}$, следует, что при выполнении неравенств (11) имеют место соотношения

$$E_n\left(W_a^r H_p\Phi; H_{p,\rho}\right) = \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Тогда для $Q = W_a^r H_p\Phi$ с учетом соотношений (9) и (12) неравенство (10) обращается в равенство.

1. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Замечание к неравенству А. Н. Колмогорова // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетров. ун-т, 1989. – С. 14–17.
2. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functional // Ann. Math. – 1976. – 2, № 1. – P. 11–40.
3. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 364 с.
4. *Duren P. L.* Theory of H_p spaces. – New York; London: Acad. Press, 1970. – 282 p.
5. *Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.* Качественные свойства экстремальных задач некоторых типов // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 77–95.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – 22, № 2. – С. 285–295.
8. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Там же. – 1995. – 57, № 1. – С. 30–39.

Получено 20.01.99

УДК 517.5

В. М. Дільний (Дрогобиц. пед. ун-т)

ПРО ПОВНОТУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ У КУТОВІЙ ОБЛАСТІ

We show that the system $\left\{e^{-\lambda z}/(1+z)^2 : \lambda > 0\right\}$ is complete in a class of functions analytic in an angle.

Показано, що система $\left\{e^{-\lambda z}/(1+z)^2 : \lambda > 0\right\}$ є повною в одному класі функцій, аналітичних в куті.

Позначимо через $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < \infty$, простір функцій, аналітичних в куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z: \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\|f\| := \sup_{\alpha<\theta<\beta}\left\{\int_0^\infty \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p dr\right\} < +\infty,$$

а через $E^\infty[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ — простір функцій, аналітичних і обмежених в $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$. Простори $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ для $p = 2$ вивчалися в роботах [1, 2], а для інших $p > 0$ — в [3–5]. В цих роботах, зокрема, показано, що функції з вказаних просторів при $1 \le p \le \infty$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення $F(z)$ і $F \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Крім цього, вказана вище норма еквівалентна такій:

$$\|f\|_* = \int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} |f(z)|^p |dz|.$$

В [6–8] встановлено аналог теореми Пелі – Вінера для вагових просторів Харді. У випадку $p = 1$ аналог був би доведеним, якби вдалося показати, що для кожної f з простору $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ і заданого $\sigma > 0$ можна підібрати скінченну лінійну комбінацію $\gamma(z)$ функцій системи

$$\left\{\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2} : \lambda > 0\right\} \tag{1}$$

так, що $(\gamma(z) - f(z))e^{2/\sigma z} \in L^1[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. Результати про наближення з дотиком [9] дають підстави припустити існування такого наближення. Проте ми можемо довести лиш наступне твердження.

Теорема. *Система* (1) *є повною в* $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$.

Для доведення нам потрібно кілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Якщо* $\Phi \in L^2[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{\Phi(t)}{t-z}dt, \tag{2}$$

то $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$.

Лема 2. *Якщо* $\Phi \in L^2[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і*

$$\int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{\Phi(t)}{t-z}dt = 0, \quad z \in \mathbb{C}/\overline{\mathbb{C}}\left(-\frac{\pi}{2},0\right), \tag{3}$$

то Φ *є кутовою граничною функцією функції* $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, *визначеної рівністю* (2).

Лема 3. *Якщо* $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ *і* Φ — *її кутова гранична функція, то справедлива рівність* (2) *при* $z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ *і* (3).

Лема 4. *Якщо* $\varphi \in E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, *то*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \varphi(z)dz = 0.$$

Лема 1 міститься, наприклад, в [5], лема 2 випливає з властивостей інтеграла типу Коші (див. [10, с. 190]), лема 3 наведена в [1, с. 114], а лема 4 — в [6].

