Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А. А. Дороговцев, О. В. Остапенко

Великі відхилення для стохастичних потоків зі взаємодією

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. І. Портенком)

Досліджено потік взаємодіючих дифузійних частинок, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння зі взаємодією. Для цього потоку отримано принцип великих відхилень.

Нехай x^ε — стохастичний потік, що описується диференціальним рівнянням зі взаємодією [1]

$$\begin{aligned} &dx^\varepsilon(u,t) = a(t, x^\varepsilon(u,t), \mu_t^\varepsilon)dt + \sqrt{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x^\varepsilon(u,t) - p)W(dp, dt), \\ &x^\varepsilon(u,0) = u, \qquad \mu_t^\varepsilon = \mu_0 \circ (x^\varepsilon(\cdot,t))^{-1}, \qquad u \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут μ_0 — імовірнісна міра на $\mathbb{R}$, яка відіграє роль початкового розподілу маси; μ_t^ε — образ міри μ_0 при відображенні $x^\varepsilon(\cdot,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\varphi \in S$ (через S позначаємо простір Шварца), $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^2(p)\,dp = 1$; a — функція, неперервна за змінними t, x та μ, що задовольняє умову Ліпшіца за x та μ. На просторі ймовірнісних мір розглядаємо метрику Вассерштейна [1].

При фіксованому $\varepsilon > 0$ x^ε можна розглядати як випадковий елемент у просторі $\mathfrak{X} = C([0,1]; W_2^1(\mathbb{R}, \varkappa))$, де $W_2^1(\mathbb{R}, \varkappa)$ — соболівський простір, побудований за стандартною гауссівською мірою $\varkappa$. У $\mathfrak{X}$ задамо норму

$$\mathfrak{X} \ni x \to \|x\| = \sup_{t\in[0,1]} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} x(u,t)^2 \varkappa(du)\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\right)^2 \varkappa(du)\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ — сепарабельний банахів простір.

Наша мета — отримати принцип великих відхилень для сімейства $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ у просторі $\mathfrak{X}$.

Означення 1. Сімейство випадкових елементів $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задовольняє принцип великих відхилень у повному сепарабельному метричному просторі $\mathfrak{X}$ з функцією швидкості $I\colon \mathfrak{X} \to [0,\infty]$ (для довільного $C > 0$ множина $\{f | I(f) \leqslant C\}$ є компактом), якщо:

1) для довільної замкненої множини $\mathcal{F} \subset \mathfrak{X}$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \varepsilon \ln P\{x^\varepsilon \in \mathcal{F}\} \leqslant -\inf_{f\in\mathcal{F}} I(f);$$

2) для довільної відкритої множини $G \subset \mathfrak{X}$

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \varepsilon \ln P\{x^\varepsilon \in G\} \geqslant -\inf_{f\in G} I(f).$$

Основний результат спирається на узагальнення принципу неперервності для відображень, які не є неперервними, але можуть бути "добре" наближені неперервними відображеннями [2], а саме:

Означення 2. Послідовність сімейств випадкових елементів $\{x_m^\varepsilon\}_{m\geqslant 1}$ є експоненціально добрим наближенням сімейства $\{x^\varepsilon\}$ в $(\mathfrak{X}, \rho)$, якщо для довільного $\delta > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \varepsilon \ln P\{\rho(x^\varepsilon, x_m^\varepsilon) > \delta\} = -\infty.$$

Теорема 1 [2]. *Нехай $(\mathfrak{X}, \rho)$, $(\mathcal{Y}, \sigma)$ — повні сепарабельні метричні простори; $\{y^\varepsilon\}$ задовольняє принцип великих відхилень у просторі $\mathcal{Y}$ з функцією швидкості I; $G_m\colon \mathcal{Y} \to \mathfrak{X}$, $m \geqslant 1$, — неперервні функції, існує вимірне відображення $G\colon \mathcal{Y} \to \mathfrak{X}$ таке, що для кожного $\alpha < \infty$*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{\{y | I(y)\leqslant\alpha\}} \rho(G_m(y), G(y)) = 0.$$

Тоді довільне сімейство $\{x^\varepsilon\}$, для якого $\{G_m(y^\varepsilon)\}$ є експоненціально добрим наближенням, задовольняє принцип великих відхилень у просторі $\mathfrak{X}$ з функцією швидкості $I'(x) = \inf\{I(y) | x = G(y)\}$.

Визначимо наближення x^ε таким чином: нехай x_m^ε, $m \geqslant 1$, — стохастичний потік, що описується диференціальним рівнянням

$$dx_m^\varepsilon(u,t) = a\left(\frac{[tm]}{m}, x_m^\varepsilon\left(u, \frac{[tm]}{m}\right), \mu^{\varepsilon,m}_{\frac{[tm]}{m}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(x_m^\varepsilon\left(u, \frac{[tm]}{m}\right) - p\right) W(dp, dt),$$

$$x_m^\varepsilon(u,0) = u, \qquad \mu_t^{\varepsilon,m} = \mu_0 \circ x_m^\varepsilon(\cdot, t)^{-1}, \qquad u \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1],$$

в якому коефіцієнти рівняння (1) "заморожені" на інтервалах часу $[k/m, k+1/m)$, $k = 0, \ldots, m-1$. Зауважимо, що x_m^ε є випадковим елементом в $\mathfrak{X}$ для довільних $m \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$.

