УДК 512.643.5; 517.988.57

Я. М. Дымарский (Луган. пед. ун-т)

О МНОГООБРАЗИЯХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. I

For a manifold of normalized eigenvectors of self-adjoint operators, we investigate its vector bundle and stratification according to the numbers and multiplicities of the eigenvalues.

Досліджено розшарування многовиду нормованих власних векторів самоспряжених операторів та його стратифікацію за номерами та кратностями власних чисел.

Введение. Теория собственных векторов нелинейных операторных уравнений восходит к вариационно-топологическому методу Люстерника – Шнирельмана. Существенное развитие теория получила в работах М. А. Красносельского, который применил в ней различные топологические, вариационные и конусные методы. Из многочисленных работ последних десятилетий отметим работы С. И. Похожаева, П. Рабиновича и И. В. Скрыпника (обширную библиографию см. в [1]). Особое место занимает работа Л. А. Люстерника [2], в которой с помощью оригинального метода продолжения по параметру доказано существование счетного числа нормированных собственных функций невариационной задачи Дирихле на отрезке. (Результат Л. А. Люстерника был усилен и доказан другим методом в [3].) Задачи, рассмотренные в [2, 3] и во многих других работах (см. библиографию в [3]), характеризуются свойством, которое существенно используется при доказательстве: ассоциированная в некотором смысле линейная задача имеет только простые собственные значения. Попытка обойти трудности, связанные с появлением кратных собственных значений, предпринята в работе Коснера [4]. В настоящей статье описана топологическая конструкция, позволяющая в конечномерном случае для некоторого класса квазилинейных невариационных задач доказывать теоремы о существовании наборов нормированных собственных векторов, причем ассоциированная линейная задача может иметь любые вырождения. Основанием конструкции является многообразие пар (оператор, собственный вектор). Этот объект представляет самостоятельный интерес и его исследованию посвящена значительная часть работы. Топологическим инвариантом, с помощью которого мы обнаруживаем собственные векторы, является индекс пересечения. Индекс пересечения в нелинейных задачах о собственных векторах применялся Ю. Г. Борисовичем и О. В. Кунаковской [5], которые опирались на теорию краевых индексов В. И. Арнольда. Несомненный интерес представляет сопоставление различных подходов в теории собственных векторов нелинейных задач.

В п. 1 введены основные понятия. Пункты $2-5$ посвящены исследованию многообразия пар. Термины „многообразие", „расслоение" и т. д. означают, если особо не оговорено, C^∞-объекты.

1. Основные понятия. Введем следующие обозначения: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в ориентированном пространстве R^n, $u\in R^n$, $S^{n-1}=\{u\colon \langle u,u\rangle = 1\}$; $\lambda\in R$; $L^{(n)}$ — ориентированное пространство вещественных самосопряженных операторов в R^n, $\dim L^{(n)}=(n+1)n/2$. Рассмотрим квазилинейную задачу о *нормированных собственных векторах* (н. с. в.) и *собственных значениях* (с. зн.) λ:

$$A(u)u=\lambda u,\quad u\in S^{n-1}, \tag{1}$$

где

$$A:\ S^{n-1}\to L^{(n)} \tag{2}$$

— C^r-отображение $(r \geq 0)$.

***Пример* 1.** а) $A(u) \equiv \mathrm{const} = A \in L^{(n)}$. Задача (1) в этом случае является вещественной самосопряженной задачей о н. с. в. и с. зн.

б) Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ квазилинейную краевую задачу на нормированные собственные функции $y(x)$ и с. зн. λ вида

$$-y''(x)+T(y(x),y'(x),x)\,y(x) = \lambda y(x), \quad \Gamma(y) = 0, \quad \int_0^1 y^2 dx = 1,$$

где T — оператор суперпозиции [1], а Γ — оператор самосопряженных краевых условий (например, условий Дирихле или периодических условий). Сеточная аппроксимация этой задачи имеет вид (1), (2) с отображением $A(u) = A + D_T(u)$, где A — сеточная аппроксимация оператора $-d^2/dt^2$, а $D_T(u)$ — диагональный оператор, порожденный оператором T.

Пару (λ, u), удовлетворяющую (1), назовем *нормированным решением* (н. р.). Если (λ^*, u^*) — н. р., то λ^* является с. зн. ассоциированной линейной задачи

$$Au = \lambda u, \quad u \in S^{n-1}, \tag{3}$$

где

$$A = A(u^*) \in L^{(n)}. \tag{4}$$

Как известно [6], с. зн. линейной задачи (3) располагаются в виде неубывающей последовательности $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, где каждое с. зн. повторено столько раз, какова его кратность. Однократное с. зн. называют простым. Кратному с. зн., если особо не оговорено, присваивается наименьший из возможных номеров. Следующему с. зн. присваивается номер, равный номеру предыдущего плюс кратность предыдущего с. зн.. С. зн. кратности m соответствует подпространство собственных векторов размерности m. Собственные векторы, соответствующие различным с. зн., попарно ортогональны.

Определение 1. *Н. р.* (λ^*, u^*) *задачи* (1) *(и его элементы) назовем простым (простыми) или* m *-кратным (кратными), если таковым является* λ^* *как с. зн. задачи* (3), (4). *Присвоим н. р.* (λ^*, u^*) *задачи* (1) *и его элементам тот номер и кратность, которые имеет* λ^* *как с. зн. задачи* (3), (4).

***Замечание* 1.** Понятно, что линейные операторы, различающиеся на скалярный, имеют общие н. с. в., а соответствующие с. зн. различаются на константу; прибавление скалярного оператора не изменяет номера и кратности с. зн.. Поскольку нас интересует только вопрос существования н.р., то отображение (2) достаточно задать с точностью до отображения в одномерное пространство скалярных операторов. Фактор-пространство операторов по подпространству скалярных операторов и связанные с ним объекты обозначим тильдой: $\hat{A} \in \hat{L}^{(n)} = L^{(n)}/R$. Имеет место изоморфизм $\hat{L}^{(n)} = \{A \in L^{(n)} \colon \operatorname{tr} A = 0\}$.

