УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т. математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ. I

In the Banach spaces of functions analytic in the Jordan domain $\Omega \subset \mathbb{C}$, we establish order estimates of the Kolmogorov widths of some classes of functions which, in Ω, are representable by Cauchy-type integrals along a rectifiable curve $\Gamma = \partial\Omega$ and can be analytically extended in $\Omega' \supset \Omega$ or $\mathbb{C}$.

В банахових просторах функцій, аналітичних в жордановій області $\Omega \subset \mathbb{C}$, встановлено порядкові оцінки поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій, що зображуються в Ω інтегралами типу Коші вздовж спрямлюваної кривої $\Gamma = \partial\Omega$ і можуть бути аналітично продовжені в $\Omega' \supset \Omega$ або в $\mathbb{C}$.

В работе изучаются аппроксимативные свойства классов функций, аналитических в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой (з. с. ж. к.) Γ.

Исследования состоят в установлении оценок приближения таких классов функций конечномерными подпространствами определенных функциональных банаховых пространств.

В качестве аппроксимируемых множеств функций рассматриваются классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ (см. [1], а также [2]), причем (в первой части работы) при таких ограничениях на последовательность $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$, определяющую класс, при которых функции из $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналитически продолжимы вне Γ в область $\Omega' \supset \supset \Omega$ или даже во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Изложим кратко схему определения классов $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$. С этой целью обозначим вначале через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(T)$ естественную реализацию на окружность $T = \{w: |w| = 1\}$ классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ (ψ, β)-дифференцируемых в смысле А. И. Степанца (см., например, [3]) комплекснозначных 2π-периодических локально-суммируемых функций действительной переменной. Пусть далее $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ — функции, осуществляющие конформный гомеоморфизм между внешностью области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ и внешностью круга $\overline{D} = \{w: |w| \le 1\}$, причем функция $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{z \to \infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\infty) = \infty.$$

Введем обозначение $L(\Gamma)$ для пространства определенных и суммируемых на Γ функций и определим множества

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma) := \left\{ f \in L(\Gamma) \colon f \circ \Psi \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \right\}$$

и

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega) := \left\{ \mathcal{K}f \colon \mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma),\ z \in \Omega \right\}.$$

Далее, полагаем

$$\tilde{L}_q(\Gamma) = \left\{ \varphi \colon \|\varphi\|_{\Gamma,q} := \left(\int\limits_{\Gamma} |\varphi(z)|^q |\Phi'(z)| |dz| \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad 1 < q < \infty,$$

где $\Phi'(\cdot)$ — производная функции $\Phi(\cdot)$, продолженной непрерывным образом на Γ.

Функции, принадлежащие множествам $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$, будем рассматривать как элементы пространства $\tilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$, состоящего из аналитических в Ω функций $\varphi(\cdot)$, имеющих почти всюду на Γ угловые граничные значения $\overline{\varphi} \in \tilde{L}_q(\Gamma)$. Норму элемента $\varphi(\cdot)$ отождествим с нормой $\overline{\varphi}(\cdot)$. Кривую Γ, которая ограничивает область Ω и полностью определяется функцией $\Phi(\cdot)$ (или $\Psi(\cdot)$), подчиним следующим требованиям:

i) Γ — регулярная кривая, т. е.

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0} \mu(\Theta_z(r))/r < \infty,$$

где $\Theta_z(r) = \{\zeta \in \Gamma \colon |\zeta - z| \le r\}$, а $\mu(A)$ — мера Лебега множества A на Γ;

ii) $|\Phi'(\cdot)|$ удовлетворяет аналогу (для весов на Γ) A_q-условия Маккенхаупта (см. [4])

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int\limits_{\theta_z(r)}|\Phi'(\zeta)||d\zeta|\right)\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int\limits_{\theta_z(r)}|\Phi'(\zeta)|^{-1/(q-1)}|d\zeta|\right)^{q-1} < \infty,$$

$1 < q < \infty$. Множество з. с. ж. к. Γ, удовлетворяющих условиям i) и ii), будем обозначать через RA_q.