Лема 1. *$\{x_m^\varepsilon\}_{m\geqslant 1}$ є експоненціально добрим наближенням $\{x^\varepsilon\}$.*

Щоб використати теорему 1, доведемо спочатку принцип великих відхилень для броунівського потоку без взаємодії. Нехай потік y^ε описується рівнянням

$$dy^\varepsilon(u,t) = \sqrt{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u-p) W(dp, dt),$$

$$y^\varepsilon(u,0) = u, \qquad u \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1].$$

y^ε є гауссівським випадковим елементом в $\mathfrak{X}$.

Позначимо через H множину функцій, для яких існує функція $b \in L_2(\mathbb{R}, [0,1])$ така, що

$$h(u,t) = u + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u-p) b(p,s)\, dpds.$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in S$ та її перетворення Фур'є $\widehat{\varphi} \neq 0$ м. с. Тоді сімейство $\{y^\varepsilon\}$ задовольняє принцип великих відхилень у $\mathfrak{X}$ з функцією швидкості*

$$I_y(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\widehat{h}(\cdot,t)(\lambda)}{\widehat{\varphi}(\lambda)} \right)^2 d\lambda dt, & h \in H, \\ \infty, & h \notin H. \end{cases} \tag{2}$$

Наслідок. *Для довільного фіксованого $t \in [0,1]$ сімейство $\{y^\varepsilon(\cdot,t)\}$ задовольняє принцип великих відхилень у $W_2^1(\mathbb{R}, \varkappa)$ з функцією швидкості*

$$I_t(h) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\widehat{h}(\lambda)}{\widehat{\varphi}(\lambda)} \right)^2 d\lambda. \tag{3}$$

Також y^ε є випадковим елементом у просторі $\mathcal{Y} = C([0,1]; L_2(\mathbb{R}, \nu))$, де ν — міра на $\mathbb{R}$ зі щільністю $1/(1+|u|^l)$, $u \in \mathbb{R}$, $l > 3$; та для довільного $p > 2$ й фіксованого $t \in [0,1]$ $y^\varepsilon(\cdot,t)$ є випадковим елементом у просторі $W_p^1(\mathbb{R}, \varkappa)$. З тих же міркувань, що й у теоремі 2, $\{y^\varepsilon\}$ задовольняє принцип великих відхилень в $\mathcal{Y}$ та в $W_p^1(\mathbb{R}, \varkappa)$ з тими ж функціями швидкості (2) та (3).

Далі припускаємо, що функція φ допускає зображення у вигляді згортки двох функцій з S: $\varphi = \psi_1 * \psi_2$. За такого припущення x_m^ε можна подати у вигляді

$$x_m^\varepsilon(u,t) = x_m^\varepsilon\left(u, \frac{k}{m}\right) + a\left(\frac{k}{m}, x_m^\varepsilon\left(u, \frac{k}{m}\right), \mu_{k/m}^{\varepsilon,m}\right)\left(t - \frac{k}{m}\right) +$$
$$+ \sqrt{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_1\left(x_m^\varepsilon\left(u, \frac{k}{m}\right) - q\right) \int\limits_{k/m}^t \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_2(q-p) W(dp, ds)\, dq,$$
$$t \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right], \qquad k = 0, \ldots, m-1.$$

Лема 2. *Нехай $\psi_1 \in S$. Для $f \in W_{pl}^1(\mathbb{R}, \varkappa)$ та $g \in L_2(\mathbb{R}, \nu)$, $p \geqslant 2$, визначимо*

$$F_p(f,g)(u) = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_1(f(u) - q) g(q)\, dq.$$

Тоді F_p є неперервним відображенням з простору $W_{pl}^1(\mathbb{R}, \varkappa) \times L_2(\mathbb{R}, \nu)$ у простір $W_p^1(\mathbb{R}, \varkappa)$.

Наслідок. *x_m^ε можна подати як образ y^ε при неперервному відображенні $\mathcal{Y}$ в $\mathfrak{X}$.*

Позначимо

$$\mathcal{A} = \Bigg\{ x \in \mathfrak{X} | \exists h \in L_2(\mathbb{R} \times [0,1]) \colon x(u,t) = u + \int_0^t a(s, x(u,s), \mu_s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - p) h(p,s)\, dpds, \mu_s = \mu_0 \circ (x(\cdot, s))^{-1} \Bigg\}.$$

Теорема 3. *Сімейство $\{x^\varepsilon\}$ задовольняє принцип великих відхилень в $\mathfrak{X}$ з функцією швидкості*

$$I(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \|h\|^2_{L_2(\mathbb{R} \times [0,1])}, & x \in \mathcal{A}, \\ \infty, & x \notin \mathcal{A}, \end{cases}$$

де $h \in L_2(\mathbb{R} \times [0,1])$ така, що

$$x(u,t) = u + \int_0^t a(s, x(u,s), \mu_s)\, ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s) - p) h(p,s)\, dpds.$$

Робота А. А. Дороговцева виконана за часткової фінансової підтримки Українсько-Російського гранту "Асимптотична поведінка стохастичних потоків", 2008 р.

Робота О. В. Остапенко виконана за часткової фінансової підтримки гранту GP/F26/0075.

1. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
2. *Dembo A., Zeitouni O.* Large deviations techniques and applications. – New York: Springer, 1998. – 408 p.

Інститут математики НАН України, Київ
НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 11.11.2008

A. A. Dorogovtsev, O. V. Ostapenko

Large deviations for stochastic flows with interaction

The article is devoted to the flow of interacting diffusion particles in $\mathbb{R}$. The large deviation principle for this flow is established.