УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЕМКОСТЕЙ КОНДЕНСАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

The present paper is the first part of a succession of works dealing with the development of the theory of κ-capacities of condensers in a locally compact space X, where $\kappa\colon X\times X\to(-\infty,+\infty]$ is a lower semicontinuous function. Condensers are understood in a certain extended sense. We investigate the corresponding problem of the energy minimum on fairly general classes of Radon normalized alternating-sign measures. We describe potentials of the minimal measures, establish their characteristic properties, and study the uniqueness problem. (In the next two parts of the succession of works, we consider the problem of existence of minimal measures in the noncompact case and develop the corresponding approaches and methods.) To obtain an auxiliary result, we investigate the continuity of mapping

$$(x,\mu)\mapsto\int\kappa(x,y)\,d\mu(y),\qquad(x,\mu)\in X\times\mathfrak{M}^+(X),$$

where $\mathfrak{M}^+(X)$ is the cone of positive measures in X with the topology of vague convergence.

Стаття розпочинає цикл робіт, присвячених побудові теорії κ-ємностей конденсаторів в локально компактному просторі X (тут $\kappa\colon X\times X\to(-\infty,+\infty]$ — напівнеперервна знизу функція). Конденсатори трактуються в певному узагальненому сенсі.

Досліджується відповідна задача про мінімум енергії на досить загальних класах нормованих знакозмінних мір Радона. Отримано опис потенціалів мінімальних мір, виділено їх характеристичні властивості, вивчено питання єдиності. (Наступні дві частини роботи присвячено проблемі існування мінімальних мір у некомпактному випадку та розробці відповідних підходів і методів.) Як допоміжний результат досліджено неперервність відображення

$$(x,\mu)\mapsto\int\kappa(x,y)\,d\mu(y),\qquad(x,\mu)\in X\times\mathfrak{M}^+(X),$$

де $\mathfrak{M}^+(X)$ — конус додатних мір в X, наділений топологією слабкої збіжності.

Пусть X — локально компактное пространство. Следуя Бурбаки [1], предполагаем, что локально компактное пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Ядром в X назовем полунепрерывную снизу функцию $\kappa\colon X\times X\to\to(-\infty,+\infty]$.

Данная статья продолжает и развивает тематику, заложенную Б. Фугледе [2] и М. Оцукой [3] и посвященную решению экстремальных задач теории κ-потенциала на классах вещественных мер Радона в X. В отличие от [2, 3], где экстремальные задачи рассматриваются на классах положительных мер, в настоящем исследовании меры предполагаются знакопеременными, и это существенно меняет характер задач, формулировки результатов и методы их получения.

Используемые в настоящей работе понятия и результаты теории мер и интегрирования в локально компактном пространстве содержатся в [4, 5] (см. также обзор в [2]); в необходимом для дальнейших приложений ключе они тезисно изложены в п. 1. Используемые в данной части работы понятия и результаты теории κ-потенциала [2] изложены в п. 2. Постановка основной задачи настоящего исследования приведена в п. 3; там же дан краткий обзор некоторых его результатов.

Результаты настоящего исследования частично анонсированы в [6].

1. Меры на локально компактных пространствах. Пусть $C=C(X)$ и $\Phi=\Phi(X)$ — соответственно класс всех непрерывных и полунепрерывных снизу функций на X, а $C_0=C_0(X)$ — класс всех $f\in C$ с компактным носителем $S(f)$. (Всегда предполагаем, что значения непрерывной функции — конечные вещественные числа. Для полунепрерывной снизу функции допускается значение $+\infty$, но не $-\infty$.) Для любого класса функций $\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}^+$ обозначим класс всех $f \geq 0$ из $\mathcal{F}$. Пусть φ_E — характеристическая функция множества $E \subset X$.

1.1. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$ — линейное пространство всех вещественных мер Радона на X [4, с. 63]. Введем в $\mathfrak{M}$ так называемую *слабую* топологию — топологию отделимого локально выпуклого пространства, задаваемую полунормами $\mu \mapsto \sup\limits_{1 \leq j \leq n} |\mu(f_j)|$, где $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ — произвольный конечный набор функций из C_0 (см., например, [5, с. 174 ; 7, с. 18]; иногда ее называют широкой [4, с. 74] либо грубой [8, с. 77] топологией в $\mathfrak{M}$). Для обозначения полученного пространства сохраним символ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$.

Направленность $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}$ (S — направленное множество) [9] слабо сходится к $\mu_0 \in \mathfrak{M}$, если $\lim\limits_{s \in S} \mu_s(f) = \mu_0(f)$ для каждого $f \in C_0$. Множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ слабо ограничено, если для каждого $f \in C_0$ выполняется $\sup\limits_{\mu \in \mathfrak{B}} |\mu(f)| < +\infty$. Любое слабо ограниченное множество относительно компактно в слабой топологии [4, с. 76].

Любая положительная линейная форма на C_0 (т. е. линейная форма, принимающая неотрицательные значения на функциях из C_0^+) — мера на X [4, с. 67]. Выпуклый конус всех мер $\mu \geq 0$ с индуцированной из $\mathfrak{M}$ топологией обозначим через $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}^+(X)$. Пространство $\mathfrak{M}^+$ слабо полно [4, с. 76], а потому замкнуто в $\mathfrak{M}$.

1.2. Верхний интеграл от $g \in \Phi^+$ относительно $\mu \in \mathfrak{M}^+$ определяется равенством [5, с. 258]

$$\mu^*(g) := \int g\, d\mu := \sup\{\mu(f) : f \in C_0,\ f \leq g\}. \tag{1.1}$$

Этот интеграл аддитивен и положительно однороден по $g \in \Phi^+$ и $\mu \in \mathfrak{M}^+$.

Если ограничиться рассмотрением мер $\mu \in \mathfrak{M}^+$, *финитных* в X (т. е. с компактным *носителем* $S(\mu)$ [4, с. 84]), то определение (1.1) приемлемо для любой (не обязательно положительной) функции $g \in \Phi$ [5, с. 261]. При этом интеграл аддитивен и положительно однороден по $g \in \Phi$ и $\mu \in \mathfrak{M}^+$. Обозначая через $c \geq 0$ такое число, что $g(x) \geq -c$ для всех $x \in S(\mu)$, получаем $\int g\, d\mu = \int (g+c)\, d\mu - \int c\, d\mu$.

Далее для $\mu \geq 0$ понятие верхнего интеграла распространяется на произвольные функции $h : X \to [0, +\infty]$ посредством определения [5, с. 259]

$$\mu^*(h) := \inf\{\mu^*(g) : g \in \Phi^+,\ g \geq h\}.$$

Этот интеграл аддитивен и положительно однороден по μ, но полуаддитивен по h.

Если E — множество в X, то $\mu^*(E) := \mu^*(\varphi_E)$ называется *внешней мерой* E относительно μ; E называется μ-*пренебрежимым,* если $\mu^*(E) = 0$. Концепция μ-пренебрежимых множеств приводит к понятию μ-*почти всюду* [5, с. 264]. Если h_1 и h_2 — две функции со значениями в $[0, +\infty]$ и $h_1 \leq h_2$ μ-почти всюду, то $\mu^*(h_1) \leq \mu^*(h_2)$.

На линейном пространстве всех функций $f : X \to (-\infty, +\infty)$ с $\mu^*(|f|) < +\infty$ определим топологию, задаваемую полунормой $\mu^*(|\cdot|)$; замыкание C_0 в этом пространстве обозначим через $\mathcal{L}^1(\mu)$. Элементы линейного пространства $\mathcal{L}^1(\mu)$ с индуцированной локально выпуклой топологией называются μ-*интегрируемыми* функциями.

В силу неравенства $|\mu(f)| \le \mu^*(|f|)$, $f \in C_0$, линейная форма μ допускает единственное непрерывное продолжение с C_0 на $\mathcal{L}^1(\mu)$, которое обозначают тем же символом μ; $\int v\,d\mu := \mu(v)$, $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$, называют *интегралом* от v относительно μ. Если $v \ge 0$ и $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$, то $\mu(v) = \mu^*(v)$.

Если функции v_1 и v_2 со значениями в $(-\infty, +\infty)$ совпадают μ-почти всюду, то они одновременно либо принадлежат $\mathcal{L}^1(\mu)$, либо не принадлежат; в утвердительном случае $\mu(v_1) = \mu(v_2)$. Это приводит к следующему расширению понятия μ-интегрируемости.

Функцию u, определенную μ-почти всюду в X, со значениями в $[-\infty, +\infty]$ называют μ-интегрируемой, если существует функция $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$ такая, что $u = v$ μ-почти всюду в X; $\mu(u) := \int u\,d\mu := \mu(v)$ называют интегралом от u относительно μ.

Пусть g принадлежит классу Φ^+ или, если мера μ финитна, классу Φ. Тогда g μ-интегрируема тогда и только тогда, когда определенный формулой (1.1) интеграл конечен; в утвердительном случае эти два понятия интеграла совпадают. Если g' — еще одна такая функция и хотя бы один из интегралов $\mu^*(g)$, $\mu^*(g')$ конечен, то тогда $g - g'$ определена μ-почти всюду в X и полагаем $\int (g - g')\,d\mu := \mu^*(g) - \mu^*(g')$.

Множество $E \subset X$ называется μ-интегрируемым, если $\varphi_E \in \mathcal{L}^1(\mu)$; (конечная) величина $\mu(E) := \mu(\varphi_E)$ называется его *мерой*. Любое компактное множество μ-интегрируемо. Следуя [5, с. 272], множество $H \subset X$ назовем $\mu - \sigma$*-конечным*, если H содержится в объединении последовательности μ-интегрируемых множеств.

Внутренняя мера произвольного множества $E \subset X$ определяется равенством

$$\mu_*(E) := \sup\{\mu(K) \colon K \text{ компактно}, \;\; K \subset E\};$$

E μ-интегрируемо тогда и только тогда, когда $\mu_*(E) = \mu^*(E) < +\infty$ [5, с. 275]. Величины $\mu_*(E)$ и $\mu^*(E)$ совпадают (как конечное число или $+\infty$) и для произвольного открытого множества E [4, с. 176].