Для функций $\varphi \in \tilde{A}_q(\overline{\Omega})$ через $\rho_n(\varphi;\cdot)_{\Gamma,q}$ и $E_n(\varphi;\cdot)_{\Gamma,q}$ обозначаются следующие аппроксимационные характеристики:

$$\rho_n(\varphi;z) := \left|\varphi(z) - S^F_{n-1}(\varphi;z)\right|, \quad z \in \Omega,$$

где $S^F_n(\varphi;z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi)F_k(z)$ — частная сумма порядка n ряда Фабера функции $\varphi(\cdot)$,

$$a_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \varphi(\Psi(w))w^{-k-1}dw, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

а $F_k(\cdot)$ — многочлен Фабера порядка k для области Ω (см., например, [5, с. 350]);

$$E_n(\varphi)_{\Gamma,q} := \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n}\|\varphi(z) - p_n(z)\|_{\Gamma,q},$$

где $\mathcal{P}_n = \{p_n \colon p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C}\}$ — пространство алгебраических полиномов степени n.

Соответственно определим

$$\mathcal{E}_n(W)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi\in W}\|\rho_n(\varphi;\cdot)\|_{\Gamma,q}$$

и

$$E_n(W)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi\in W} E_n(\varphi)_{\Gamma,q}, \quad W \subset \tilde{A}_q(\overline{\Omega}).$$

Через C_1, K, … в работе обозначаются абсолютные положительные постоянные, т. е. не зависящие от n.

1. Основной результат. Положим

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi \in I_0\colon (\exists K > 0 \ \ \forall t \geq 1\colon \quad \eta(t) - t \leq K)\},$$

где I_0 — множество положительных убывающих к нулю на $[1; \infty)$ функций; $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$.

Пусть

$$\mathfrak{N}_R := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_\infty\colon \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = R > 1\right\}$$

и

$$\mathfrak{N}_\infty := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_\infty\colon \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = \infty\right\}.$$

При условии $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, исходя из свойств преобразования Фабера $\mathcal{F}_\Omega$ для аналитических в Ω функций (см. утверждение 1) и условий сходимости рядов по многочленам Фабера $F_k(\cdot)$, определяемых областью Ω (см., например, [6], гл. VI, VII), можно показать, что:

i) $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ — множество функций, аналитических в области $\Omega_R \supset \Omega$, ограниченной кривой $\Gamma_R = \{z\colon |\Phi(z)| = R\}$, если $\psi \in \mathfrak{N}_R$, например $\psi(t) = R^{-t}$, $R > 1$;

ii) $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ — множество целых функций, если $\psi \in \mathfrak{N}_\infty$, например $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R, r > 1$.

Итак, определим изучаемую в работе аппроксимационную характеристику.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, W — центрально-симметричное множество в X и L_n — произвольное n-мерное подпространство в X.

Определение. *Величина*

$$d_n(W;X) = \inf_{L_n\subset X} \sup_{x\in W} \inf_{y\in L_n} \|x-y\|_X$$

называется n-мерным поперечником по Колмогорову множества W в пространстве X.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть Ω — область, ограниченная кривой $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. Тогда если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, то*

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n), \qquad 1 < p, \quad q < \infty.^* \tag{1}$$

2. Одно соотношение для функций из множества $\mathfrak{M}'_\infty$.

Лемма 1. *Если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то*

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\psi(l)} \ll \frac{1}{\psi(n)}. \tag{2}$$

Доказательство. Для $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, согласно определению, существует постоянная $K > 0$ такая, что $\eta(t) - t \leq K$ при любом $t \geq 1$ (далее считаем, что K — целое). Пусть $n \geq K$ — произвольное фиксированное и $n_0 = [n/K] + 1$, где

---

*Запись $\alpha(n) \asymp \beta(n)$ означает: существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от n, что $\forall n \geq 1$ $C_1 \leq \alpha(n)/\beta(n) \leq C_2$. Если только $C_1 \leq \alpha(n)/\beta(n)$ или $\alpha(n)/\beta(n) \leq C_2$, то соответственно будем писать $\alpha(n) \gg \beta(n)$ и $\alpha(n) \ll \beta(n)$.

