УДК 539.375

Член-кореспондент НАН України **О. Є. Андрейків, Ю. В. Банахевич, М. Б. Кіт**

Циклічна міцність тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами

За допомогою сформульованої раніше авторами розрахункової моделі зростання втомних тріщин в конструкційних матеріалах розроблена методика для побудови діаграм граничних напруг для пластини з тріщинами при циклічних навантаженнях. Вона поставлена в основу методу розрахунку циклічної міцності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами. Одержані розрахункові результати зіставлені з відомими в літературі експериментальними даними.

Розрахунки на міцність елементів конструкцій під довготривалими циклічними навантаженнями відрізняються від таких на короткочасну міцність. Це пов'язано з тим, що міцність таких елементів має бути забезпечена не однократно, а протягом довготривалого заданого часу їх експлуатації. Втрата циклічної міцності таких елементів проходить внаслідок втомного руйнування матеріалу, тобто зародження і поширення втомних тріщин. В літературі відомі деякі такі дослідження на циклічну міцність елементів конструкцій, де здебільшого припускають без дефектність матеріалів і втомне руйнування в класичному розумінні цього явища [1–3].

Однак, оцінюючи циклічну міцність елементів конструкцій, потрібно враховувати і розвиток дефектів типу тріщин (див., наприклад, [4, 5]). Відома лише незначна кількість робіт на цю тему. В основному, це експериментальні дослідження, за результатами яких будують граничні діаграми циклічної міцності елементів конструкцій з тріщинами, тобто їх залишкової циклічної міцності (див., наприклад, [2, 6, 7]). У роботах [8–10] на основі першого закону термодинаміки сформульований енергетичний підхід для оцінки періоду докритичного росту втомних тріщин. У даній роботі цей підхід застосовано до формулювання методу розрахунку циклічної міцності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами.

Нескінченна пластина з довільно орієнтованою тріщиною. Для формулювання згаданого вище методу розглянемо спочатку допоміжну задачу про циклічну міцність нескінченної пластини з довільно орієнтованою прямолінійною тріщиною, матеріал якої ідеально пружно-пластичний з границею текучості σ_y. Нехай нескінченна ідеально пружно-пластична пластина з прямолінійною макротріщиною початкової довжини $2l_0$ розтягується на нескінченності у взаємно перпендикулярних напрямках під кутом α до лінії тріщини рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності p, q (рис. 1, *а*). Вважається, що ці зусилля змінюються циклічно за синусоїдальним законом синхронно з однаковою частотою (від нульового циклу). Задача полягає у визначенні таких амплітудних значень зусиль $p = p_*$ і $q = q_*$, при яких залишкова довговічність пластини не перевищить заданого значення кількості циклів навантаження $N = N_*$. Ця задача є обернена до задачі визначення $N_* = N_*(p_*, q_*)$, тому насамперед розглянемо пряму задачу.