Понятие μ-интегрируемых множеств приводит к локальным концепциям μ-*измеримых* множеств и функций [5, с. 271–282]. Множество E называется μ-измеримым, если $E \cap K$ μ-интегрируемо для любого компактного множества $K \subset X$. Совокупность всех μ-измеримых множеств в X образует σ-алгебру; сужение на нее функции μ^* обозначим через μ. Если $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, где E_n, $n = 1, 2, \ldots$, μ-измеримы и попарно дизъюнктны, то $\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$. Класс всех *универсально измеримых* (т. е. μ-измеримых для всех $\mu \ge 0$) множеств в X обозначим через $\mathcal{U}$; $\mathcal{U}$ содержит все открытые (и все замкнутые) подмножества X.

Функцию u, определенную μ-почти всюду в X, со значениями в $[-\infty, +\infty]$ называют μ-измеримой, если прообраз любого замкнутого интервала из $[-\infty, +\infty]$ μ-измерим. Если две функции μ-измеримы, то их линейная комбинация и (или) произведение μ-измеримы, если только определены (во всяком случае, μ-почти всюду). Если функция u и множество $E \subset X$ μ-измеримы, то любая функция, совпадающая с u на E и постоянная на $X \setminus E$, также μ-измерима [4] (гл. IV, § 5).

Функция u μ-интегрируема тогда и только тогда, когда она μ-измерима и $\mu^*(|u|) < +\infty$. (Отсюда следует, что множество $E \subset X$ μ-интегрируемо тогда и только тогда, когда оно μ-измеримо и $\mu^*(E) < +\infty$.)

Множество $E \subset X$ называется *локально μ-пренебрежимым,* если $\mu^*(E \cap \cap K) = 0$ для каждого компактного множества $K \subset X$. Тогда E μ-измеримо и $\mu_*(E) = 0$. Пренебрежимое множество E локально пренебрежимо; обратное (вообще говоря, не верное) утверждение справедливо, если E либо открыто, либо μ — σ-конечно [5, с. 273].

Сужение μ_E меры $\mu \geq 0$ на μ-измеримое множество E определяется равенством

$$\mu_E(f) := \mu(f \varphi_E), \quad f \in C_0(X).$$

(Заметим, что $f\varphi_E \in \mathcal{L}^1(\mu)$.) Тогда для любой функции h, обращающейся в нуль на дополнении $\mu - \sigma$-конечного множества (такая функция называется $\mu - \sigma$-конечной [5, с. 310]), со значениями в $[0, +\infty]$ выполняется [5, с. 313–319]

$$\mu_E^*(h) = \mu^*(h\varphi_E). \tag{1.2}$$

(Отсюда следует, в частности, что множество $X \setminus E$ локально μ_E-пренебрежимо.)

Лемма 1.1 [2, с. 148]. *Для* $g \in \Phi^+$, $\mu \geq 0$ *и* μ*-измеримого множества* $E \subset X$ *выполняется*

$$\mu_E^*(g) = \sup\{\mu_K^*(g): \ K \ \textit{компактно}, \ K \subset E\}.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $\mu \geq 0$, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, *где для всех* $n \in \mathbb{N}$ *множества* E_n μ*-измеримы и* $E_n \subset E_{n+1}$. *Тогда для любой* $\mu - \sigma$*-конечной функции* $h \geq 0$

$$\mu_E^*(h) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu_{E_n}^*(h). \tag{1.3}$$

Доказательство. Функции $h\varphi_{E_n}$, $n \in \mathbb{N}$, положительны и образуют возрастающую последовательность с верхней огибающей $h\varphi_E$. Из [5, с. 259] находим

$$\mu^*(h\varphi_E) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(h\varphi_{E_n}),$$

откуда после применения (1.2) получаем (1.3). Лемма 1.2 доказана.

Пусть множество $E \subset X$ фиксировано. Мера $\mu \geq 0$ называется *сосредоточенной* на E, если $X \setminus E$ локально μ-пренебрежимо, или, что равносильно, если E μ-измеримо и $\mu_E = \mu$. Класс всех таких μ обозначим через $\mathfrak{M}^+(E)$. Для $\mu \in \mathfrak{M}^+(E)$ выполняется $\mu(X) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$, $\mu_*(X \setminus E) = 0$; если E замкнуто либо мера μ *ограничена* (т. е. $\mu(X) < +\infty$), то $\mu^*(X \setminus E) = 0$. (Поэтому мера μ сосредоточена на замкнутом множестве E тогда и только тогда, когда $S(\mu) \subset E$.) Для $q \geq 0$ обозначим

$$\mathfrak{M}^+(E, q) := \{\mu \in \mathfrak{M}^+(E): \ \mu(X) = q\},$$

$$\mathfrak{M}^+(E, \leq q) := \{\mu \in \mathfrak{M}^+(E): \ \mu(X) \leq q\}.$$

Лемма 1.3. *Если E замкнуто, то множество мер $\mathfrak{M}^+(E, \le q)$ слабо компактно. Если E компактно, то слабо компактны множества $\mathfrak{M}^+(E, \le q)$, $\mathfrak{M}^+(E, q)$.*

Доказательство. Для каждого $g \in \Phi^+$ отображение $\mu \mapsto \int g d\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, полунепрерывно снизу в слабой топологии [4, с. 122]. Отсюда при $g = 1$ находим, что множество мер $\mathfrak{M}^+(X, \le q)$ слабо замкнуто. Если E замкнуто, то слабо замкнуто множество $\mathfrak{M}^+(E)$ [4, с. 86], а потому и пересечение $\mathfrak{M}^+(E) \bigcap \mathfrak{M}^+(X, \le q)$. Будучи слабо замкнутым и слабо ограниченным, множество $\mathfrak{M}^+(E, \le q)$ слабо компактно.

Пусть E компактно. Выберем функцию $f \in C_0$, равную 1 на E. Тогда для всех $\mu \in \mathfrak{M}^+(E)$ выполняется $\mu(X) = \mu(f)$, и потому отображение $\mu \mapsto \mu(X)$, $\mu \in \mathfrak{M}^+(E)$, слабо непрерывно. А поскольку E, как компактное подмножество отделимого пространства X, замкнуто, то $\mathfrak{M}^+(E)$, а потому и $\mathfrak{M}^+(E, q)$ слабо замкнуты, а $\mathfrak{M}^+(E, \le q)$ слабо компактно. Отсюда следует искомое утверждение.

1.3. Для каждого $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ существует единственная пара мер $\mu^+, \mu^- \in \mathfrak{M}^+(X)$, сосредоточенных на непересекающихся множествах и таких, что $\mu = \mu^+ - \mu^-$; μ^+ и μ^- называют соответственно *положительной* и *отрицательной* частью меры μ [5, с. 251, 325]. Обозначим $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$. Мера μ называется ограниченной (финитной), если ограничена (соответственно, финитна) мера $|\mu|$.

Пусть $\mu \in \mathfrak{M}$ и $u = g - g'$, где $g, g' \in \Phi$ ($g, g' \ge 0$, кроме случая финитной μ). Если определены (как конечные числа или $\pm\infty$) интегралы $\int u d\mu^+$, $\int u d\mu^-$ и их разность, то тогда u определена $|\mu|$-почти всюду в X и полагаем $\int u d\mu := \int u d\mu^+ - \int u d\mu^-$.

Лемма 1.4 [2, с. 148]. *Для любых $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(X)$, $g \in \Phi$ ($g \ge 0$, кроме случая финитных μ и ν) и $a, b \in \mathbb{R}$ равенство*

$$\int g d(a\mu + b\nu) = a \int g d\mu + b \int g d\nu$$

справедливо в том смысле, что интеграл слева определен тогда и только тогда, когда определены оба интеграла справа и их линейная комбинация, и в утвердительном случае значения выражений справа и слева совпадают.

Если μ и ν — меры на локально компактных пространствах X и Y соответственно, то их (*тензорное*) *произведение* $\mu \otimes \nu$ [5, с. 337] определяется как единственная мера на пространстве $X \times Y$ такая, что

$$\int (f \otimes \psi) d(\mu \otimes \nu) = \int f d\mu \int \psi d\nu$$

$$\text{для всех} \quad f \in C_0(X), \quad \psi \in C_0(Y).$$

Здесь $f \otimes \psi$ обозначает функцию $f(x)\psi(y)$ из $C_0(X \times Y)$.

Лемма 1.5 [4] (гл. III). *Отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ произведения $\mathfrak{M}(X) \times \mathfrak{M}(Y)$ в $\mathfrak{M}(X \times Y)$ билинейно, а его сужение на $\mathfrak{M}^+(X) \times \mathfrak{M}^+(Y)$ непрерывно.*

Лемма 1.6 [2, с. 148]. *Для произвольных* $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ *и* $\nu \in \mathfrak{M}(Y)$ *выполняется*

$$S(\mu \otimes \nu) = S(\mu) \times S(\nu),$$

$$(\mu \otimes \nu)^+ = (\mu^+ \otimes \nu^+) + (\mu^- \otimes \nu^-),$$

$$(\mu \otimes \nu)^- = (\mu^+ \otimes \nu^-) + (\mu^- \otimes \nu^+).$$

Лемма 1.7 (см. [2, с. 148; 5, с. 344]). *Если* $E \subset X$ *и* $F \subset Y$ *измеримы относительно* $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$ *и* $\nu \in \mathfrak{M}^+(Y)$ *соответственно, то множество* $E \times F$ *измеримо относительно* $\mu \otimes \nu$ *и сужение* $\mu \otimes \nu$ *на* $E \times F$ *равно* $\mu_E \otimes \nu_F$.

В частности, $\mu \otimes \nu$ принадлежит $\mathfrak{M}^+(E \times F)$, если $\mu \in \mathfrak{M}^+(E)$ и $\nu \in \mathfrak{M}^+(F)$.