***Замечание* 2.** Определение 1, конечно, распространяется и на н. р. линейной задачи (3). Отметим, что сама по себе пара (λ^*, u^*) не содержит информации о номере и кратности. Эти характеристики она получает только как н. р. определенной задачи (3), (4).

Определение 1 уже использовалось нами для исследования собственных функций краевых задач [7 – 10]. Аналогичное определение введено в [4].

Введем в рассмотрение основные объекты наших исследований. Мы исследуем множество пар

$$P^{(n)} = P = \{p = (A, u) \in L^{(n)} \times S^{n-1} \colon \exists \lambda, \text{ для которого } Au = \lambda u\} \tag{5}$$

и отображение

$$\operatorname{Gr} A\colon S^{n-1} \to L^{(n)} \times S^{n-1}, \quad \operatorname{Gr} A(u) = (A(u), u). \tag{6}$$

Отметим, что: 1) множество P не зависит от отображения A; оно содержит полную информацию о н. с. в. каждого самосопряженного оператора; 2) образ отображения $\operatorname{Gr} A$ является графиком отображения A. Роль введенных объектов в нахождении н. р. прояснится в п. 7 второй части работы. Множество P, на наш взгляд, само по себе представляет определенный интерес. Исследованию его свойств посвящены пп. 2–5.

2. Пространство $L^{(n)}$. Пространство $L^{(n)}$ с точки зрения его стратификации по кратностям всех с. зн. описано В.И. Арнольдом [11] (Добавление 10), [12]. Здесь мы напомним действие [13, с. 444] ортогональной группы $O(n)$ на $L^{(n)}$, а затем опишем гладкую структуру на подмножествах $L^{(n)}$, порожденных операторами, собственные значения которых имеют определенную кратность только для определенного номера. Эти подмножества пересекаются „неправильным" образом и не стратифицируют $L^{(n)}$. Интерес к ним связан с проектированием P на $L^{(n)}$.

На пространстве $L^{(n)}$ группа $O(n)$ действует слева следующим образом: $\forall B \in O(n)$, $\forall A \in L^{(n)}$ действие $[B, A] = BAB^{-1}$. В одной орбите этого действия лежат все операторы, у которых совпадают наборы с. зн.. Группа изотропии точки $A \in L^{(n)}$ (т. е. подгруппа $O(n)$, оставляющая точку A неподвижной) зависит от наличия кратных с. зн. и их кратностей. Так, для оператора с простым спектром это группа $(Z_2)^n$, элементы которой изменяют знаки базисных векторов. Если у оператора имеется l кратных с. зн. с кратностями $m_1, \ldots, m_l$, то группа изотропии будет иметь вид $(Z_2)^i \times O(m_1) \times \ldots \times O(m_l)$, где i — количество простых с. зн., т. е. $i = n - (m_1 + \ldots + m_l)$.

Обозначим через $L^{(n)}(k, m)$ множество самосопряженных операторов, у которых k-е с. зн. точно m-кратно, а остальные с. зн. могут иметь произвольную кратность. Пусть $A \in L^{(n)}(k, m)$. Обозначим через $R^{k-1}(A)$, $R^m(A)$, $R^{n-(k-1+m)}(A)$ инвариантные подпространства оператора A, которым соответствуют определенные с. зн., а именно: первому пространству — с. зн. $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, второму — с. зн. λ_k и третьему — с. зн. $\lambda_{k+m}, \ldots, \lambda_n$. Ограничения оператора A на эти подпространства обозначим соответственно через A_1, $A_2 = \lambda_k E$, A_3 (по определению, второй оператор — скалярный).

Напомним, что 2-флагом $f(i, j)$ в R^n, где $0 < i < j < n$, называется пара (R^i, R^j) упорядоченных по вложению подпространств $R^i \subset R^j \subset R^n$. Множество $F(i, j)$ всех 2-флагов с фиксированными размерностями подпространств является многообразием, канонически диффеоморфным фактор-пространству $O(n)/O(i) \times O(j-i) \times O(n-j)$, так как на $F(i, j)$ транзитивно действует группа $O(n)$ и стационарной подгруппой этого действия является $O(i) \times O(j-i) \times O(n-j)$ [14, с. 17]. Поэтому размерность $\dim F(i, j) = (n^2 - n - (i^2 - i + (j-i)^2 - (j-i) + (n-j)^2 - (n-j)))/2$.

Пусть $1 < k < n - m + 1$. Тогда определено отображение

$$\mu\colon L^{(n)}(k, m) \to F(k-1, k-1+m),$$

$$\mu(A) = (R^{k-1}(A),\ R^{k-1}(A) \oplus R^m(A)),$$

сопоставляющее самосопряженному оператору 2-флаг его инвариантных подпространств.

Обозначим через K_i^+ открытый конус положительно определенных симметрических матриц порядка i.

Лемма 1. *Отображение μ является локально тривиальным расслоением, слой которого диффеоморфен произведению $K_{k-1}^+ \times R \times K_{n-(k-1+m)}^+$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $f_1 \in F$. Пусть $\mathrm{St}(f_1)$ — стационарная группа точки f_1 относительно действия $O(n)$. Пусть $\mathrm{St}^{\perp}(f_1) \subset O(n)$ — многообразие дополнительной размерности к $\mathrm{St}(f_1)$ и трансверсальное $\mathrm{St}(f_1)$ в точке $E \in \mathrm{St}(f_1)$ (E — тождественный оператор). Тогда существует диффеоморфизм d_1 между некоторой окрестностью U_1 точки f_1 в F и окрестностью точки E в $\mathrm{St}^{\perp}(f_1)$, который флаг $f \in U_1$ преобразует в оператор $d_1(f) = B \in O(n)$ такой, что $B(f_1) = f$. В ортонормированном базисе $\{e_l\}^{(n)}(f_1)$, согласованном с флагом f_1, локальная тривиализация расслоения μ имеет вид

$$\phi\colon \mu^{-1}(U_1) \to U_1 \times (K_{k-1}^+ \times R \times K_{n-(k-1+m)}^+),$$

$$\phi(A) = (\mu(A),\ (\lambda_k E - [B^{-1}, A]_1,\ \lambda_k,\ [B^{-1}, A]_3 - \lambda_k E)),$$