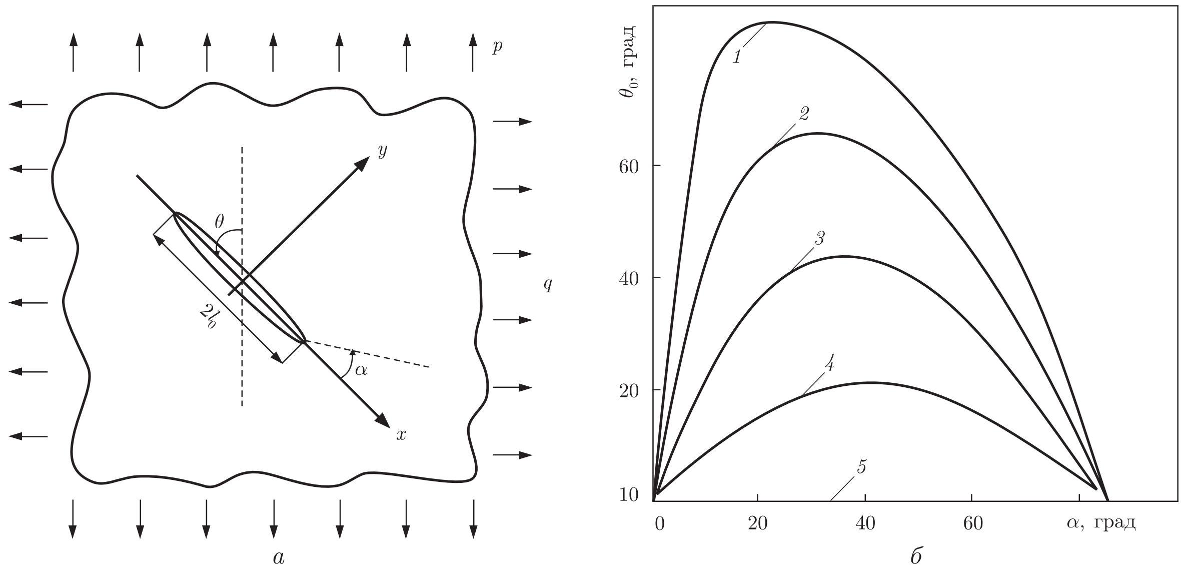

Рис. 1. Схема навантаження пластини з тріщиною (a) та залежність кута початкового її поширення θ_0 від кута початкової орієнтації α (*б*) ($\eta_0 = q/p$; *1* — $\eta_0 = 0{,}2$; *2* — 0,4; *3* — 0,6; *4* — 0,8; *5* — 1)

На основі сформульованого раніше [8–10] енергетичного підходу пряму задачу зведемо до розв'язання системи диференційних рівнянь

$$\frac{dl}{dN} = (\gamma_f - \gamma_t)^{-1} \mathrm{W}_{\text{пл}}^{(2)}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{(\gamma_f - \gamma_t)^{-1} \mathrm{W}_{\text{пл}}^{(2)}\} = 0 \tag{2}$$

із заданими початковими і кінцевими умовами

$$N = 0, \qquad l(0) = l_0; \qquad N = N_*, \qquad l(N_*) = l_*, \tag{3}$$

де критичну довжину тріщини l_* визначаємо із енергетичного критерію

$$\gamma_t(l_*) = \gamma_f. \tag{4}$$

Тут $W_{\text{пл}}^{(2)}$ — частина енергії пластичного деформування за один цикл, що генерується самим тілом під час стиску зон передруйнування за сталої довжини тріщини при знятті навантаження [8–10]; θ — кут напряму поширення тріщини; γ_f — питома енергія руйнування під час поширення втомної тріщини; γ_t — питома енергія пластичного деформування в зоні передруйнування біля вершини тріщини, яка залежить тільки від її довжини [11, 12]; $\gamma_t = \sigma_t \delta_{\mathrm{I}t}(0) + \tau_t \delta_{\mathrm{II}t}(0)$; N_* — період докритичного росту макротріщини; σ_t і τ_t — усереднені нормальні і дотичні напруження в зоні передруйнування; $\delta_{\mathrm{I}t}(0)$ і $\delta_{\mathrm{II}t}(0)$ — нормальний і дотичний розкриви вершини тріщини.

Використовуючи основні положення механіки руйнування [4, 5, 13, 14], запишемо такі допоміжні співвідношення між абсолютним розкривом у вершині тріщини δ і коефіцієнтами інтенсивності напружень K_{I} і K_{II}:

$$\delta = \sqrt{\delta_{\mathrm{I}t}^2 + \delta_{\mathrm{II}t}^2}, \qquad \delta = \frac{1}{E\sigma_y}\sqrt{(K_{\mathrm{I}\theta}^2 + K_{\mathrm{II}\theta}^2)(K_{\mathrm{I}\theta}^2 + 3K_{\mathrm{II}\theta}^2)}, \tag{5}$$

де

$$K_{\mathrm{I}\theta} = K_\mathrm{I} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_\mathrm{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \qquad K_{\mathrm{II}\theta} = K_\mathrm{I} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_\mathrm{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3\sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Для даного випадку [5]

$$K_\mathrm{I} = p\sqrt{\pi l}(\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha), \qquad K_\mathrm{II} = p\sqrt{\pi l}(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha, \qquad \eta_0 = \frac{q}{p}.$$