2. Ядра, потенциалы, энергии. Пусть $\kappa = \kappa(x, y)$ — ядро в X (см. введение). Всюду в настоящем исследовании предполагаем, что имеет место один из следующих двух случаев:

Случай I. Ядро κ неотрицательно: $\kappa(x, y) \geq 0$ для всех $(x, y) \in X \times X$.

Случай II. Пространство X компактно.

Интегрируя (полунепрерывную снизу) функцию κ по $\mu \otimes \nu \in \mathfrak{M}(X \times X)$, будем писать $\int\int \kappa(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ вместо $\int \kappa\, d(\mu \otimes \nu)$.

2.1. Потенциал меры $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ в точке $x \in X$ определяется равенством

$$\kappa(x, \mu) := \int \kappa(x, y)\, d\mu(y) = \kappa(x, \mu^+) - \kappa(x, \mu^-)$$

при условии, что $\kappa(x, \mu^+)$ или $\kappa(x, \mu^-)$ конечно. В частности, потенциал положительной меры определен (как конечное число или $+\infty$) всюду в X и принадлежит классу $\Phi^+(X)$ в случае I либо классу $\Phi(X)$ в случае II.

Взаимная энергия мер $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(X)$ определяется равенством (см. леммы 1.4 и 1.6)

$$\kappa(\mu, \nu) := \int\int \kappa(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) =$$

$$= \kappa(\mu^+, \nu^+) + \kappa(\mu^-, \nu^-) - \kappa(\mu^+, \nu^-) - \kappa(\mu^-, \nu^+)$$

при условии, что $\kappa(\mu^+, \nu^+) + \kappa(\mu^-, \nu^-)$ или $\kappa(\mu^+, \nu^-) + \kappa(\mu^-, \nu^+)$ конечно (в частности, если $\mu, \nu \geq 0$). Из теоремы Фубини [5, с. 339] находим, что в этом случае потенциалы $\kappa(x, \nu)$ и $\kappa(\mu, y)$ определены соответственно $|\mu|$- и $|\nu|$-почти всюду и выполняется

$$\kappa(\mu, \nu) = \int \kappa(x, \nu)\, d\mu(x) = \int \kappa(\mu, y)\, d\nu(y).$$

(По поводу соответствующих определений см. п. 1.) При $\nu = \mu$ получаем *энергию* меры $\mu \in \mathfrak{M}(X)$:

$$\kappa(\mu, \mu) = \int\int \kappa(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int \kappa(x, \mu)\, d\mu(x).$$

Если ядро κ *симметрично* (т. е. $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всех $(x, y) \in X \times X$) и $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(X)$, то $\kappa(\mu, \nu) = \kappa(\nu, \mu)$, если только $\kappa(\mu, \nu)$ определено. Отметим также, что

$$\kappa(\mu, \nu) > -\infty \qquad \forall\, \mu, \nu \in \mathfrak{M}^+(X).$$

Лемма 2.1 [2, с. 151]. *Следующие функции полунепрерывны снизу:*

$$\text{a)}\ \ \kappa(\mu,\nu)\ \ \textit{на}\ \ \mathfrak{M}^+\times\mathfrak{M}^+; \qquad \text{b)}\ \ \kappa(x,\mu)\ \ \textit{на}\ \ X\times\mathfrak{M}^+;$$

$$\text{c)}\ \ \kappa(\mu,\mu)\ \ \textit{на}\ \ \mathfrak{M}^+.$$

2.2. Для произвольного фиксированного множества $E\subset X$ обозначим

$$w_\kappa(E) := \inf_{\mu\in\mathfrak{M}^+(E,1)} \kappa(\mu,\mu). \tag{2.1}$$

Пользуясь леммой 1.1, можно заключить [2, с. 153], что

$$w_\kappa(E) = \inf\{w_\kappa(K)\colon K \text{ компактно, } K\subset E\}. \tag{2.2}$$

Множества $N\subset X$ с $w_\kappa(N) = +\infty$ играют в теории κ-потенциала роль пренебрежимых множеств. Будем говорить, что утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x\in Q$ (Q — множество в X), справедливо *приблизительно всюду* (пр. в.) в Q, если $w_\kappa(N_0) = +\infty$, где N_0 обозначает множество всех $x\in Q$ таких, что $R(x)$ ложно.

Лемма 2.2 [2, с. 154]. *Пусть $N\subset X$. Следующие утверждения равносильны:*

i) $w_\kappa(N) = +\infty$;

ii) $w_\kappa(K) = +\infty$ *для каждого компактного множества* $K\subset N$;

iii) $\mu_*(N) = 0$ *для каждой меры* $\mu\in\mathfrak{M}^+(X)$ *с* $\kappa(\mu,\mu) < +\infty$;

iv) $\mu = 0$ — *единственная мера из* $\mathfrak{M}^+(N)$ *с конечной энергией.*

***Следствие* 2.1** [2, с. 154]. *Если N — объединение счетного семейства универсально измеримых множеств N_n с $w_\kappa(N_n) = +\infty$, то $w_\kappa(N) = +\infty$.*

2.3. Ядро κ называется *положительно определенным*, если оно симметрично и для всех $\mu\in\mathfrak{M}$ энергия $\kappa(\mu,\mu)$ неотрицательна (если только определена).

Пусть κ — положительно определенное ядро. Через $\mathcal{E}_\kappa = \mathcal{E}_\kappa(X)$ обозначим класс всех $\mu\in\mathfrak{M}$ с $\kappa(\mu,\mu) < +\infty$, а через $\mathcal{E}_\kappa^+ = \mathcal{E}_\kappa^+(X)$ — класс всех $\mu\ge 0$ из $\mathcal{E}_\kappa$. Для всех $\mu,\nu\in\mathcal{E}_\kappa^+$ взаимная энергия $\kappa(\mu,\nu)$ определена и конечна [2, с. 164]. Отсюда следует, что $\mathcal{E}_\kappa^+$ — выпуклый конус и выполняется равенство $\mathcal{E}_\kappa = \mathcal{E}_\kappa^+ - \mathcal{E}_\kappa^+$, а также что взаимная энергия $\kappa(\mu,\nu)$ определена и конечна для всех $\mu,\nu\in\mathcal{E}_\kappa$. А поскольку взаимная энергия билинейна, то тем самым доказано следующее основополагающее утверждение.

Лемма 2.3 [2, с. 164]. *$\mathcal{E}_\kappa$ — предгильбертово пространство над полем вещественных чисел со скалярным произведением $\kappa(\mu,\nu)$ и полунормой $\|\mu\|_\kappa = \sqrt{\kappa(\mu,\mu)}$.*

Топология в $\mathcal{E}_\kappa$, определяемая полунормой $\|\mu\|_\kappa$, называется *сильной* топологией. Из леммы 2.3 вытекает неравенство Коши–Буняковского

$$|\kappa(\mu,\nu)| \le \|\mu\|_\kappa\|\nu\|_\kappa \quad \text{для всех} \quad \mu,\nu\in\mathcal{E}_\kappa.$$

Если $\mu\in\mathcal{E}_\kappa$, то $\kappa(x,\mu^+)$ и $\kappa(x,\mu^-)$ ν-интегрируемы для всех $\nu\in\mathcal{E}_\kappa^+$, и потому вследствие леммы 2.2 потенциал $\kappa(x,\mu)$ определен и конечен приблизительно всюду в X.

Меры $\mu,\nu\in\mathcal{E}_\kappa$ называются *эквивалентными* в $\mathcal{E}_\kappa$, если $\|\mu-\nu\|_\kappa = 0$.

Лемма 2.4 [2, с. 164]. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы меры* $\mu, \nu \in \mathcal{E}_\kappa$ *были эквивалентными в* $\mathcal{E}_\kappa$:

a) $\kappa(x, \mu) = \kappa(x, \nu)$ *приблизительно всюду в* X;

a′) $\kappa(\sigma, \mu) = \kappa(\sigma, \nu)$ *для всех* $\sigma \in \mathcal{E}_\kappa$.

Положительно определенное ядро κ называется *строго положительно определенным*, если из $\|\mu\|_\kappa = 0$, $\mu \in \mathcal{E}_\kappa$, следует $\mu = 0$. (В этом и только в этом случае полунорма $\|\mu\|_\kappa$ — норма в $\mathcal{E}_\kappa$, а пространство $\mathcal{E}_\kappa$ хаусдорфово.)

Пример. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 3$ ядро Ньютона $|x-y|^{2-n}$, ядра Грина $g_G(x, y)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, g_G — его обобщенная функция Грина) и ядра Рисса $|x-y|^{\beta-n}$, $0 < \beta < n$, строго положительно определены [7].

2.4. Пусть κ — произвольное ядро, $E \subset X$ — фиксированное множество с $w_\kappa(E) < +\infty$. Меру $\lambda = \lambda_E$ из $\mathfrak{M}^+(E, 1)$ с минимальной энергией $\kappa(\lambda, \lambda) = w_\kappa(E)$ назовем *минимальной* мерой на E. Существование минимальной меры λ, изучение свойств ее потенциала $\kappa(x, \lambda)$ — основополагающая задача теории емкостей множеств.

Если множество $E = K$ компактно, то, пользуясь слабой полунепрерывностью снизу отображения $\mu \mapsto \kappa(\mu, \mu)$, $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$ (лемма 2.1), и слабой компактностью класса $\mathfrak{M}^+(K, 1)$ (лемма 1.3), легко видеть [2], что в этом случае мера $\lambda = \lambda_K$ существует.

Теорема 2.1 [2, с. 159]. *Если множество* K *компактное, а ядро* κ *симметричное, то потенциал* $\kappa(x, \lambda)$ *минимальной меры* λ *имеет следующие свойства*:

a) $\kappa(x, \lambda) \geq w_\kappa(K)$ *приблизительно всюду в* K;

b) $\kappa(x, \lambda) = w_\kappa(K)$ *приблизительно всюду в* $S(\lambda)$;

c) $\kappa(x, \lambda) \leq w_\kappa(K)$ *для всех* $x \in S(\lambda)$.