где $B = d_1(\mu(A))$ и $[B^{-1}, A]_i$, $i = 1, 3$, — ограничения оператора $[B^{-1}, A]$ на соответствующие инвариантные подпространства. Функции склейки расслоения μ задаются с помощью „коцикла":

$$\overline{\phi}_{2,1}\colon (U_1 \cap U_2) \to O(n), \quad \text{где } \overline{\phi}_{2,1}(f) = (d_2(f))^{-1} d_1(f).$$

В самом деле, оператор $B = (n^2 - n - (i^2 - i + (j-i)^2 \in O(n)$ преобразует флаг f_1 в f_2. Лемма доказана.

Если $k = 1$ или $k - 1 + m = n$, то многообразие 2-флагов $F(k-1, k-1+m)$ вырождается в многообразие 1-флагов, т. е. многообразие Грассмана $G(n, m)$ [13, с. 447]. Аналогично показывается, что в этих случаях отображение μ: $L^{(n)}(k,m) \to G(n,m)$, ставящее в соответствие оператору A его инвариантное подпространство $R^m(A)$, является расслоением со слоем $R \times K_{n-m}^+$.

Теорема 1. *Для всех допустимых k и m множество $L^{(n)}(k,m)$ является подмногообразием пространства $L^{(n)}$ коразмерности $(m-1)(m+2)/2$. Многообразия $L^{(n)}(k_1,m)$ и $L^{(n)}(k_2,m)$ канонически изоморфны, если первое инвариантное подпространство операторов из $L^{(n)}(k_1,m)$ изоморфно третьему инвариантному подпространству операторов из $L^{(n)}(k_2,m)$, т. е. $k_1 - 1 = n - (k_2 - 1 + m)$. (В частности, изоморфны многообразия $L^{(n)}(1,m)$ и $L^{(n)}(n-m+1,m)$, у которых отслеживаемые инвариантные подпространства являются крайними.) Если $1 < k < n-m+1$, многообразие $L^{(n)}(k,m)$ гомотопически эквивалентно многообразию флагов $F(k-1, k-1+m)$; если $k = 1$ или $k - 1 + m = n$, многообразие $L^{(n)}(k,m)$ гомотопически эквивалентно многообразию $G(n,m)$.*

Доказательство. Наличие гладкой структуры на $L^{(n)}(k,m)$ уже доказано. Простые вычисления показывают, что размерность $L^{(n)}(k,m)$, равная сумме размерности базы и слоя, не зависит от k и равна для всех случаев $(n(n+1) -$

$-m(m+1))/2+1$, откуда вытекает формула для коразмерности. Указанный в теореме канонический изоморфизм — это центральная симметрия в $L^{(n)}$ относительно нулевого оператора. Гомотопическая эквивалентность следует из стягиваемости слоя расслоения μ.

Замечание 3. Из теоремы следует, что многообразие операторов с простым k-м с. зн. открыто в $L^{(n)}$, так как $\operatorname{codim} L^{(n)}(k,1)=0$, а многообразие $L^{(n)}(k,2)$ операторов с двукратным с. зн. имеет коразмерность два (а не один, как в пространстве всех линейных операторов).

В работах [11, 12] рассмотрены многообразия эллипсоидов в R^n, имеющих определенный набор осей с определенной кратностью, и показано, что коразмерность многообразия таких эллипсоидов в объемлющем многообразии всех эллипсоидов не зависит ни от n, ни от номеров осей, а зависит только от их количества и кратностей. Из замечания 1 и связи между квадратичными формами и самосопряженными операторами [6] следует, что утверждение теоремы 1 дополняет результаты [11, 12]: оказывается, гладкая структура сохраняется, если следить только за инвариантным подпространством фиксированной размерности, игнорируя структуру оператора в ортогональном дополнении.

3. Многообразие P. Сначала рассмотрим множество

$$Q^{(n)} = Q = \{(A,\lambda,u)\in L^{(n)}\times R\times S^{n-1}\colon Au=\lambda u\}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Множество Q является ориентированным подмногообразием с модельным пространством $L^{(n)}$. В любой точке $q\in Q$ касательное пространство T_qQ не содержит прямую, параллельную прямой $\{\lambda\}=R$.*

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно показать, что отображение $G\colon L^{(n)}\times R\times S^{n-1}\to R^n$, $G(A,\lambda,u)=Au-\lambda u$ имеет постоянный ранг n [13, с. 420]. Но в любой точке $q=(A,\lambda,u)\in Q$ оператор частной производной $D_AG(q)$ эпиморфен: уравнение $D_AG(q)(\Delta A)\equiv(\Delta A)u=v$ разрешимо относительно $\Delta A\in L^{(n)}$ для любого вектора $v\in R^n$, так как $u\neq$ $\neq 0$.

По той же причине уравнение $D_\lambda G(q)(\Delta\lambda)\equiv-(\Delta\lambda)u=0$ разрешимо относительно $\Delta\lambda$ только при $\Delta\lambda=0$. Второе утверждение доказано.

Теперь мы установим гладкую структуру на P.

Теорема 2. *Множество $P\subset L^{(n)}\times S^{n-1}$ является ориентированным подмногообразием с модельным пространством $L^{(n)}$.*

Доказательство. Рассмотрим проектирование $\mathrm{Pr}\colon L^{(n)}\times R\times S^{n-1}\to L^{(n)}\times$ $\times S^{n-1}$, $\mathrm{Pr}(A,\lambda,u)=(A,u)$. В силу определений (5) и (7) $\mathrm{Pr}(Q)=P$ и сужение Pr на Q является биекцией. Из второго утверждения леммы 2 следует, что для любого $q\in Q$ оператор производной $D\mathrm{Pr}(q)$ имеет на касательном пространстве T_qQ постоянный ранг, равный $\dim L^{(n)}$. Следовательно, P и Q диффеоморфны. Теорема доказана.