Для визначення кінетики росту тріщини знайдемо спочатку кут її початкового поширення $\theta = \theta_0$. Рівняння (2) в цьому випадку запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \frac{\partial W^{(2)}_{\text{пл}}(t, \theta)}{\partial t} (\gamma_f - \gamma_t(l, \theta))^{-1} \right\} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{6}$$

Можна показати, що

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \frac{\partial W^{(2)}_{\text{пл}}(t, \theta)}{\partial t} (\gamma_f - \gamma_t(l, \theta))^{-1} \right\} \neq 0. \tag{7}$$

Тоді (6) зведеться до рівняння

$$\frac{\partial \delta}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) розв'язуємо з урахуванням (5) чисельним шляхом для $\eta_0 = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8; 1. На рис. 1, *б* побудована графічна залежність $\theta_0 = \theta_0(\alpha)$ для вказаних η_0. Користуючись отриманою числовою залежністю $\theta_0 = \theta_0(\alpha)$ і формулою (5), побудуємо графічно зміну безрозмірної величини δ_* від α (рис. 2, *а*), де $\delta_* = \delta \sigma_y E \pi^{-1} l^{-1} p^{-2}$. Максимум δ_* досягається при $\alpha \approx \pi/2$, якщо $\eta_0 < 1$ і, аналогічно при $\alpha = 0$, якщо $\eta_0 > 1$ (див. рис. 2, *а*). Із рівняння (1) і результатів роботи [12] випливає, що це відповідає максимальній швидкості поширення тріщини $dl/dN = V_{\max}$. Отже, за орієнтації $\alpha = \pi/2$ для $\eta_0 < 1$ і $\alpha = 0$ для $\eta_0 > 1$ буде найнебезпечніша тріщина і найменша довговічність пластини. Знайдемо для цих випадків період докритичного росту тріщини $N = N_*$. Для такого симетричного випадку на основі результатів [8–10] систему рівнянь (1), (2) зведемо до одного рівняння

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha}{\sigma^2_{0f}} \frac{K^4_{\mathrm{I}\max}}{K^2_{fC} - K^2_{\mathrm{I}\max}} \tag{9}$$

за початкових і кінцевих умов

$$N = 0, \quad l(0) = l_0; \quad N = N_*, \quad l(N_*) = l_*; \quad l_* = \frac{K^2_{fC}}{\pi p^2} \quad (K_{\mathrm{I}\max} \gg K_{th}). \tag{10}$$

Тут α, σ_{0f}, K_{fC}, K_{th} — характеристики циклічної тріщиностійкості матеріалів [9–11]; $K_{\mathrm{I}\max}$ — максимальне значення K_I за цикл, а усереднене напруження σ_{0f} в зоні передруйнування шукаємо на основі умови пластичності Губера–Мізеса [4] для двовісного навантаження. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} &\sigma_{0f} = \sigma_y\Big(-0{,}5\xi_1 + 0{,}5\sqrt{4 - 3\xi_1^2}\Big) \qquad \Big(\alpha = \frac{\pi}{2},\ \eta_0 < 1,\ \xi_1 = q\sigma_y^{-1}\Big); \\ &\sigma_{0f} = \sigma_y\Big(-0{,}5\xi_2 + 0{,}5\sqrt{4 - 3\xi_2^2}\Big) \qquad (\alpha = 0,\ \eta_0 > 1,\ \xi_2 = p\sigma_y^{-1}). \end{aligned} \tag{11}$$