$[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$ (понятно, что в этом случае $(n_0-1)K \le n < n_0K$).

Далее, поскольку, очевидно, $\underbrace{\eta(\eta(\ldots\eta}_{m \text{ раз}}(t))) \le mK$ при любом $m \in \mathbb{N}$, то $2^{-m}\psi(t) \ge \psi(t+mK)$, в частности,

$$\psi(rK) \ \ge \ 2^{s-r}\psi(sK), \quad s, r \in \mathbb{N}, \quad s \ge r.$$

Принимая во внимание это неравенство, имеем

$$\psi(n)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\psi(l)} \ < \ 2K + \psi((n_0-1)K)\sum_{l=K}^{(n_0-1)K}\frac{1}{\psi(l)} \ \le$$

$$\le \ 2K + \psi((n_0-1)K)\sum_{i=1}^{n_0-2}\sum_{l=iK}^{(i+1)K}\frac{1}{\psi(l)} \ <$$

$$< \ 2K + (K+1)\sum_{i=1}^{n_0-2}\frac{\psi((n_0-1)K)}{\psi((i+1)K)} \ < \ 2K + (K+1)\sum_{i=1}^{n_0-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-2-i} \ \le \ C,$$

что равносильно соотношению (2).

3. О преобразовании Фабера и обратном к нему. Рассмотрим линейные операторы $\mathcal{F}_\Omega$ и $\mathcal{F}^\Omega$, действующие согласно равенствам

$$\mathcal{F}_\Omega[f](z) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{f}(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}d\zeta, \quad f \in H_p, \quad z \in \Omega,$$

и

$$\mathcal{F}^\Omega[g](w) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\overline{g}(\Psi(\tau))}{\tau - w}d\tau, \quad g \in \tilde{A}_p(\overline{\Omega}), \quad w \in D,$$

где

$$H_p := \left\{\varphi \in \mathrm{Hol}(D)\colon \|\varphi\|_{H_p} = \sup_{0<\rho<1}\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(\rho e^{it})\right|^p dt\right)\right\}^{1/p} < \infty\right\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

— пространство Харди аналитических в D функций [7, с. 388]; через $\bar{f}$ и $\overline{g}$ в подынтегральных выражениях обозначены граничные значения функций $f \in H_p$ и $g \in \tilde{A}_p(\overline{\Omega})$ соответственно.

Утверждение 1. *Пусть Ω — область, ограниченная кривой $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$. Тогда операторы $\mathcal{F}_\Omega$ и $\mathcal{F}^\Omega$ осуществляют изоморфизм между подпространствами $H_p \cap \mathcal{P}_m$ и $\tilde{A}_p(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_m$.*

Доказательство. Вначале заметим, что

$$\mathcal{F}_\Omega[w^k](z) \ = \ F_k(z), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{3}$$

Соотношение (3) является простым следствием интегрального представления многочленов Фабера $F_k(\cdot)$ (см., например, [5, с. 358]):

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad z \in \Omega.$$

С другой стороны, в силу леммы 3 [8, с. 54]

$$\mathcal{F}^{\Omega}[F_k](w) = w^k, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4), с учетом того, что отображение $\mathcal{F}_{\Omega}: \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ биективно [8, с. 61], следует, что операторы $\mathcal{F}_{\Omega}$ и $\mathcal{F}^{\Omega}$, определенные на линейном пространстве $\mathcal{P}_m$, являются взаимно обратными.

Их непрерывность на указанных в утверждении нормированных подпространствах является следствием ограниченности при условии $\Gamma \in RA_q$ оператора Коши $\mathcal{K}: \tilde{L}_q(\Gamma) \to \tilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$, определяемого равенством $\mathcal{K}f(z) = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta - z)d\zeta$, $z \in \Omega$ (см., например, [9]). Более того, при $1 < p < \infty$, если Γ — произвольная з.с.ж.к., $\|\mathcal{F}_{\Omega}\|_{H_p \to \tilde{A}_p(\overline{\Omega})} = K_1 < \infty$.

Следующее утверждение устанавливает некоторые свойства оператора S_n^F, который каждой функции $f \in \tilde{A}_p(\overline{\Omega})$ сопоставляет частную сумму порядка n ее ряда Фабера.