Однако если E — некомпактное множество, то класс $\mathfrak{M}^+(E, 1)$ не компактен в слабой топологии и такие рассуждения не эффективны даже в классическом случае ядра Ньютона. Основное свойство ядра Ньютона, открытое Картаном и позволившее ему преодолеть эту трудность и построить теорию ньютоновых емкостей множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — свойство сильной полноты соответствующего пространства $\mathcal{E}^+_\kappa$ [10] (см. также [7, 8]). Постулируя для положительно определенного ядра κ в локально компактном пространстве X основные утверждения теории Картана, Фугледе в [2] ввел класс *совершенных* ядер — ядер, для которых пространство $\mathcal{E}^+_\kappa$ сильно полно и из сильной сходимости мер в $\mathcal{E}^+_\kappa$ следует их слабая сходимость к тому же пределу, и для них построил теорию емкостей произвольных (не обязательно компактных) множеств.

3. Постановка задачи. *3.1.* Пусть m и p, $1 \leq m \leq p$, — натуральные числа, A_i, $i = 1, \ldots, p$, — непустые множества в X. Обозначим $I := \{1, \ldots, p\}$, $I^+ := \{1, \ldots, m\}$, $I^- := I \setminus I^+$ и предположим, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \in I^+$, $j \in I^-$. Упорядоченную совокупность $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_p)$ назовем (m, p)-*конденсатором* (или просто конденсатором). Никакие ограничения на топологию взаимного расположения множеств A_i, $i \in I^+$, а также A_i, $i \in I^-$, не накладываются. Заметим, что идея рассмотрения в экстремальных задачах теории потенциала конденсаторов с пересекающимися однознаковыми пластинами была высказана автору П. М. Тамразовым. Объединение множеств A_i по всем i из I, I^+ и I^- обозначим соответственно через A, A^+ и A^-.

Конденсатор $\mathcal{A}$ назовем *компактным* (аналогично, *замкнутым*, *универсально измеримым*), если все A_i, $i \in I$, компактны (соответственно, замкнуты, универсально измеримы). Конденсатор, не являющийся компактным, назовем *некомпактным*.

Пусть $\alpha = \alpha(m, p)$ — p-мерный вектор с координатами $\alpha_i = \alpha_i(m, p)$, $i \in \in I$, где

$$\alpha_i := \begin{cases} 1 & \text{для всех } \ i \in I^+; \\ -1 & \text{для всех } \ i \in I^-. \end{cases}$$

Через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ обозначим класс всех линейных комбинаций

$$\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i,$$

где $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$ для всех $i \in I$. Тогда положительная μ^+ и отрицательная μ^- части меры $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ сосредоточены соответственно на A^+ и A^- и имеют вид

$$\mu^+ = \sum_{i \in I^+} \mu^i, \quad \mu^- = \sum_{i \in I^-} \mu^i.$$

Пусть $\mu_1 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_1^i$ и $\mu_2 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_2^i$ принадлежат $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Меры μ_1, μ_2 будем называть *эквивалентными* в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, если $\mu_1 = \mu_2$ (т. е. $\mu_1(f) = \mu_2(f)$ $\forall f \in C_0$). Меры μ_1, μ_2 будем отождествлять как элементы $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и писать $\mu_1 \equiv \mu_2$, если выполняется $\mu_1^i = \mu_2^i$ $\forall i \in I$. Очевидно, $\mu_1 \equiv \mu_2 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$ $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Для справедливости обратного утверждения $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 \equiv \mu_2$ $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ необходимо условие $A_i \cap \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$; если $\mathcal{A}$ универсально измерим, то это же условие и достаточно.

3.2. Настоящая работа посвящена решению экстремальных задач теории κ-потенциала на классах мер из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Без дополнительного упоминания всюду далее предполагаем, что имеет место случай I или случай II (см. п. 2). Относительно случая некомпактного (локально компактного) пространства X и знакопеременного ядра κ отметим только, что при условии относительной компактности множества A исследование очевидным образом сводится к случаю II.

В большинстве утверждений случай II может быть сведен к случаю I заменой ядра κ ядром $\kappa^*(x, y) = \kappa(x, y) + c \geq 0$, где $c \geq 0$ — надлежащая постоянная. (Существование такого c следует из ограниченности снизу ядра κ на пространстве $X \times X$.)

Из лемм 1.4 и 1.5 выводим следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Равенства*

$$\kappa(x, \mu) = \sum_{i \in I} \alpha_i \kappa(x, \mu^i), \quad \mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \tag{3.1}$$

$$\kappa(\mu,\nu) = \sum_{i,j\in I} \alpha_i\alpha_j\kappa(\mu^i,\nu^j), \qquad \mu,\ \nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \tag{3.2}$$

справедливы в том смысле, что если определена одна из частей (правая или левая) в (3.1) (*соответственно, в* (3.2)), *то определена и другая и они равны между собой.*

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_p)$ — p-мерный вектор с $a_i \geq 0$ для всех $i \in I$. Обозначим

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}):\ \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i, a_i) \text{ для всех } i \in I\},$$

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) := \inf_{\mu\in\mathfrak{M}(\mathcal{A},a)} \kappa(\mu,\mu). \tag{3.3}$$

(В (3.3) рассматриваются только такие меры μ, энергия $\kappa(\mu,\mu)$ которых определена. Инфимум по пустому множеству полагаем равным $+\infty$.)

Задачу о существовании меры $\lambda = \lambda(\mathcal{A}, a, \kappa) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ с минимальной энергией $\kappa(\lambda,\lambda) = w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ назовем $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-*задачей*, а меру λ с указанными свойствами — *минимальной* в этой задаче. Экстремальную $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачу назовем *разрешимой*, если класс $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ всех минимальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер λ не пуст.

Можно считать, что $a_i > 0$ для всех $i \in I$, и это всегда предполагается, если не указано обратное. (Задача с $a_i \geq 0$ сводится к указанной задаче заменой обозначений.)

В случае $I^+ = \{1\}$, $I^- = \varnothing$ $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача совпадает с задачей (2.1), лежащей в основе теории емкостей множеств в локально компактном пространстве и исследованной Б. Фугледе [2]. В случае $I^+ \neq \{1\}$, $I^- = \varnothing$, при дополнительном условии попарной дизъюнктности множеств A_i, $i \in I^+$, $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача была исследована М. Оцукой [3].

Касаясь истории вопроса, отметим также, что в случае плоскости $X = \mathbb{R}^2$, замкнутого $(1, 2)$-конденсатора $\mathcal{A}$ и логарифмического ядра $-\log|x-y|$, при дополнительных условиях компактности A_1 и симметричности нормировки $(a_1 = a_2)$, задача о существовании меры с минимальной энергией была утвердительно решена Т. Бэгби [11] (в предположении связности $\mathbb{R}^2 \setminus A$) и П. М. Тамразовым [12] (в общем случае). В кандидатской диссертации автора, написанной в 1980 г. под руководством П. М. Тамразова, аналогичные результаты были получены для компактного конденсатора в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и ньютонова ядра. Однако в случае некомпактного конденсатора в методе доказательства в [11, 12] существенно используется инвариантность исследуемой там экстремальной характеристики относительно дробно-линейных преобразований плоскости (что позволяет свести задачу к компактному случаю), и потому его нельзя адаптировать к другим пространствам и (или) ядрам, нормировкам, значениям m и p.

Решение $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи в общем случае произвольных локально компактного пространства X и ядра κ, произвольных нормировок и множеств индексов I^+ и I^-, без требования попарной дизъюнктности множеств A_i, где $i \in I^+$ или $i \in I^-$, составляет основную цель данной работы.

В настоящей части работы получены описания потенциалов $\kappa(x, \lambda)$ минимальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер λ (теоремы 5.1 – 5.3 и следствие 5.1); выделены их характеристические свойства (предложения 5.1 и 5.2); изучена задача единственности (предложение 5.3, следствие 5.2); исследованы свойства функции $w_\kappa(\cdot, a)$ (леммы 4.1 – 4.5). В качестве вспомогательных результатов получены утверждения о непрерывности потенциалов и, более общо, отображения $(x, \mu) \mapsto \kappa(x, \mu)$, $(x, \mu) \in X \times \mathfrak{M}^+(X)$ (теорема 4.1, лемма 4.6).

Существование минимальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер λ — предмет исследования следующих двух частей работы. Основное внимание будет уделено случаю некомпактного конденсатора $\mathcal{A}$ — тогда класс $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ не замкнут в слабой топологии и, вообще говоря, не содержит слабые пределы минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче направленностей мер. Эта трудность преодолена для положительно определенных ядер на пути эффективного использования, наряду со слабой топологией, предгильбертовой структуры в пространстве $\mathcal{E}_\kappa$.

Ранее в работах автора [13 – 17] было доказано, что в случае ядер Ньютона, Рисса, Грина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, для метрических (в индуцированной из $\mathcal{E}_\kappa$ метрике) пространств знакопеременных мер, ассоциированных с замкнутыми $(1, 2)$-конденсаторами и имеющих ограниченную вариацию, справедливы аналоги утверждений Картана [10] (установленных им для $\mathcal{E}^+_\kappa$) о сильной полноте и о соотношении между сильной и слабой топологиями. (Здесь следует отметить, что такие утверждения для всего пространства $\mathcal{E}_\kappa$ не верны.) Эти утверждения стали основой разработанного в [13 – 17] метода, позволившего решить соответствующую минимум-проблему в некомпактном случае и построить (существенно некомпактную) теорию ньютоновых, риссовых, гриновых емкостей конденсаторов.