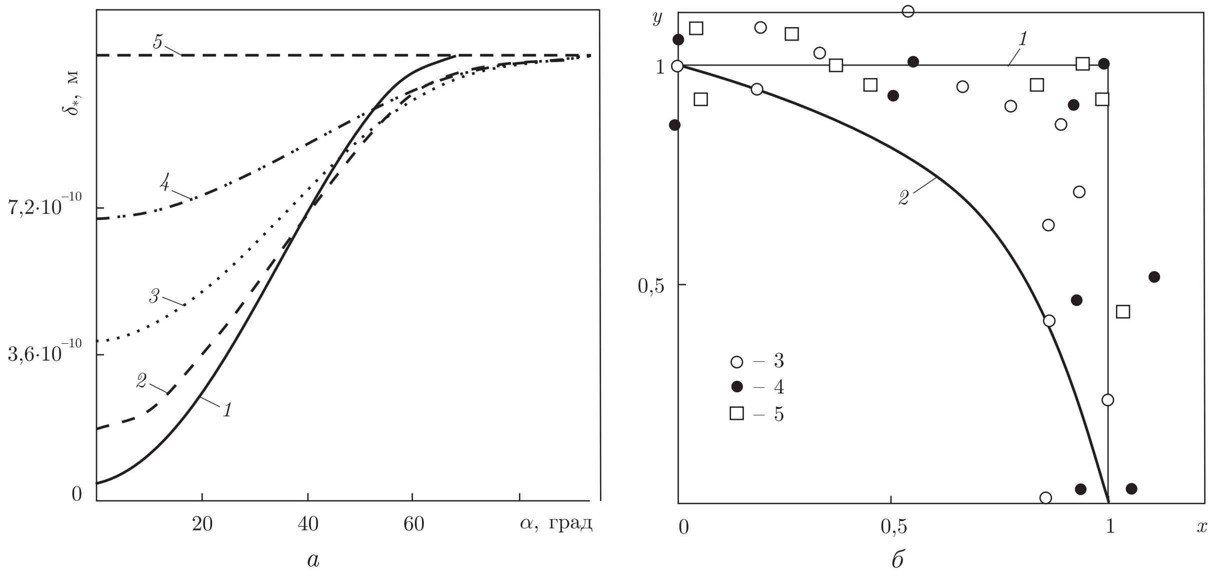

Рис. 2. Залежність розкриву у вершині тріщини δ_* від α і η_0 (a) при $\theta = \theta_0$ (*1* — $\eta_0 = 0{,}2$; *2* — $\eta_0 = 0{,}4$; *3* — $\eta_0 = 0{,}6$; *4* — $\eta_0 = 0{,}8$; *5* — $\eta_0 = 1$) та діаграма граничних циклічних навантажень ($б$) для пластини з втомною тріщиною: *1* — співвідношення (19); *2* — (20); експерименти [15] для одноциклового навантаження чавунних зразків для різних станів (*3* — $\sigma_2 = 345{,}30$; *4* — $\sigma_2 = 185{,}40$; *5* — $\sigma_2 = 228{,}60$)

Проінтегрувавши рівняння (9) за початкових і кінцевих умов (10), отримаємо:

$$N_* = \frac{\sigma_{0f}^2}{\alpha\pi F^2}\left(l_* l_0^{-1} - 1 - \ln\frac{l_*}{l_0}\right), \qquad F = \begin{cases} p, & \alpha = \dfrac{\pi}{2}, \quad \eta_0 < 1; \\ q, & \alpha = 0, \quad \eta_0 > 1. \end{cases} \tag{12}$$

Вважаючи, що $l_* \gg l_0$, формулу (12) можна наближено подати так:

$$N_* \approx \frac{\sigma_{0f}^2 K_{fC}^2}{\alpha\pi^2 l_0 F^4}. \tag{13}$$

Розглянемо тепер допоміжну задачу для пластини, що розтягується перпендикулярно до тріщини завдовжки $2l_0$ тільки такими зусиллями F_0, за яких довговічність така ж, як і за двовісного розтягу. Аналогічно рівнянню (13), для цього випадку можна записати:

$$N_* \approx \frac{\sigma_y^2 K_{fC}^2}{\alpha\pi^2 l_0 F_0^4}. \tag{14}$$

Звідси

$$F_0 = \sqrt[4]{\frac{\sigma_y^2 K_{fC}^2}{\alpha\pi^2 l_0 N_*}}. \tag{15}$$

Прирівнюючи співвідношення (13) і (14), отримаємо:

$$F^2 F_0^{-2} = -0{,}5\xi_i + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\xi_i^2} \qquad (i = 1, 2). \tag{16}$$

Враховуючи вирази для F і F_0 у співвідношеннях (12) і (14), з рівняння (16) запишемо формули для визначення критичних значень p_*, q_*:

$$p_* = p_0\Phi[\xi_1], \qquad \eta_0 < 1; \qquad q_* = q_0\Phi[\xi_2], \qquad \eta_0 > 1, \tag{17}$$