Утверждение 2. *Пусть Ω — область, ограниченная кривой $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$. Тогда S_n^F — проектор $\tilde{A}_p(\overline{\Omega})$ на $\tilde{A}_p(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_m$, $m \le n$, т. е.:*

i) $\forall p_m \in \mathcal{P}_m$: $S_n^F(p_m) = p_m$;

ii) $\|S_n^F\|_{\tilde{A}_p(\overline{\Omega}) \to \tilde{A}_p(\overline{\Omega})} \le C$, *где C — положительная постоянная, не зависящая от n.*

Доказательство. Пусть задан произвольный полином $p_m(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$. Тогда

$$p_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k(p_m)\, F_k(z),$$

где $F_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, — многочлены Фабера для области Ω, а $a_k(p_m)$ — коэффициенты Фабера функции $p_m(\cdot)$, и соотношение i) является непосредственным следствием равенства [8, с. 54] (лемма 3)

$$a_k(F_l) = \begin{cases} 0, & k \ne l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Для доказательства ii) заметим, что (см. (3) и (4))

$$S_n^F(f; z) = \mathcal{F}_{\Omega}[Q_n](z),$$

где $Q_n(w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\, w^k$, а $a_k(f)$ — коэффициенты Фабера функции f. Поэтому, согласно утверждению 1,

$$\|S_n^F(f; \cdot)\|_{\Gamma, p} \le C_1 \|Q_n\|_{T, p}. \tag{5}$$

Поскольку $Q_n(\cdot)$ — частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f \circ \Psi \in L_p(T)$, то ввиду ограниченности оператора Фурье $S_n: L_p(T) \to L_p(T)$, $1 < p < \infty$,

$$\|Q_n\|_{T,p} \le C_2\|f\circ\Psi\|_{T,p} = C_2\|f\|_{\Gamma,p}. \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) получаем ii).

4. Аналог одного неравенства С. М. Никольского. С. М. Никольский [10] установил соотношение, связывающее значения норм произвольного тригонометрического полинома $t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ в пространствах $L_r(0;2\pi)$ и $L_s(0;2\pi)$:

$$\|t_n(x)\|_s \ll n^{1/r-1/s}\|t_n(x)\|_r, \quad 1\le r<s\le\infty.$$

Несколько усиленным вариантом этого соотношения является неравенство

$$\left\|t_{n_1,n_2}(x)\right\|_s \le C(n_2-n_1)^{1/r-1/s}\left\|t_{n_1,n_2}(x)\right\|_r, \quad 1\le r<s\le\infty, \tag{7}$$

где $t_{n_1,n_2}(\cdot)$ — произвольный полином вида

$$t_{n_1,n_2}(x) = \sum_{|k|\in[n_1;n_2]} c_k e^{ikx}, \quad 0\le n_1<n_2,$$

а C — постоянная, не зависящая от n_1 и n_2.

Именно неравенство (7) будет использовано нами в дальнейшем, хотя следует отметить, что справедлив его простой аналог для алгебраических полиномов вида $P_{n_1,n_2}(z) = \sum_{k=n_1}^{n_2} c_k z^k$, $0\le n_1\le n_2$, $z\in\mathbb{C}$, множество которых обозначим через $\mathcal{P}_{n_1,n_2}$.

Утверждение 3. *Пусть* Ω — *область, ограниченная кривой* $\Gamma\in RA_r$, $1<r<s<\infty$ *и* $P_{n_1,n_2}\in\mathcal{P}_{n_1,n_2}$. *Тогда*

$$\left\|P_{n_1,n_2}\right\|_{\Gamma,s} \le C(n_2-n_1)^{1/r-1/s}\left\|P_{n_1,n_2}\right\|_{\Gamma,r}. \tag{8}$$

Для доказательства (8) достаточно заметить, что любой полином $P_{n_1,n_2}(\cdot)$ допускает единственное разложение в конечную сумму по многочленам Фабера $F_k(\cdot)$ для области Ω: $P_{n_1,n_2}(z) = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k F_k(z)$ и согласно утверждению 1 (с учетом соотношений (3) и (4))

$$C_1\left\|\tilde t_{n_1,n_2}(w)\right\|_{T,\nu} \le \left\|P_{n_1,n_2}(z)\right\|_{\Gamma,\nu} \le C_2\left\|\tilde t_{n_1,n_2}(w)\right\|_{T,\nu}, \quad 1<\nu<\infty, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от n_1 и n_2, а $\tilde t_{n_1,n_2}(w) = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k w^k$. Сочетание (9) и (7) равносильно (8).