К. Уленбек [15], исследуя спектральные свойства типичных эллиптических операторов, по-видимому, впервые рассмотрела многообразие троек Q. Физиками для исследования спектра квантомеханических систем введено в рассмотрение многообразие с особенностями пар (A,λ). Особенности возникают в тех точках, где с. зн. λ является кратным [11].

Исследуем свойства P при проектировании

$$\nu_1\colon P\to L^{(n)},\quad \nu_1(A,u)=A. \tag{8}$$

Если оператор A имеет только простые с. зн. (а это типичный случай, см. замечание 3 и [11, 15]), то полный прообраз $\nu_1^{-1}(A)$ содержит $2n$ точек $(A, \pm u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, причем $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Если же A имеет m-кратное с. зн., то над точкой A „нависает" $(m-1)$-мерная сфера S^{m-1} собственных векторов, т. е. сфера $A \times S^{m-1} \subset P$.

***Пример* 2.** Пусть $n = 2$ [8, 9]. В этом случае $L^{(2)} = R^3$. В диагональных элементах a_{ij}, $i = 1, 2$, матрицы оператора $A \in L^{(2)}$ сделаем замену $a_{1,1} = e + d$, $a_{22} = e - d$ и удалим скалярную составляющую e. Многообразие

$$\hat{P}^{(2)} = \left\{ ((d, a_{1,2}), \alpha) \in \hat{L}^{(2)} \times S^1 : \begin{pmatrix} d & a_{1,2} \\ a_{1,2} & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

имеет следующее строение: у фрагмента геликоида, содержащего два оборота образующей прямой вокруг направляющей прямой, отождествляются соответствующие точки крайних образующих. В результате направляющей становится окружность — это сфера S^1 нормированных собственных векторов. Над точкой $0 = \hat{L}^{(2)}(1,2)$ нависает целиком S^1; над остальными точками плоскости $(d, a_{1,2}) \in \hat{L}^{(2)}(1,1)$ нависает по четыре точки из S^1.

Определение 2. *Припишем каждой точке $p = (A, u) \in P$ пару (k, m) натуральных чисел — номер и кратность соответствующего с. зн. λ (см. определение 1 и замечание 2). Точку p называем простой, если $m = 1$, и кратной — в противном случае.*

Многообразие P стратифицируется по номерам и кратностям своих точек:

$$P(k,m) = \{ (A,u) \in P : Au = \lambda_k u;$$
$$\lambda_{k-1}(A) < \lambda_k(A) = \ldots = \lambda_{k+m-1}(A) < \lambda_{k+m}(A) \}, \tag{9}$$

где $1 \leq k$, $m \leq n$, $k + m - 1 \leq n$. Исследуем связь между $P(k,m)$, $L^{(n)}(k,m)$ и ν_1.

Лемма 3. *Сужение $\nu_1(k,m)$ проектирования ν_1 на $P(k,m)$ является локально тривиальным расслоением над $L^{(n)}(k,m)$; его слой — сфера S^{m-1} нормированных собственных векторов оператора $A \in L^{(n)}(k,m)$, которым соответствует m-кратное k-е с. зн. Пара $(A,u) \in P$ имеет кратность $m \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} D\nu_1(A,u) = m - 1$ (D — оператор производной), причем $\operatorname{Ker} D\nu_1(A,u)$ совпадает с $A \times T_u S^{m-1}$ — касательным пространством в точке (A,u) к названной сфере S^{m-1} н. с. в..*

Доказательство. Воспользуемся конструкцией, примененной при доказательстве леммы 1. Область $\mu^{-1}(U_1) \subset L^{(n)}(k,m)$, принадлежащую пространству расслоения μ, используем как область в базе расслоения $\nu_1(k,m)$ и тривиализуем прообраз $\nu_1^{-1}(k,m)(\mu^{-1}(U_1))$. Тривиализация $\varphi : \nu_1^{-1}(k,m)(\mu^{-1}(U_1)) \to \mu^{-1}(U_1) \times S^{m-1}$ имеет вид $\varphi(A,u) = (A, B^{-1}u)$, где $B = d_1\mu(A)$.

Очевидно, $A \times T_u S^{m-1} \subset \operatorname{Ker} D\nu_1(A,u) \subset A \times T_u S^{n-1}$. Если же вектор $v \in T_u S^{n-1}$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} D\nu_1(A,u)$, то $v \in T_{(A,u)}P$ и $v \perp u$. Поэтому $(A - (\lambda + \varepsilon\lambda_0 + \ldots))(u + \varepsilon v) = o(\varepsilon)$. Следовательно, $(A - \lambda)v + \lambda_0 u = 0$. Умножим обе части равенства скалярно на u. Учитывая самосопряженность A и ортогональность u и v, получаем $\lambda_0 = 0$. Итак, v — собственный вектор A, отвечающий тому же с. зн..

Из теоремы 1 и леммы 3 следуют некоторые свойства стратов и их примыканий:

Лемма 4. 1. *Все страты $P(k,m)$ — подмногообразия P коразмерности*

$\operatorname{codim} P(k,m) = m(m-1)/2$ (*в частности,* $\operatorname{codim} P(k,1) = 0$, $\operatorname{codim} P(k,2) = 1$, $\operatorname{codim} P(k,3) = 3$).

2. *Страты* $P(k_1,m)$ *и* $P(k_2,m)$ *канонически изоморфны, если* $k_1 - 1 = n - (k_2 - 1 + m)$. *В частности, изоморфны страты* $P(1,1)$ *и* $P(n,1)$.

3. *Замыкание* $\overline{P}(k_1,m_1) = \bigcup_{(k,m)} P(k,m)$, *где* $k \le k_1$ *и* $k + m \ge k_1 + m_1$.