Постулируя для произвольного положительно определенного ядра κ в локально компактном пространстве X основные положения из [13 – 17], в настоящем исследовании определяются понятия $\mathcal{A}$*-совершенных* или, более общо, $\mathcal{A}$*-согласованных* ядер, обобщающие и развивающие соответствующие понятия теории емкостей множеств [2]. Для этих ядер вводятся и изучаются *экстремальные* в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче меры γ — меры, являющиеся одновременно сильными и слабыми пределами минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче направленностей. Энергия экстремальной меры γ равна $w_\kappa(\mathcal{A}, a)$, поведение ее потенциала сходно с поведением потенциалов минимальных мер в случае их существования, однако, вообще говоря, γ не принадлежит $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и потому не является минимальной.

Получены достаточные и (или) необходимые условия на ядро κ, (m, p)-конденсатор $\mathcal{A}$ и вектор a, при которых $\gamma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и, следовательно, $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима. В частности, доказано, что если $\mathcal{A}$ замкнут, $w_\kappa(A) > 0$, а множества A^+ и A^- κ*-разделены* (см. п. 4), то $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима для всех a. Если выполняется $w_\kappa(A) = 0$, то для достаточно широкого класса ядер существует континуальное множество векторов a, для которых $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача не разрешима; при надлежащих условиях на $\mathcal{A}$ и κ получено его полное описание.

Отметим, что указанная существенная некомпактность $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи составляет ее основную трудность и ее принципиальное отличие от экстремальной задачи, лежащей в основе теории емкостей множеств.

Ближайшие идейные истоки методов, развитых в настоящей работе, лежат в [2, 3, 13 – 17]. Теория κ-емкостей множеств в локально компактном пространстве [2], с одной стороны, и теории ньютоновых, риссовых, гриновых емкостей $(1, 2)$-конденсаторов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ [13 – 17], с другой, служат в настоящем исследовании модельными случаями, а затем и конкретными реализациями построенной здесь теории.

Автор благодарит А. В. Бондаря, Ю. Г. Решетняка и В. П. Хавина за привлечение внимания к исследуемой задаче, а А. В. Бондаря — и за плодотворные обсуждения получаемых результатов.

4. Предварительные результаты. *4.1.* На множестве всех (m, p)-конденсаторов в X введем структуру частичного упорядочения отношением $\prec$, где, по определению, для его элементов $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_p)$ и $\mathcal{A}' = (A_1', \ldots, A_p')$ выполняется $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}$, если $A_i' \subset A_i$ для всех $i \in I$.

Очевидно, $w_\kappa(\cdot, a)$ — невозрастающая функция конденсатора, т. е.

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \le w_\kappa(\mathcal{A}', a), \quad \text{если} \quad \mathcal{A}' \prec \mathcal{A}. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) = \inf w_\kappa(\mathcal{K}, a),$$

где $\mathcal{K}$ пробегает множество $\{\mathcal{K}\}$ всех компактных (m, p)-конденсаторов $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$.

Доказательство. Рассмотрим случай I (случай II сводится к случаю I указанным в п. 3 способом). Предположим, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$ (в противном случае утверждение леммы очевидно в силу (4.1)). Пусть $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ — произвольная фиксированная мера, энергия $\kappa(\mu, \mu)$ которой определена (как конечное число или $\pm\infty$). Для каждого компактного конденсатора $\mathcal{K} = (K_1, \ldots, K_p)$, $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$, и каждого $i \in I$ через $\mu^i_{\mathcal{K}}$ обозначим сужение меры μ^i на K_i. В силу лемм 1.1 и 1.7 выполняется

$$a_i = \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} \mu^i_{\mathcal{K}}(X), \qquad i \in I, \tag{4.2}$$

$$\kappa(\mu^i, \mu^j) = \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} \kappa(\mu^i_{\mathcal{K}}, \mu^j_{\mathcal{K}}), \qquad i, j \in I, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{K}$ пробегает направленное по отношению $\prec$ множество всех компактных конденсаторов $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$. Замечая, что для всех достаточно больших $\mathcal{K}$ $\mu^i_{\mathcal{K}}(X) \neq 0$ для всех $i \in I$ и

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i a_i}{\mu^i_{\mathcal{K}}(X)} \mu^i_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{M}(\mathcal{K}, a),$$

из леммы 3.1 и соотношений (4.2) и (4.3) находим

$$\kappa(\mu, \mu) = \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} \sum_{i, j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu^i_{\mathcal{K}}, \mu^j_{\mathcal{K}}) =$$

$$= \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} \sum_{i, j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa\left(\frac{a_i}{\mu^i_{\mathcal{K}}(X)} \mu^i_{\mathcal{K}}, \frac{a_j}{\mu^j_{\mathcal{K}}(X)} \mu^j_{\mathcal{K}}\right) \ge \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} w_\kappa(\mathcal{K}, a),$$

откуда с учетом произвольности $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ имеем

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \ge \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} w_\kappa(\mathcal{K}, a).$$

Обратное к полученному неравенство вытекает из (4.1). Лемма 4.1 доказана.

Будем говорить, что мера $\nu \ge 0$ финитна в E (E — множество в X), если она финитна в X и $S(\nu) \subset E$. Множество всех таких ν обозначим через $\mathfrak{M}_0^+(E)$.

Следствие **4.1.** *Справедливо равенство* $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = \inf \kappa(\mu, \mu)$, *где* μ *пробегает множество мер* $\{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)\colon\ \mu^i \in \mathfrak{M}_0^+(A_i)$ *для всех* $i \in I\}$.

Будем писать $\mathcal{A}_s \uparrow \mathcal{A}$ (аналогично, $\mathcal{A}_s \downarrow \mathcal{A}$), если $(\mathcal{A}_s)_{s\in S}$ — возрастающая (соответственно, убывающая) направленность (m, p)-конденсаторов $\mathcal{A}_s = (A_1^s, \ldots, A_p^s)$ и для всех $i \in I$ выполняется $A_i = \bigcup_{s \in S} A_i^s$ $\left(\text{соответственно, } A_i = \bigcap_{s\in S} A_i^s\right)$.

Лемма 4.2. *Пусть* $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность универсально измеримых конденсаторов и* $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}$. *Тогда* $w_\kappa(\mathcal{A}_n, a) \downarrow w_\kappa(\mathcal{A}, a)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство леммы 4.2 основано на леммах 1.2, 1.7, 3.1 и проводится аналогично доказательству леммы 4.1.

Замечания. **1.** Справедливость леммы 4.2 не нарушится, если в ее формулировке для каждого $i \in I$ условие универсальной измеримости множеств A_i^n, $n \in \mathbb{N}$, заменить на условие их ν-измеримости для всех $\nu \in \mathfrak{M}^+(A_i)$.

2. Если $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность универсально измеримых конденсаторов и $\mathcal{A}_n \downarrow \mathcal{A}$, то соответствующее предельное равенство для $w_\kappa(\cdot, a)$, вообще говоря, не верно. Случай, когда это не так, будет исследован в следующей части работы.

4.2. В настоящем подпункте получены условия на конденсатор $\mathcal{A}$ и ядро κ, необходимые и (или) достаточные для соотношения $-\infty < w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$.

Для любой упорядоченной пары множеств E_1, $E_2 \subset X$ обозначим

$$\kappa(E_1, E_2) := \sup_{x\in E_1,\ y\in E_2} \kappa(x, y)$$

(супремум по пустому множеству полагаем равным $-\infty$) и введем следующие определения.

Определение 4.1. *Множества* E_1 *и* E_2 *назовем* κ*-разделенными, если каждая из величин* $\kappa(E_1, E_2)$ *и* $\kappa(E_2, E_1)$ *отлична от* $+\infty$.

Определение 4.2. *Множества* E_1 *и* E_2 *назовем* e_κ*-разделенными, если для любых ограниченных, с конечными энергиями мер* $\nu_i \in \mathfrak{M}^+(E_i)$, $i = 1, 2$, *таких, что для некоторого* i *мера* ν_i *финитна в* E_i, *выполняется* $\kappa(\nu_i, \nu_j) < +\infty$, $i \neq j$.

Если множества E_1 и E_2 κ-разделены, то они e_κ-разделены; обратное не верно. Если ядро κ положительно определено, то любые два множества e_κ-разделены.

Лемма 4.3. *Справедливы импликации* i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii), *где*:

i) $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = +\infty$;

ii) $w_\kappa(\mathcal{K}, a) = +\infty$ *для каждого компактного конденсатора* $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$;

iii) *существует* $i_0 \in I$ *с* $w_\kappa(A_{i_0}) = +\infty$.

Утверждения i), ii), iii) *равносильны, если для всех* $i \neq j$ *с* $\alpha_i\alpha_j = 1$ *множества* A_i *и* A_j e_κ*-разделены.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений i) и ii) вытекает из леммы

4.1. Докажем импликацию iii) $\Rightarrow$ i). Предположим, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$, и выберем $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ с $\kappa(\mu, \mu) < +\infty$. Применяя лемму 3.1, находим $\kappa(\mu^i, \mu^i) < +\infty \quad \forall\, i \in I$. Мера μ^i ненулевая и сосредоточена на A_i, поэтому $w_\kappa(A_i) < +\infty \;\; \forall\, i \in I$, что противоречит утверждению iii).

Докажем импликацию i) $\Rightarrow$ iii) в предположениях второй части леммы. Предположим, что $w_\kappa(A_i) < +\infty \;\; \forall\, i \in I$; тогда для каждого i существует мера $\mu_i \in \mathfrak{M}^+(A_i, a_i)$ с конечной энергией, финитная в A_i. Взаимные энергии $\kappa(\mu_i, \mu_j)$, где $i \neq j$ и $\alpha_i \alpha_j = 1$, конечны в силу условия e_κ-разделенности соответствующих A_i и A_j. Обозначив $\mu := \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_i$, имеем $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и $\kappa(\mu, \mu) < +\infty$, что противоречит утверждению i).

Лемма 4.3 доказана.

Легко видеть, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a) > -\infty$ в случае, если либо A^+ и A^- κ-разделены, либо ядро κ положительно определено. Во втором случае верно $w_\kappa(\mathcal{A}, a) \geq 0$; в этой связи отметим следующее легко доказываемое утверждение.