Доведення теореми. Припустимо, що система (1) не є повною. Тоді (див. [11, с. 175]) знайдеться лінійний неперервний на $E^p[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ функціонал $\psi \neq 0$, який перетворюється в нуль на кожній функції системи (1). Простір $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ є підпростором простору $L^1[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. За теоремою Хана – Банаха знайдеться $h \in L^\infty[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ така, що

$$(\forall\lambda > 0): \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2}dz = 0.$$

Тому

$$(\forall w \in \mathbb{C}): \int\limits_0^\infty e^{\lambda w}\left(\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2}dz\right)d\lambda = 0. \tag{4}$$

Оскільки для $w \in \mathbb{C}(\pi/2, 3\pi/2)$ подвійний інтеграл в (4) збігається абсолютно, то, застосувавши теорему Фубіні, при $w \in \mathbb{C}(\pi/2, 3\pi/2)$ маємо $h_1(w) = 0$, де

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{h(z)}{(1+z)^2}\frac{1}{z-w}dz. \tag{5}$$

Враховуючи аналітичність h_1 при $w \in \mathbb{C}(0,\pi)$ і (4), отримуємо

$$h_1(w) = 0, \quad w \in \mathbb{C}\left(0, \frac{3\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Тому за лемами 1 і 2 $h(w)/(1+w)^2 \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$ і, отже, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $h(w)/(1+\varepsilon w)^2 \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$. З леми 3, взявши фіксоване $w_0 \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ отримуємо

$$\frac{h(w)}{(1+\varepsilon w)^2} - \frac{h(w_0)}{(1+\varepsilon w_0)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{h(z)}{(1+\varepsilon z)^2}\frac{w-w_0}{(z-w)(z-w_0)}dz.$$

Оскільки інтеграл збігається рівномірно по $\varepsilon \in (0, \infty)$, то, переходячи до границі при $\varepsilon \to 0+$, одержуємо

$$h(w) - h(w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(z)\left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_0}\right)dz.$$

З (5) і (6) для $w \in \mathbb{C}(-\pi/2,0)$ знаходимо

$$h(w) - h(w_0) = (h(w) - h(w_0)) + (h(-w) - h(-w_0)) -$$

$$- (h(\overline{w}) - h(\overline{w}_0)) - (h(-\overline{w}) - h(-\overline{w}_0)) =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \left(\frac{uvzh(z)}{\left(z^2 - u^2 + v^2\right)^2 + 4u^2v^2} - \frac{u_0v_0zh(z)}{\left(z^2 - u_0{}^2 + v_0{}^2\right)^2 + 4u_0^2v_0^2} \right) dz.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \left| \frac{uvz}{\left(z^2 - u^2 + v^2\right)^2 + 4u^2v^2} \right| |dz| \le \frac{\pi}{2}, \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

то

$$|h(w)| \le 4\|h(w)\|_{L^\infty[\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)]}, \qquad w \in \mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Отже, $h \in E^\infty[\mathbb{C}(-\pi/2, 0)]$. З леми 4 маємо

$$\left(\forall f \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right]\right): \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} h(w) f(w)\, dw = 0,$$

а це означає, що функціонал ψ перетворюється в нуль на всіх елементах простору $E^1[\mathbb{C}(-\pi/2, 0)]$, тобто $\psi \equiv 0$, що суперечить припущенню.

Автор вдячний Б. В. Винницькому за постійну увагу до роботи.

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы типа Винера – Пели и Мюнца – Саса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **41**, № 4. – С. 868–894.
3. *Григорян Ш. А.* О базисности неполных систем рациональных функций в углоеой области // Изв. АН Арм ССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5–6. – С. 460–487.
4. *Левин Б.Я., Любарский Ю.И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657–702.
5. *Мартиросян В. М.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях // Изв. АН Арм ССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5–6. – С. 490–531.
6. *Винницький Б.В.* Про узагальнення теореми Пелі – Вінера // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 37–44.
7. *Винницький Б.В.* Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Допов. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 10. – С. 13–17.
8. *Винницький Б.В.* Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 1. – С. 41–52.
9. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
10. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.;Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

Одержано 20.09.99