4. $\overline{P}(k_1,m_1) \cap \overline{P}(k_2,m_2) = \overline{P}(k,m)$, *где* $k = \min\{k_1,k_2\}$, $k + m = \max\{k_1 + m_1, k_2 + m_2\}$.

5. $P = \bigcup P(k,m)$.

Нас особенно интересуют страты $P(k,1)$, содержащие простые точки. Из леммы 3, в частности, вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Отображение* $\nu_1(k,1) : P(k,1) \to L^{(n)}(k,1)$ *является двулистным накрытием.*

Множество всех кратных точек многообразия P обозначим через $P^* = \bigcup_{m \ge 2} P(k,m)$. В топологической конструкции пп. 6, 7 второй части работы важную роль играет следующая лемма.

Лемма 5. P^* — *имеющее особенности замкнутое подмногообразие* P. *В* $L^{(n)} \times S^{n-1}$ *коразмерность* $\operatorname{codim} P^* = n > \dim S^{n-1}$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что наименьшую коразмерность в P, равную единице, имеют страты $P(k,2) \subset P^*$. Поэтому коразмерность P^* в $L^{(n)} \times S^{n-1}$ равна коразмерности P в $L^{(n)} \times S^{n-1}$ плюс один. Но согласно теореме 2 $\operatorname{codim} P = \operatorname{codim} L^{(n)} = n - 1$.

Покажем, что P^* имеет особенности. Согласно лемме 4 страты $P(k,2)$ и $P(k+1,2)$ граничат по замыканию $\overline{P}(k,3)$. Необходимым условием гладкости P^* является уменьшение размерности границы, разделяющей страты, на единицу. Но согласно лемме 4 $\dim P(k,2) - \dim P(k,3) = \operatorname{codim} P(k,3) - \operatorname{codim} P(k,2) = 2$. Следовательно, все точки множества $\overline{P}(k,3)$ особые в P^*. Лемма доказана.

Замечание **4.** Согласно теореме 2 многообразие P не имеет особенностей. Отсюда следует, что страты $P(k,1)$ простых точек, являющиеся открытыми в P множествами, должны граничить по стратам коразмерности один. Этот факт подтвержден в лемме 4: $\operatorname{codim} P(k,2) = 1$.

Введем в рассмотрение дополнение $R = (L^{(n)} \times S^{n-1}) \setminus P^*$, которое также понадобится в пп. 6, 7. Из леммы 5 следует очевидное утверждение.

Лемма 6. *Множество* $R \subset L^{(n)} \times S^{n-1}$ — *открытое, односвязное при* $n \ge 3$ *подмногообразие.*

4. Расслоение *P*. В предыдущем пункте мы рассматривали многообразие P и его подмногообразия с точки зрения проектирования ν_1. Теперь рассмотрим их с точки зрения проектирования

$$\nu_2 : L^{(n)} \times S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad \nu_2(A,u) = u. \tag{10}$$

Через $\nu_2(P)$, $\nu_2(k,m)$, $\nu_2(P^*)$ и $\nu_2(R)$ обозначим сужение ν_2 на P, $P(k,m)$, P^* и R соответственно. Чтобы легче было ориентироваться во взаимосвязях между расслоениями, в начале следующего пункта приведена коммутативная диаграмма расслоений для стратов $P(k,1)$, которые (расслоения) доопределим в этом и следующем пунктах. Для других стратов диаграмма короче — отсутствуют замыкающие расслоения ξ и η.

Обозначим через $L_u^{(n)} \subset L^{(n)}$ линейное подпространство операторов, для которых вектор u собственный. Имеет место изоморфизм линейных пространств:

$L_u^{(n)} = R \times L^{(n-1)}$, где R — множество всех с. зн., соответствующих u, а $L^{(n-1)}$ — пространство операторов, действующих в ортогональном дополнении к u. Размерность $\dim L_u^{(n)} = 1 + n(n-1)/2$. Введем $\langle\langle A, C\rangle\rangle = \operatorname{tr} AC$ — скалярное произведение в $L^{(n)}$ [13, с. 455]. Вместе с ним тривиальное векторное расслоение ν_2 над сферой превращается в евклидово, причем действие $[B, A]$ сохраняет скалярное произведение.

Теорема 3. *Проектирование $\nu_2(P)$ является локально тривиальным векторным расслоением над S^{n-1}. Прообразом точки $u \in S^{n-1}$ расслоения $\nu_2(P)$ является $P_u = L_u^{(n)}$. Ортогональное дополнение к $\nu_2(P)$ в ν_2 канонически изоморфно касательному расслоению TS^{n-1}. Имеют место канонические изоморфизмы:* 1) *векторных пространств* $L^{(n)} = L_u^{(n)} \oplus TS^{n-1}$, 2) *векторных расслоений* $\nu_2 = \nu_2(P) \oplus TS^{n-1}$.

Доказательство. Исключая с помощью (3) с. зн. λ в (5), получаем $P = \{(A, u)\colon Au - \langle Au, u\rangle u = 0\}$.

Пусть $R^{n-1}(\perp u) \subset R^n$ — подпространство, ортогональное вектору $u \in S^{n-1}$. Тогда для любого $u \in S^{n-1}$ справедливо $Au - \langle Au, u\rangle u \in R^{n-1}(\perp u)$. Последнее означает, что определено отображение векторных расслоений

$$H\colon L^{(n)} \times S^{n-1} \to TS^{n-1}, \quad H(A, u) = (Au - \langle Au, u\rangle u,\ u).$$

Отображение H на каждом слое $L^{(n)} \times u$ линейно (это очевидно) и послойно эпиморфно. В самом деле, при фиксированном u уравнение $Au - \langle Au, u\rangle u = v$ разрешимо по $A \in L^{(n)}$ для любого $v \in R^{n-1}(\perp u)$. Получаем, что P является ядром эпиморфизма H векторных расслоений. Все утверждения теоремы вытекают из этого факта [14, с. 169].