Лемма 4.4. *Пусть ядро* κ *положительно определено. Если* $w_\kappa(A_i) = 0$ $\forall\, i \in I$, *то* $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = 0$ *для любого* a.

В следующей части работы будет показано, что при определенных условиях на $\mathcal{A}$ и κ это утверждение может быть обращено.

4.3. Можно показать (ср. с [2, с. 158]), что если $N \in \mathcal{U}$ и $w_\kappa(N) = +\infty$, то $w_\kappa(E \cup N) = w_\kappa(E)$ для любого множества $E \subset X$. Докажем следующее утверждение, выражающее аналогичное свойство для конденсаторов.

Лемма 4.5. *Пусть* $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_p)$ *и* $\mathcal{A}' = (A_1', \ldots, A_p')$ — (m, p)*-конденсаторы такие, что для всех* $i \in I$ *выполняется*

$$A_i \setminus A_i' \in \mathcal{U}, \quad A_i' \setminus A_i \in \mathcal{U}, \tag{4.4}$$

$$w_\kappa(A_i \,\Delta\, A_i') = +\infty. \tag{4.5}$$

Тогда $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = w_\kappa(\mathcal{A}', a)$, *и в случае* $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$ $\quad \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{W}(\mathcal{A}', a, \kappa)$.

Доказательство. Обозначим $B_i := A_i \cap A_i'$, $i \in I$. Если для некоторого $j \in I$ множество B_j пусто, то из (4.5) находим $w_\kappa(A_j) = w_\kappa(A_j') = +\infty$ и потому, в силу леммы 4.3, $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = w_\kappa(\mathcal{A}', a) = +\infty$. Поэтому пусть $B_i \neq \varnothing$ $\forall\, i$. Тогда множества B_i, $i \in I$, образуют (m, p)-конденсатор $\mathcal{B} := (B_1, \ldots, B_p)$. Покажем, что классы мер $\{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \colon \; \kappa(\mu, \mu) < +\infty\}$ и $\{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, a) \colon \; \kappa(\mu, \mu) < +\infty\}$ совпадают.

Можно предположить, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$, так как в противном случае оба класса пусты. Зафиксируем произвольную меру $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ с $\kappa(\mu, \mu) < +\infty$. Тогда в силу леммы 3.1 $\kappa(\mu^i, \mu^i) < +\infty \;\; \forall\, i$. Отсюда и из следующего из (4.5) соотношения $w_\kappa(A_i \setminus B_i) = +\infty$ на основании утверждения iii) леммы 2.2 получаем $(\mu^i)_*(A_i \setminus B_i) = 0$. А так как мера μ^i ограничена и, согласно (4.4), множество $A_i \setminus B_i$ универсально измеримо, то оно μ^i-интегрируемо, и потому $(\mu^i)^*(A_i \setminus B_i) = 0$. Учитывая равенство $(\mu^i)^*(X \setminus A_i) = 0$, находим, что для каждого $i \in I$ множество $X \setminus B_i$ μ^i-пренебрежимо. Следовательно, $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, a)$.

Меняя в проведенных рассуждениях $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}'$, получаем лемму 4.5.

4.4. Пусть κ', $\kappa'(x,y) := \kappa(y,x)$, $(x,y) \in X \times X$, — транспонированное к κ ядро.

Настоящий подпункт посвящен изучению свойств непрерывности потенциалов $\kappa(x,\mu)$ и, более общо, отображения $(x,\mu) \mapsto \kappa(x,\mu)$, $(x,\mu) \in X \times \mathfrak{M}^+(X)$.

Зафиксируем (m,p)-конденсатор $\mathcal{A}$ и рассмотрим следующее условие на ядро κ:

$\mathcal{A}_\infty$) *Для любых $\varepsilon > 0$ и компактного множества $K \subset X$ существует компактное множество $K' \subset X$ такое, что $|\kappa(x,y)| < \varepsilon$ для всех $(x,y) \in X \times X$, принадлежащих $(A^+ \cap K) \times (A^- \setminus K')$ либо $(A^- \cap K) \times (A^+ \setminus K')$.*

Теорема 4.1. *Пусть $q \in (0,+\infty)$; ядро κ удовлетворяет условию $\mathcal{A}_\infty$), причем κ и транспонированное ядро κ' непрерывны на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$; $(\nu_s)_{s \in S}$ — слабо сходящаяся к ν_0 направленность положительных мер; сосредоточенных на $\overline{A^-}$ (аналогично, на $\overline{A^+}$) таких, что $\nu_s(X) \le q$ для всех $s \in S$; $(x_s)_{s \in S}$ — сходящаяся к x_0 направленность точек из $\overline{A^+}$ (соответственно, из $\overline{A^-}$). Тогда справедливо равенство*

$$\kappa(x_0,\nu_0) = \lim_{s \in S} \kappa(x_s,\nu_s). \tag{4.6}$$

Другими словами, если ядро κ удовлетворяет условиям теоремы 4.1, то для любого $q \in (0,+\infty)$ сужение отображения $(x,\mu) \mapsto \kappa(x,\mu)$ на $\overline{A^+} \times \mathfrak{M}^+(\overline{A^-}, \le q)$ (аналогично, на $\overline{A^-} \times \mathfrak{M}^+(\overline{A^+}, \le q)$) непрерывно (ср. с утверждением b) леммы 2.1).

Доказательство. Пусть, для определенности, $(x_s)_{s \in S} \subset \overline{A^+}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем компактную окрестность W_{x_0} точки x_0 в $\overline{A^+}$ и компактное множество $F \subset \overline{A^-}$ так, чтобы выполнялось

$$|\kappa(x,y)| < \frac{\varepsilon}{6q} \quad \text{для всех} \quad x \in W_{x_0}, \quad y \in \overline{A^-} \setminus F. \tag{4.7}$$

Пусть V — компактная окрестность множества F в пространстве $\overline{A^-}$, g — функция, определенная равенством

$$g := \begin{cases} \kappa & \text{на} \quad W_{x_0} \times \partial_{\overline{A^-}} F; \\ 0 & \text{на} \quad W_{x_0} \times \partial_{\overline{A^-}} V. \end{cases}$$

Применяя к (компактному и отделимому, а потому нормальному [5, с. 25, 36]) пространству $W_{x_0} \times V$, его компактному подмножеству $K := (W_{x_0} \times \partial_{\overline{A^-}} F) \cup (W_{x_0} \times \partial_{\overline{A^-}} V)$ и заданной на K непрерывной функции g теорему Урысона–Титце о непрерывном продолжении функций [5, с. 30] и пользуясь при этом (4.7), убеждаемся в существовании непрерывной функции $\varphi: W_{x_0} \times V \to \left[-\frac{\varepsilon}{6q}, \frac{\varepsilon}{6q}\right]$, совпадающей с g в ее области определения. Определим функцию f равенством

$$f := \begin{cases} \kappa & \text{на} \quad W_{x_0} \times F; \\ \varphi & \text{на} \quad W_{x_0} \times (V \setminus F); \\ 0 & \text{на} \quad W_{x_0} \times (\overline{A^-} \setminus V). \end{cases} \tag{4.8}$$

Справедливы соотношения

$$f \in C_0(W_{x_0} \times \overline{A^-}), \tag{4.9}$$

$$|f(x, y)| \le \frac{\varepsilon}{6q} \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in W_{x_0} \times (\overline{A^-} \setminus F). \tag{4.10}$$

Из (4.9) следует существование окрестности $U_{x_0} \subset W_{x_0}$ точки x_0 такой, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{6q} \quad \text{для всех} \quad x \in U_{x_0}, \quad y \in \overline{A^-}, \tag{4.11}$$

а из сходимости $(\nu_s)_{s \in S}$ к ν_0 (в слабой топологии) и $(x_s)_{s \in S}$ к x_0 — существование $s_0 \in S$ такого, что для всех $s \in S$, следующих за s_0, выполняется

$$x_s \in U_{x_0}, \tag{4.12}$$

$$\left| \int f(x_0, y)\, d(\nu_s - \nu_0)(y) \right| < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4.13}$$

Каждую меру ν из класса $\mathfrak{M}^+(\overline{A^-}, \le q)$ представим в виде суммы

$$\nu = \nu' + \nu'', \tag{4.14}$$

где ν' — сужение ν на F. Последовательное применение соотношений (4.7), (4.8), (4.10) и (4.11) показывает, что для всех $x \in U_{x_0}$ выполняется

$$|\kappa(x, \nu'')| \le \frac{\varepsilon}{6}, \tag{4.15}$$

$$\kappa(x, \nu') = \int f(x, y)\, d(\nu - \nu'')(y), \tag{4.16}$$

$$\left| \int f(x, y)\, d\nu''(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{6}, \tag{4.17}$$

$$\left| \int [f(x, y) - f(x_0, y)]\, d\nu(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4.18}$$

Зафиксируем произвольное $s \in S$, следующее за s_0, и представим меры ν_s и ν_0 в виде (4.14). Последовательно используя (4.12), (4.15)–(4.18) и (4.13), получаем

$$|\kappa(x_s, \nu_s) - \kappa(x_0, \nu_0)| \le |\kappa(x_s, \nu_s') - \kappa(x_0, \nu_0')| + \frac{2\varepsilon}{6} \le$$

$$\le \left| \int f(x_s, y)\, d\nu_s(y) - \int f(x_0, y)\, d\nu_0(y) \right| + \frac{4\varepsilon}{6} \le$$

$$\le \left| \int [f(x_s, y) - f(x_0, y)]\, d\nu_s(y) \right| + \left| \int f(x_0, y)\, d(\nu_s - \nu_0)(y) \right| + \frac{4\varepsilon}{6} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

что в силу произвольности $s \ge s_0$ и ε доказывает соотношение (4.6).

Теорема 4.1 доказана.