5. Доказательство теоремы 1. ***Оценка снизу.*** Последовательное применение теоремы о проекторе [11, с. 207] (с учетом утверждения 2) и утверждения 1 позволяет легко получить базовое для оценки снизу поперечника соотношение

$$d_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde A_q(\overline{\Omega})) \gg d_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(D)\cap\mathcal{P}_m;\, H_q\cap\mathcal{P}_m),$$

или

$$d_n(L^{\Psi}_{\beta,p}(\Omega);\tilde A_q(\overline{\Omega})) \gg d_n(L^{\Psi}_{0,p}(T)\cap\mathcal{P}_m;\, L_q(T)\cap\mathcal{P}_m), \quad m\ge n. \tag{10}$$

Вначале предположим, что $q=2$.

Пусть $\tau = \{\tau_s\}_{s=0}^{n}$ — произвольная ортонормированная система в $L_2(T) \cap \mathcal{P}_m$. Обозначая через $(f;\tau_s)$ коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ по системе τ, т. е. $(f;\tau_s) = (2\pi i)\int_{|w|=1} f(w)\overline{\tau_s(w)}\,dw$, из разложений

$$w^k = \sum_{s=0}^{n} (w^k;\tau_s)\,\tau_s(w), \qquad k = 0, 1, \ldots n,$$
$$\tau_l(w) = \sum_{k=0}^{n} (\tau_l; w^k)\, w^k, \qquad l = 0, 1, \ldots n, \tag{11}$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \left|(w^k;\tau_s)\right|^2 = \sum_{s=0}^{n} \left|(w^k;\tau_s)\right|^2 = 1. \tag{12}$$

Положим $S_k(f;\tau;w) = \sum_{s=0}^{k}(f;\tau_s)\tau_s(w)$ и $a_s^k = (w^k;\tau_s)$. Тогда

$$\left\|w^k - S_{n-1}(w^k;\tau;w)\right\|_{T,2}^2 = \left\|w^k - \sum_{s=0}^{n-1} a_s^k \tau_s(w)\right\|_{T,2}^2 = \left|a_n^k\right|^2, \quad k = 0, 1, \ldots n. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$f_k(w) = \begin{cases} \psi(k)\, w^k, & k = 1, 2, \ldots, n; \\ \psi(1), & k = 0. \end{cases}$$

Понятно, что $f_k \in L_{0,p}^{\psi}(T)$ и

$$\sigma_k := \| f_k - S_{n-1}(f_k;\tau;w)\|_{T,2}^2 = \psi^2(k)\left|a_n^k\right|^2, \qquad k = 0, 1, \ldots n.$$

Покажем, что существуют k, $0 \le k \le n$, и $C > 0$ такие, что

$$\sigma_k \ge C\psi^2(n) \tag{14}$$

(полагаем, что $\psi(0) = \psi(1)$).

Предположим обратное. Тогда

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\left|a_n^k\right|^2 \le \sum_{k=0}^{n} \sigma_k / \psi^2(k) \le$$
$$\le C\psi^2(n) \sum_{k=0}^{n} 1/\psi^2(k). \tag{15}$$

Но согласно утверждению 1 для некоторого $C_0 > 0$ $\psi^2(n)\sum_{k=0}^{n} 1/\psi^2(k) \le C_0$ и поэтому при $0 < C < 1/C_0$ соотношение (15) противоречиво, что доказывает справедливость (14).