Обозначим через $L_{\perp u}^{(n)}$ пространство самосопряженных операторов $A_{\perp u}$, действующих в касательном пространстве $T_u S^{n-1}$. Каждое пространство $L_{\perp u}^{(n)}$, очевидно, изоморфно $L^{(n-1)}$. Обозначим через P^{tg} объединение $P^{tg} = \bigcup_u P_u^{tg} = \bigcup_u L_{\perp u}^{(n)}$. В каждом касательном пространстве $T_u S^{n-1}$ индуцируется скалярное произведение, с помощью которого устанавливается канонический изоморфизм между P^{tg} и симметрическим квадратом касательного расслоения [13, с. 162, 621]. Таким образом, P^{tg} является пространством локально тривиального векторного расслоения $\nu_2^{tg}\colon P^{tg} \to S^{n-1}$, где $\nu_2^{tg}(A_{\perp u}, u) = u$, с левосторонним действием $[B, A_{\perp u}]$ специальной ортогональной группы $SO(n-1)$. Это расслоение ассоциировано с главным расслоением $SO(n)$ над S^{n-1} ориентированных касательных реперов [13, с. 605, 611]. Обозначим через NS^{n-1} пространство нормального расслоения над S^{n-1} в R^n, т. е. объединение пар $\bigcup(\lambda u, u)$, где $\lambda \in R$, $u \in S^{n-1}$. Слой нормального расслоения $N_u S^{n-1} = R$. Само нормальное расслоение будем обозначать так же, как и его пространство. Исследуем подробнее строение расслоения $\nu_2(P)$ и его слоя $L_u^{(n)}$.

Лемма 7. *Имеют место канонические изоморфизмы:* 1) *векторных пространств* $L_u^{(n)} = R \oplus L^{(n-1)}$; 2) *векторных расслоений* $\nu_2(P) = NS^{n-1} \oplus \nu_2^{tg}$.

Доказательство. Отображение

$$\Lambda\colon P \to NS^{n-1}, \quad \Lambda(A, u) = (\lambda u, u),$$

где $\lambda = \langle Au, u\rangle$ — с. зн. A, является эпиморфизмом векторных расслоений:

для любого числа λ существуют операторы $A \in L_u^{(n)}$, для которых оно является с. зн. и ему соответствуют н. с. в. u. Ядром эпиморфизма Λ в каждом слое $L_u^{(n)}$ является подпространство операторов, у которых названное с. зн. $\lambda = 0$, т. е. пространство $L_{\perp u}^{(n)} = L^{(n-1)}$. А ортогональным дополнением ядра в слое $L_u^{(n)}$ является одномерное подпространство операторов вида $A(u+\upsilon) = \lambda u \;\; \forall \upsilon \in T_u S^{n-1}$, т. е. слой нормального расслоения.

Из теоремы 3 и леммы 7 получаем такое следствие.

Следствие 2. Имеют место канонические изоморфизмы: 1) *векторных пространств* $L^{(n)} = R \oplus L^{(n-1)} \oplus T_u S^{n-1}$; 2) *векторных расслоений* $\nu_2 = NS^{n-1} \oplus \nu_2^{lg} \oplus TS^{n-1}$.

Описанное в следствии 2 разложение слоя $L^{(n)}$ над точкой $u \in S^{n-1}$ тривиального расслоения ν становится очевидным в ортонормированном базисе $\{u, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_{n-1}\}$, где $\upsilon_i \in T_u S^{n-1}$. Если $(a_{i,j})$, $1 \le i, j \le n$, — симметрическая матрица самосопряженного оператора в $\{u, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_{n-1}\}$, то $a_{1,1} \in N_u S^{n-1}$, $(a_{i,j})$, $2 \le i, j \le n$, — матрица оператора из $L^{(n-1)} \subset P_u^{lg}$, а $(a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}) \in T_u S^{n-1}$.

Прежде чем описать другие расслоения, связанные с проектированием ν_2, введем в рассмотрение открытое подмногообразие $GL_k^{(n)} \subset L^{(n)}$ невырожденных самосопряженных операторов, у которых $\lambda_k < 0 < \lambda_{k+1}$.

Лемма 8. *Проектирование* $\tau_k : GL_k^{(n)} \to G(n,k)$, *ставящее в соответствие оператору его инвариантное подпространство, порожденное первыми* k *с. зн., является локально тривиальным расслоением, слой которого диффеоморфен произведению* $K_k^+ \times K_{n-k}^+$. *Многообразие* $GL_k^{(n)}$ *гомотопически эквивалентно* $G(n,k)$.

Доказательство. Наличие структуры расслоения доказывается, как в лемме 1. Гомотопическая эквивалентность следует из стягиваемости слоя.

Лемма 9. *Проектирования* $\nu_2(k,m)$ *являются подрасслоениями расслоения* $\nu_2(P)$. *При* $m \ge 2$ *слой* $L_u^{(n)}(k,m)$ *над точкой* $u \in S^{n-1}$ *канонически диффеоморфен многообразию* $L^{(n-1)}(k, m-1)$. *При* $m = 1$ *слой канонически диффеоморфен произведению* $R \times GL_{k-1}^{(n-1)}$. *В* $L_u^{(n)}$ *коразмерность* $\operatorname{codim} L_u^{(n)}(k, m) = m(m-1)/2$.