В полном объеме теорема 4.1 будет использована во второй части работы, а в данной части используется следующее ее следствие.

***Следствие* 4.2.** *Пусть ядро* κ *удовлетворяет условию* $\mathcal{A}_\infty$), *причем* κ *и транспонированное ядро* κ' *непрерывны на* $\overline{A^+}\times\overline{A^-}$. *Тогда для любых ограниченных мер* $\mu^+ \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^+})$ *и* $\mu^- \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^-})$ *потенциалы* $\kappa(x, \mu^+)$ *и* $\kappa(x, \mu^-)$ *непрерывны соответственно на* $\overline{A^-}$ *и на* $\overline{A^+}$, *а потенциал* $\kappa(x, \mu)$, $\mu := \mu^+ - \mu^-$, *определен всюду в* $\overline{A}$ *и полунепрерывен снизу на* $\overline{A^+}$ *и сверху на* $\overline{A^-}$.

Следствие 4.2 вытекает из теоремы 4.1 и свойства полунепрерывности снизу в X потенциала положительной меры.

Замечание. Если $\mathcal{A}$ — конденсатор в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с $\overline{A^+}\cap\overline{A^-} = \varnothing$, то условиям теоремы 4.1 и следствия 4.2 относительно ядра κ удовлетворяют ядро Ньютона, ядра Рисса $|x-y|^{\beta-n}$, $0<\beta<n$, и ядро g_G, где g_G — функция Грина открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, регулярного в смысле разрешимости классической задачи Дирихле.

Лемма 4.6. *Пусть* κ *и* κ' *непрерывны на* $\overline{A^+}\times\overline{A^-}$, *а множества* A^+ *и* A^- κ*-разделены. Тогда справедливо заключение следствия* 4.2.

Доказательство. Пусть мера $\mu^- \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^-})$ ограничена. В условиях леммы 4.6 функция $\kappa^* := -\kappa + \kappa(A^+, A^-)$ неотрицательна и непрерывна на $\overline{A^+}\times\overline{A^-}$, и потому для любого компактного множества $K \subset \overline{A^-}$ функция $f_K(x) := \int \kappa^*(x, y)\,d\mu_K^-(y)$ непрерывна на $\overline{A^+}$. Следовательно, функция $\int \kappa^*(x, y)\,d\mu^-(y)$, $x \in \overline{A^+}$, как верхняя огибающая семейства $\{f_K(x),\ K\subset \subset \overline{A^-}\}$ (см. лемму 1.1), полунепрерывна снизу. Ввиду конечности $\kappa(A^+, A^-)$ и $\mu^-(X)$ отсюда следует полунепрерывность снизу в $\overline{A^+}$ потенциала $\kappa(x, -\mu^-)$. А так как потенциал $\kappa(x, -\mu^-)$ полунепрерывен сверху в X, то, следовательно, он непрерывен на $\overline{A^+}$.

Доказательство того, что для любой ограниченной меры $\mu^+ \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^+})$ потенциал $\kappa(x, \mu^+)$ $(= \kappa'(\mu^+, x))$ непрерывен на $\overline{A^-}$, аналогично. Лемма 4.6 доказана.

5. Описание потенциалов минимальных мер. *5.1.* Выделим в виде лемм следующие два утверждения, относящиеся к элементарным свойствам потенциалов и неоднократно используемые в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}(X)$. *Тогда для каждого* $c \in [-\infty, +\infty]$ *множество всех тех* $x \in X$, *в которых потенциал* $\kappa(x, \mu)$ *определен и* $\geq c$, *универсально измеримо.*

Лемма 5.1 следует из приведенных в п. 1 свойств измеримых множеств и функций.

Лемма 5.2. *Пусть* E *— множество в* X, $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ *и* $\kappa(x, \mu) \geq c$ *приблизительно всюду в* E, *где* $c \in (-\infty, +\infty]$. *Тогда для любой ограниченной меры* $\nu \in \mathfrak{M}^+(E)$ *с* $\kappa(\nu, \nu) < +\infty$ *выполняется* $\kappa(x, \mu) \geq c$ ν*-почти всюду в* X.

Доказательство. Обозначая $Q := \{x \in E:\ \kappa(x, \mu) < c\}$, из утверждения iii) леммы 2.2 находим $\nu_*(Q) = 0$. Но множество Q ν-измеримо как пересечение ν-измеримого множества E и универсально измеримого в силу леммы 5.1 множества $\{x \in X\colon \ \kappa(x, \mu) < c\}$, а мера ν ограничена. Следовательно, Q ν-интегрируемо, и потому $\nu^*(Q) = 0$. Учитывая равенство $\nu^*(X \setminus E) = 0$, получаем требуемое.

5.2. Всюду далее в этом пункте предполагаем выполненным условие

$$-\infty < w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty. \tag{5.1}$$

В силу леммы 4.3 из (5.1) следует, что $w_\kappa(A_i) < +\infty$ для всех $i \in I$.

Кроме того, в этом подпункте предполагаем, что $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима; пусть $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ — фиксированная минимальная мера.

Теорема 5.1. *Пусть ядро κ симметрично, а множества A^+ и A^- e_κ-разделены. Тогда потенциал $\kappa(x, \lambda)$ определен приблизительно всюду в A и для всех $i \in I$ удовлетворяет соотношениям:*

a) $\alpha_i a_i \kappa(x, \lambda) \geq \alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda)$ *приблизительно всюду в* A_i;

b′) $a_i \kappa(x, \lambda) = \kappa(\lambda^i, \lambda)$ λ^i*-почти всюду в* X,

причем

$$-\infty < \kappa(\lambda^i, \lambda) < +\infty. \tag{5.2}$$

Доказательство. Неравенства (5.2) следуют из (5.1) и леммы 3.1.

Из e_κ-разделенности множеств A^+ и A^- находим, что функция $\kappa(x, \lambda^+)$ ν-интегрируема для каждой меры $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(A^-)$ с конечной энергией и потому конечна приблизительно всюду в A^- (см. лемму 2.2). Аналогично, потенциал $\kappa(x, \lambda^-)$ конечен приблизительно всюду в A^+, и потому $\kappa(x, \lambda)$ определен приблизительно всюду в A.

Предположим, что для некоторого $i \in I^+$ утверждение a) не верно. Обозначая

$$Q := \{x \in A_i\colon \ a_i \kappa(x, \lambda) < \kappa(\lambda^i, \lambda)\},$$

имеем $w_\kappa(Q) < +\infty$. Рассмотрим множества

$$\Lambda_n := \left\{x \in X\colon \ a_i \kappa(x, \lambda) \leq \kappa(\lambda^i, \lambda) - \frac{1}{n}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Для всех $\nu \in \mathfrak{M}^+(Q)$ множество Q ν-измеримо, и потому ν-измеримы множества $Q \cap \Lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. лемму 5.1). А так как $Q \cap \Lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, возрастают по включению и их объединение равно Q, то отсюда на основании леммы 4.2 при $m = p = 1$ и следующего за ней замечания находим

$$w_\kappa(Q) = \lim_{n \in \mathbb{N}} w_\kappa(Q \cap \Lambda_n).$$

Пользуясь (2.2), убеждаемся в существовании номера n_0 и компактного множества K таких, что $K \subset Q \cap \Lambda_{n_0}$ и $w_\kappa(K) < +\infty$. Выберем $\omega \in \mathfrak{M}^+(K, a_i)$ с $\kappa(\omega, \omega) < +\infty$.

Из условия e_κ-разделенности множеств A^+ и A^- находим $\kappa(\omega, \lambda^-) < +\infty$. Следовательно, взаимная энергия $\kappa(\omega, \lambda)$ определена и потому в силу теоремы Фубини выполняется $\kappa(\omega, \lambda) = \int \kappa(x, \lambda)\, d\omega(x)$. Интегрируя обе части неравенства

$$\alpha_i \kappa(x, \lambda) \le \kappa(\lambda^i, \lambda) - \frac{1}{n_0} \quad \forall x \in K$$

по ω, получаем

$$\kappa(\omega, \lambda) \le \kappa(\lambda^i, \lambda) - \frac{1}{n_0} < \kappa(\lambda^i, \lambda). \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что взаимная энергия $\kappa(\omega, \lambda^i)$ конечна. Отсюда находим

$$-\infty < \kappa(\lambda^i - \omega, \lambda^i - \omega) < +\infty. \tag{5.4}$$

Для любого $h \in (0, 1]$ мера $\tau := \lambda - h\lambda^i + h\omega$ принадлежит $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и, в силу леммы 3.1 и (5.4), ее энергия определена (и конечна). Поэтому $\kappa(\lambda, \lambda) \le$ $\le \kappa(\tau, \tau)$ и

$$\frac{h}{2} \kappa(\lambda^i - \omega, \lambda^i - \omega) \ge \kappa(\lambda, \lambda^i - \omega)$$

для всех $h \in (0, 1]$. Устремляя h к нулю и пользуясь (5.4), находим $\kappa(\omega, \lambda) \ge \kappa(\lambda^i, \lambda)$.

Полученное противоречие с (5.3) доказывает утверждение а) для всех $i \in I^+$.

Зафиксировав $i \in I^+$, докажем утверждение b′). В силу леммы 5.2 из утверждения а) находим

$$a_i \kappa(x, \lambda) \ge \kappa(\lambda^i, \lambda) \quad \lambda^i\text{-почти всюду в } X. \tag{5.5}$$

Интегрируя это неравенство по λ^i, имеем

$$\alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda) = \int a_i \kappa(x, \lambda)\, d\lambda^i(x) \ge \int \kappa(\lambda^i, \lambda)\, d\lambda^i = a_i \kappa(\lambda^i, \lambda),$$

что вместе с (5.5) доказывает утверждение b′) для $i \in I^+$.

Для $i \in I^-$ утверждения а) и b′) доказываются аналогично (либо выводятся из доказанного с помощью соображений симметрии). Теорема 5.1 доказана.