Из соотношения (14) следует оценка

$$d_n(L_{0,p}^{\psi}(T) \cap \mathcal{P}_n;\ L_2(T) \cap \mathcal{P}_n) \gg \psi(n)$$

при любом $0 < p < \infty$. Этим в сочетании с (10) устанавливается оценка

$$d_n(L_{\beta,p}^{\psi}(\Omega); \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)$$

при $q=2$, а с учетом вложения $\tilde{A}_2(\overline{\Omega}) \supset \tilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $2 \le q < \infty$, и в случае $1 < p < \infty$ и $2 \le q < \infty$.

Такая же оценка справедлива и в случае $1 < p < \infty$, $1 < q < 2$. В самом деле, пусть $\varphi = \{\varphi_l\}_{l=1}^n$ — произвольная ортонормированная система из $\mathcal{P}_n$. Тогда, полагая $\varphi_n^*(w) = w^n$, $w \in D$, вследствие ограниченности оператора Фурье $S_n\colon L_q(T) \to L_q(T)$ по системе $\{e^{ikt}\}_{k=0}^{\infty}$ и применения неравенства (7), будем иметь

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_n} \inf_{c_l} \left\| f - \sum_{l=1}^{n} c_l \varphi_l \right\|_{T,q} \gg$$

$$\gg \sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_n} \inf_{c_l} \left\| (S_n - S_{n-1})[f] - \sum_{l=1}^{n} c_l (S_n - S_{n-1})[\varphi_l] \right\|_{T,q} \gg$$

$$\gg \sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_n} \inf_{c} \left\| f - (c\varphi_n^* + (S_{n-1})[f]) \right\|_{T,2} \gg$$

$$\gg d_n(L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_n;\, L_2(T) \cap \mathcal{P}_n) \gg \psi(n),$$

т. е.

$$d_n(L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_n;\, L_q(T) \cap \mathcal{P}_n) \gg \psi(n)$$

при $1 < p < \infty$, $1 < q < 2$. Сопоставляя это равенство с соотношением (10), при таких ограничениях на параметры p и q получаем оценку

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\, \tilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n).$$

***Замечание* 1.** В случае $1 < p \le q < \infty$ оценку снизу в теореме 1 можно получить, исходя из других соображений. Именно, достаточно воспользоваться ранее установленной автором оценкой $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_p(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n)$ при $1 < p < \infty$ и $\psi \in I_0$.

Оценки сверху в теореме 1 следуют из таковых для точных верхних граней наилучших приближений алгебраическими полиномами степени $n-1$ по множеству $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ в пространстве $\tilde{A}_q(\overline{\Omega})$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть Ω — область, ограниченная кривой $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$ и $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \psi(n).$$

Доказательство. Оценка сверху является следствием легко проверяемого соотношения (при условии $\Gamma \in RA_q$)

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \asymp \|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q} \ll \|\rho_n(F;\cdot)\|_{T,q}, \tag{16}$$

где $f \in \tilde{L}_q(\Gamma)$, а $F = f \circ \Psi$, и оценок величин $\|\rho_n(F;\cdot)\|_{T,q}$ в случае $F \in L^{\psi}_{\beta,p}(T)$, $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$ [3] (гл. II, § 6).

Оценка снизу в теореме 2 вытекает очевидным образом из установленной оценки снизу величины $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \tilde{A}_q(\Omega))$, хотя ее можно получить и непосредственно.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

***Замечание* 2.** Оценки, аналогичные приведенным в теореме 1, имеют место и в случае приближения классов $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ произвольными n-мерными подпространствами пространства Смирнова $E_q(\Omega)$ аналитических в Ω функций при условии, что з. с. ж. к. Γ, ограничивающая область Ω, только регулярна.

1. *Степанец А. И., Романюк В. С.* Классы $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение линейными средними их рядов Фабера // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1556 – 1570.
2. *Романюк В. С.* Приближение классов аналитических функций алгебраическими многочленами и колмогоровские поперечники // Там же. – 1996. – **48**, № 2. – С. 236 – 250.
3. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. - 268 с.
4. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inaqualities for the Hardy maximal functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**, № 1. – P. 207 – 226.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
6. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
8. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216с.
9. *Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Математический анализ. – 1983. – **21**. – С. 42 – 128.
10. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
11. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1987. – **14**. – С. 105 – 260.

Получено 12.10.99