Доказательство. Достаточно проверить гладкость слоя, так как функции склейки расслоений $\nu_2(k,m)$ те же, что у $\nu_2(P)$. Напомним, что для всех операторов из $L_u^{(n)}$ касательное пространство $T_u S^{n-1}$ инвариантно. Понятно, что $L_u^{(n)}(k,m)$ — множество самосопряженных операторов A, для которых н. с. в. u соответствует k-е с. зн. λ_k, имеющее кратность m. При $m \ge 2$ сужение $A_{\perp u}$ оператора A на $T_u S^{n-1}$ имеет то же самое k-е с. зн. λ_k, но кратности $m-1$. Таким образом, оператор A полностью определяется своим сужением $A_{\perp u}$, принадлежащим многообразию $L^{(n-1)}(k, m-1)$. При $m = 1$ слой тривиально расслоен над R. В самом деле, если фиксировано с. зн. $\lambda_k \in R$, то сужение $A_{\perp u}$ — это оператор, с. зн. γ_i которого удовлетворяют условиям: $\gamma_i = \lambda_i$ при $1 \le i \le k-1$, $\gamma_i = \lambda_{i+1}$ при $k \le i \le n-1$ и $\gamma_{k-1} < \lambda_k < \gamma_k$. Множество всех таких операторов $A_{\perp u}$ канонически диффеоморфно $GL_{k-1}^{(n-1)}$.

Из леммы 9 вытекают два утверждения:

Следствие 3. Проектирование $\nu_2(P^*)$ *является подрасслоением с осо-*

бенностями расслоения $\nu_2(P)$. *Слой* $P_u^* = \bigcup_{m \geq 2} L_u^{(n)}(k, m)$. *В* $L_u^{(n)}$ *коразмерность* $\operatorname{codim} P_u^* = 1$, *а в* $(L^{(n)} \times u)$ *коразмерность* $\operatorname{codim} P_u^* = n$.

Следствие 4. *Проектирование* $\nu_2(R)$ *является подрасслоением* ν_2. *Слой* $R_u = (L^{(n)} \times u) \setminus P_u^*$ *есть открытое в* $L^{(n)} \times u$, *односвязное при* $n \geq 3$ *подмногообразие.*

***Пример* 3.** а) $n = 2$. $\hat{P}(1,1)$, $\hat{P}(2,1)$ — открытые цилиндрические поверхности, нетривиально вложенные в $\hat{L}^{(2)} \times S^1$ (дважды перекрученные); $\hat{P}^* = \hat{P}(1,2) = S^1$; слой $\hat{P}_u = \hat{L}_u^{(2)}$ — прямая (образующая многообразия $\hat{P}^{(2)}$); слои $\hat{L}_u^{(2)}(1,1)$, $\hat{L}_u^{(2)}(2,1)$ — лучи, разделенные точкой $\hat{L}_u^{(2)}(1,2) = \hat{P}_u^*$; $\hat{R} = \{R^2 \setminus 0\} \times S^1$; $\hat{R}_u = R^2 \setminus 0$.

б) $n = 3$. Пространство $\hat{L}^{(3)} = R^5$. Слой $\hat{P}_u = \hat{L}_u^{(3)} = R^3$. Слой $\hat{P}_u^*$ — коническая поверхность второго порядка в $\hat{P}_u$. Коническая поверхность разбивает пространство на три области: два конуса $\hat{L}_u^{(3)}(1,1)$, $\hat{L}_u^{(3)}(3,1)$ и область $\hat{L}_u^{(3)}(2,1)$, заключенную между полостями конической поверхности. Сама коническая поверхность состоит из двух полостей $\hat{L}_u^{(3)}(1,2)$, $\hat{L}_u^{(3)}(2,2)$ и вершины $\hat{L}_u^{(3)}(1,3)$. Слой $\hat{R}_u = R^5 \setminus \hat{P}_u^* = R^5 \setminus \{$коническая поверхность второго порядка$\}$.

5. Страты $P(k, 1)$. Дополнительно исследуем гомотопические свойства стратов $P(k,1)$ — пространств расслоений $\nu_1(k,1)$, содержащих простые точки. Предварительно отметим, что в случае $m = 1$ существует естественное расслоение ξ: $F(k-1, k) \to RP^{n-1}$ многообразия флагов над проективным пространством; $\xi(R^{k-1}, R^{k-1} \oplus R) = R$, где $R \perp R^{k-1}$. Слоем ξ является многообразие Грассмана $G(n-1, k-1)$ всевозможных $(k-1)$-мерных пространств в ортогональном дополнении R^{n-1} к прямой R. Двулистное накрытие $\eta : S^{n-1} \to RP^{n-1}$ замыкает коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
P(k,1) \arrow[r, "\nu_1", "\text{двулистное накрытие}"'] \arrow[d, "\nu_2", "\substack{\text{слой}\\ R \times GL_{k-1}^{n-1}}"'] & L^{(n)}(k,1) \arrow[r, "\nu", "\substack{\text{слой гомотопически}\\ \text{тривиален}}"'] & F(k-1,\, k) \arrow[d, "\xi", "\substack{\text{слой}\\ G(n-1,\, k-1)}"'] \\
S^{n-1} \arrow[rr, "\eta", "\text{двулистное накрытие}"'] & & RP^{n-1}
\end{tikzcd}$$

В самом деле, по любому пути отображение из $P(k,1)$ в RP^{n-1} превращает точку (A, u) в собственную прямую оператора A, порожденную н. с. в. u.

Описывая гомотопические свойства стратов, прежде всего отметим, что все $P(k,m)$ (в том числе и $P(k,1)$) связны, так как являются расслоениями над сферой со связным слоем (леммы 8, 9).

Опишем „крайние" страты $P(1,1) = P(n,1)$ (см. п. 1 леммы 4). В этих случаях слой расслоения ν_2 упрощается: $L_u^{(n)}(1,1) = R \times K_{n-1}^+$, где первый сомножитель слоя — это множество всех с. зн., соответствующих н.с.в. u, а второй — открытый конус положительно определенных самосопряженных операторов, действующих в касательном пространстве (см. лемму 9). Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Для* $i = 1, n$ *имеют место канонические изоморфизмы* $\nu_2(i,1) = NS^{n-1} \oplus \nu_2^{+tg}$, *где* ν_2^{+tg} — *расслоение (являющееся подрасслоением* ν_2^{tg}*) положительно определенных самосопряженных операторов, действующих в ка-*

сательных пространствах $T_u S^{n-1}$. *Многообразия* $P(1,1) = P(n,1)$ *гомотопически эквивалентны сфере* S^{n-1}.