Следствие 5.1. *Пусть ядро κ симметрично, а A^+ и A^- e_κ-разделены. Тогда для любой меры $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ с $\kappa(\nu, \nu) < +\infty$ выполняется неравенство $\kappa(\nu, \lambda) \ge \kappa(\lambda, \lambda)$, если только $\kappa(\nu, \lambda)$ определено.*

Доказательство. В силу леммы 5.2 неравенство в утверждении а) теоремы 5.1 выполняется ν^i-почти всюду в X, $i \in I$. Интегрируя его по ν^i, а затем суммируя по $i \in I$, получаем требуемое.

Теорема 5.1 допускает следующее уточнение (ср. с теоремой 2.1).

Теорема 5.2. *Пусть κ — симметричное ядро, непрерывное на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$, и либо множества A^+ и A^- κ-разделены, либо выполняется условие $\mathcal{A}_\infty$). Тогда потенциал $\kappa(x, \lambda)$ определен всюду в $\overline{A}$ и удовлетворяет утверждениям теоремы 5.1, а также соотношениям:*

b) $a_i \kappa(x, \lambda) = \kappa(\lambda^i, \lambda)$ *приблизительно всюду в* $A_i \cap S(\lambda^i)$, $i \in I$;

c) $\alpha_i a_i \kappa(x, \lambda) \le \alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda)$ *для всех* $x \in S(\lambda^i)$, $i \in I$.

Доказательство. В условиях теоремы 5.2 множества A^+ и A^- e_κ-разделены, поэтому справедливо заключение теоремы 5.1. Согласно следствию 4.2 и лемме 4.6, потенциал $\kappa(x, \lambda)$ определен всюду в $\overline{A}$ и полунепрерывен снизу на $\overline{A^+}$ и сверху на $\overline{A^-}$.

Зафиксируем $i \in I^+$ и $x_0 \in S(\lambda^i)$. Пусть $\mathcal{B}(x_0)$ — направленное по отношению $\supset$ множество всех открытых окрестностей точки x_0 в $\overline{A_i}$. Для каждого $U \in \mathcal{B}(x_0)$ выполняется $\lambda^i(U) > 0$, поэтому в силу утверждения b′) теоремы 5.1 существует точка $x_U \in U$ со свойством

$$a_i \kappa(x_U, \lambda) = \kappa(\lambda^i, \lambda). \tag{5.6}$$

А так как направленность $(x_U)_{U \in \mathcal{B}(x_0)}$ сходится к x_0, то из (5.6) и полунепрерывности снизу $\kappa(x, \lambda)$ на $\overline{A^+}$ находим $a_i \kappa(x_0, \lambda) \le \kappa(\lambda^i, \lambda)$.

Рассуждения для $i \in I^-$ симметричны. Утверждение c) доказано.

Из утверждений a) теоремы 5.1 и c) теоремы 5.2 следует утверждение b). Теорема 5.2 доказана.

Набор чисел $\kappa(\lambda^i, \lambda)$, $i \in I$, фигурирующий в данном теоремами 5.1 и 5.2 описании потенциала $\kappa(x, \lambda)$, единствен. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть существуют конечные числа η_i, $i \in I$, такие, что*

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \lambda) \ge \alpha_i \eta_i \quad \lambda^i\text{-почти всюду в} \quad X, \quad i \in I, \tag{5.7}$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \ge w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{5.8}$$

Тогда

$$\eta_i = \kappa(\lambda^i, \lambda) \quad \forall\, i \in I, \tag{5.9}$$

и в (5.7), (5.8) *на самом деле выполняется равенство.*

Доказательство. Интегрируя (5.7) по λ^i, а затем суммируя по $i \in I$ и пользуясь (5.8), последовательно получаем

$$\alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda) = \int \alpha_i \kappa(x, \lambda)\, d\lambda^i(x) \ge \int \frac{\alpha_i \eta_i}{a_i}\, d\lambda^i = \alpha_i \eta_i, \quad i \in I, \tag{5.10}$$

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) = \sum_{i \in I} \alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda) \ge \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \ge w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) следует, что всюду в этих соотношениях имеет место равенство. Это доказывает (5.9) и равенство (5.8). Из (5.7), (5.9) и (5.10) следует равенство в (5.7). Теорема 5.3 доказана.

Замечание. Теорема 5.3 остается в силе, если в (5.7) и (5.8) знак $\ge$ поменять на $\le$. В этом случае она может быть даже усилена (см. предложение 5.1).

5.3. Установленные теоремами 5.1 – 5.3 и следствием 5.1 свойства минимальных мер являются их характеристическими свойствами в смысле следующих утверждений.

Предложение 5.1. *Пусть существуют $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и $c_i \in (-\infty, +\infty)$, $i \in I$, такие, что энергия $\kappa(\mu, \mu)$ определена и*

$$\sum_{i \in I} \alpha_i c_i \le w_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{5.12}$$

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \mu) \le \alpha_i c_i \quad \mu^i\text{-почти всюду в} \quad X, \quad i \in I. \tag{5.13}$$

Тогда μ — минимальная в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мера. При этом

$$c_i = \kappa(\mu^i, \mu) \quad \forall\, i \in I,$$

и в (5.12), (5.13) *на самом деле выполняется равенство.*

Предложение 5.1 доказывается аналогично теореме 5.3.

Предложение 5.2. *Пусть* κ *— положительно определенное ядро,* μ *— мера из* $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{E}_\kappa$. *Следующие утверждения равносильны*:

i) μ *— минимальная в* $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задаче мера*;

ii) $\kappa(\nu, \mu) \geq \kappa(\mu, \mu)$ *для всех* $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{E}_\kappa$;

iii) $\alpha_i a_i \kappa(x, \mu) \geq \alpha_i \kappa(\mu^i, \mu)$ *приблизительно всюду в* A_i, $i \in I$;

iv) *существуют числа* $\eta_i \in (-\infty, +\infty)$, $i \in I$, *такие, что* $\sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \geq \kappa(\mu, \mu)$ *и* $\alpha_i a_i \kappa(x, \mu) \geq \alpha_i \eta_i$ *приблизительно всюду в* A_i, $i \in I$;

v) *существуют числа* $c_i \in (-\infty, +\infty)$, $i \in I$, *такие, что* $\sum_{i \in I} \alpha_i c_i \leq w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ *и* $\alpha_i a_i \kappa(x, \mu) \leq \alpha_i c_i$ μ^i*-почти всюду в* X, $i \in I$.

Доказательство. Для положительно определенных ядер выполнены условия теоремы 5.1, поэтому i) $\Rightarrow$ iii) и i) $\Rightarrow$ v). Импликация iii) $\Rightarrow$ iv) очевидна, v) $\Rightarrow$ i) доказана предложением 5.1, а iv) $\Rightarrow$ ii) доказывается аналогично следствию 5.1. Если верно утверждение ii), то, применяя к $\kappa(\nu, \mu)$ неравенство Коши – Буняковского, находим $\kappa(\nu, \nu) \geq \kappa(\mu, \mu)$ для всех $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{E}_\kappa$, и потому выполняется утверждение i). Предложение 5.2 доказано.

5.4. Пусть κ — положительно определенное ядро, а $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима. Из выпуклости класса $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и неравенства треугольника в $\mathcal{E}_\kappa$ следует такая лемма.

Лемма 5.3. *Класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *выпуклый.*

Для мер из $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ справедливы следующие утверждения единственности.

Предложение 5.3. *Пусть* $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{E}_\kappa$. *Следующие утверждения равносильны*:

i) $\mu \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$;

ii) *меры* μ *и* λ *эквивалентны в* $\mathcal{E}_\kappa$;

iii) $\kappa(x, \mu) = \kappa(x, \lambda)$ *приблизительно всюду в* X;

iv) $\kappa(\sigma, \mu) = \kappa(\sigma, \lambda)$ *для всех* $\sigma \in \mathcal{E}_\kappa$;

v) $\kappa(\mu^i, \mu) = \kappa(\lambda^i, \lambda)$ *для всех* $i \in I$.

Доказательство. Из выпуклости класса $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и правила параллелограмма $\|\mu - \lambda\|_\kappa^2 = 2\|\mu\|_\kappa^2 + 2\|\lambda\|_\kappa^2 - \|\mu + \lambda\|_\kappa^2$ находим i) $\Rightarrow$ ii). Обратное утверждение вытекает из неравенства $\left|\|\mu\|_\kappa - \|\lambda\|_\kappa\right| \leq \|\mu - \lambda\|_\kappa$, а равносильность утверждений ii), iii), iv) — из леммы 2.4.

Если верно утверждение v), то $\kappa(\mu, \mu) = \kappa(\lambda, \lambda)$, и потому выполняется утверждение i). Обратно, пусть верно утверждение i); тогда для $\kappa(x, \mu)$ справедлива теорема 5.1. Применяя утверждение iii) настоящего предложения и следствие 2.1, находим, что для всех $i \in I$ приблизительно всюду в A_i (а потому λ^i-почти всюду в X) выполняется $\alpha_i a_i \kappa(x, \lambda) \geq \alpha_i \kappa(\mu^i, \mu)$. Отсюда в силу теоремы 5.3 следует утверждение v). Предложение 5.3 доказано.

***Следствие* 5.2.** *Если* κ *строго положительно определено и* $\lambda, \mu \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, *то* λ *и* μ *эквивалентны в* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

1. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
2. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
3. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135–352.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
6. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории потенциала в локально компактных пространствах. – Киев, 1998. – 72 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 98.9).
7. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
8. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 212 с.
9. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
10. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. Math. France. – 1945. – **73**. – P. 74–106.
11. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech. – 1967. – **17**, № 4. – P. 315–329.
12. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала. – Киев, 1980. – С. 3–13. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
13. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350–1360.
14. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. II // Там же. – 1996. – **48**, № 5. – С. 603–613.
15. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I // Там же. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494–500.
16. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. II // Там же. – № 11. – С. 1475–1480.
17. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Там же. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431–437.

Получено 23.11.98