Расслоение ν_2^{+tg} не является векторным, поэтому операцию $\oplus$ следует понимать как сумму Уитни [16, с. 28].

Теперь рассмотрим малые размерности. При $n = 2$ все страты с простыми точками „крайние": $P(1,1) = P(2,1) = S^1 \times R \times R^+$ (примеры 2, 3а). При $n = 3$ появляется один „внутренний" страт $P(2,1)$ (пример 3б). В этом случае слой расслоения $\nu_2(2,1)$ есть $R \times GL_1^{(2)}$ (лемма 9). Первый сомножитель слоя — это множество всех с. зн., соответствующих н.с.в. u, а $GL_1^{(2)}$ — это открытое множество невырожденных самосопряженных операторов, действующих в двумерном касательном пространстве $T_u S^2$, у которых с. зн. имеют разные знаки. Элементы $GL_1^{(2)}$ определяются независимо направлением первого н. с. в. и парой с. зн.. Следовательно, $GL_1^{(2)} = RP^1 \times (R^+)^2$ (мы уточнили утверждение леммы 8). Обозначим через PS^2 пространство расслоения ζ над S^2, имеющего в качестве слоя над u проективную прямую, порожденную касательной плоскостью $T_u S^2$. Из предыдущих рассуждений вытекает такое утверждение.

Лемма 11. *При* $n = 3$ *расслоение* $\nu_2(2,1)$ *изоморфно сумме Уитни* $(S^2 \times \times R \times (R^+)^2) \oplus \zeta$. *Многообразие* $P^{(3)}(2,1)$ *гомотопически эквивалентно многообразию* PS^2.

Следствие 5. *Многообразие* $P^{(3)}(2,1)$ *гомотопически эквивалентно линзовому пространству* $L(4;1,1)$ [17, *с.* 54]. *В частности,* $\pi_1(P^{(3)}(2,1)) = Z_4$.

Доказательство. Послойное действие группы Z_2 в расслоении $SO(3)$ единичных касательных векторов сферы S^2, при котором ненулевой элемент группы Z_2 переводит единичный касательный вектор в противоположный, порождает гомеоморфизм между фактор-пространством $SO(3)/Z_2$ и многообразием PS^2. Известно, что фактор-пространство $SO(3)/Z_2$, в свою очередь, гомеоморфно линзовому пространству $L(4;1,1)$ [18, с. 283]. Таким образом, учитывая утверждение леммы 11, получаем первое утверждение следствия 5. Фундаментальные группы линзовых пространств известны: $\pi_1(L(4;1,1)) = Z_4$ [17, с. 54].

Теперь найдем фундаментальные гомотопические группы остальных стратов.

Лемма 12. *При* $1 < k < n$ *и* $n \geq 4$ *группа* $\pi_1(P(k,1)) = Z_2$.

Доказательство. Рассмотрим фрагмент точной гомотопической последовательности расслоения ν_2:

$$\pi_2(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(R \times G_{k-1}^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(P(k,1)) \xrightarrow{\nu_{2*}} \pi_1(S^{n-1}).$$

Крайние группы последовательности тривиальны, а $\pi_1(R \times G_{k-1}^{(n-1)}) = \pi_1(G(n-1, k-1)) = Z_2$ (лемма 8 [18, с. 421]). Поэтому $\pi_1(P(k,1)) = Z_2$.

В заключение пункта установим связь между гомотопическими группами „внутренних" стратов и соответствующими группами многообразий флагов.

Лемма 13. *При* $1 < k < n$, $n \geq 4$ *и* $l > 1$ *имеет место изоморфизм групп:* $\pi_l(P(k,1)) = \pi_l(F(k-1,k))$.

Доказательство. Многообразия $L^{(n)}(k,1)$ и $F(k-1,k)$ гомотопически эквивалентны (теорема 1), а группы $\pi_l(P(k,1)) = \pi_l(L^{(n)}(k,1))$ изоморфны при $l > 1$, так как $\nu_1(k,1)$ — двулистное накрытие (следствие 1).

Автор благодарен Е. А. Кудрявцевой и А. Б. Скопенкову за полезные консультации. Особую благодарность автор выражает Г. М. Волю за постоянную поддержку в работе.

1. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
2. *Люстерник Л. А.* Об одной краевой задаче в теории нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1941. – **33**. – С. 5 – 8.
3. *Дымарский Я. М.* Существование, осцилляционные свойства и асимптотика нормированных собственных функций нелинейных краевых задач // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб. – Ярославль, 1985. – С. 133 – 139.
4. *Cosner Ch.* Bifurcations from higher eigenvalues // Nonlinear Anal. – 1988. – **12**, № 3. – P. 271 – 277.
5. *Borisovich Yu. G., Kunakovskaya O. V.* Intersection theory methods // Stochastic and Global Analysis: Abstrs. – Voronezh, 1996. – P. 10 – 12.
6. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 271 с.
7. *Дымарский Я. М.* О теореме Люстерника для двухточечной задачи четвертого порядка // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб. – Ярославль, 1984. – С. 16 – 24.
8. *Дымарский Я. М.* О типичных бифуркациях в одном классе операторных уравнений // Докл. РАН. – 1994. – **338**, № 4. – С. 446 – 449.
9. *Дымарский Я. М.* О ветвях малых решений некоторых операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 7. – С. 901 – 909.
10. *Дымарский Я. М.* О нормированных собственных функциях некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 127 – 129.
11. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 431 с.
12. *Арнольд В. И.* Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц // Избр. тр. – М.: Фазис, 1998. – С. 583 – 604.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979, – 760 с.
14. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – 494 с.
15. *Uhlenbeck K.* Generic properties of eigenfunctions // Amer. J. Math. – 1976. – **98**, № 4. – P. 1059 – 1078.
16. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1970. – 442 с.
17. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. – 343 с.
18. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. – М.: Наука, 1977. – 488с.

Получено 27.05.99