де

$$\eta_0 = q_* p_*^{-1}; \qquad \Phi[\xi_i] = \left[-0{,}5\xi_i + \sqrt{1 - 0{,}25\xi_i^2}\,\right]^{1/2}; \qquad i = 1, 2;$$

$$\xi_1 = q_*\sigma_y^{-1}; \qquad \xi_2 = p_*\sigma_y^{-1}.$$

Замінимо в (17) $x = pp_0^{-1}$, $y = qq_0^{-1}$, $\xi_{01} = q_0\sigma_y^{-1}$, $\xi_{02} = p_0\sigma_y^{-1}$. Тоді

$$x^2 = -0{,}5y\xi_{01} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}y^2\xi_{01}^2} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ \eta_0 < 1\right),$$

$$y^2 = -0{,}5x\xi_{02} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2\xi_{02}^2} \qquad (\alpha = 0,\ \eta_0 > 1).$$

Граничними випадками цих рівнянь будуть рівняння при $\xi_{01} = \xi_{02} = 0$ і $\xi_{01} = \xi_{02} = 1$. Тоді отримаємо:

для $\xi_{01} = \xi_{02} = 0$

$$x = 1 \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ \eta_0 < 1\right), \qquad y = 1 \qquad (\alpha = 0,\ \eta_0 > 1), \tag{18}$$

а для $\xi_{01} = \xi_{02} = 1$

$$\begin{aligned} x^2 &= -0{,}5y + \sqrt{1 - \frac{3}{4}y^2} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ \eta_0 < 1\right), \\ y^2 &= -0{,}5x + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2} \qquad (\alpha = 0,\ \eta_0 > 1). \end{aligned} \tag{19}$$

На основі залежностей (18) (рис. 2, *б*, крива *1*) і (19) (рис. 2, *б*, крива *2*) побудовані діаграми граничних навантажень для пластини з тріщиною. Ці криві і обмежують область безрозмірних значень $p = p_*$ і $q = q_*$, при яких буде забезпечений залишковий ресурс пластини $N = N_*$. Тут також наведено експериментальні результати циклічної міцності трубчастих чавунних зразків за двовісного розтягу при одноцикловому навантаженні [15]. Як видно з цього рисунка, експериментальні дані добре узгоджуються з розробленою тут теорією. Побудовану (див. рис. 2, *б*) діаграму граничних навантажень для пластин з тріщинами можна покласти в основу розрахунку циклічної міцності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами.

Формулювання критерію циклічної міцності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами. Розглянемо тонкостінний елемент конструкції, виготовлений з квазікрихкого матеріалу. Лінійні параметри b_i характеризують конфігурацію елемента, а p — силовий параметр амплітуди циклічного навантаження.

Методами дефектоскопії не виявлено в елементі дефектів типу тріщин, більших за $2l_0$, що набагато менше від його розмірів. Визначимо найбільше значення силового параметра

$p = p_*$ навантаження, за якого упродовж кількості циклів $N = N_*$ катастрофічного руйнування елемента конструкції не відбудеться.

Аналогічно [14] припускаємо, що в околі D найнапруженішої точки O елемента розташована небезпечна тріщина з характерним розміром $2l_0$. Вважаємо, що розмір околу D набагато більший за $2l_0$ і в ньому діють рівномірно розподілені головні напруження $\sigma_1(p)$ і $\sigma_2(p)$. З введенням такої неточності запас міцності розглядуваного елемента збільшиться і стане можливим для знаходження гранично-рівноважного стану околу застосувати вище наведену задачу для пластини з тріщиною. На основі цього, а також співвідношень (17) для визначення критичних головних напружень σ_{1*}, σ_{2*} отримаємо формули

$$\begin{gathered} \sigma_{1*} - F_{0*}\left[-0{,}5\xi_i + \sqrt{1 - 0{,}25\xi_i^2}\,\right]^{1/2} = 0; \\ \sigma_{2*} = \eta_0\sigma_{1*}, \qquad \xi_i = \begin{cases} \sigma_{2*}\sigma_y^{-1}, & \eta_0 < 1; \\ \sigma_{1*}\sigma_y^{-1}, & \eta_0 > 1, \end{cases} \end{gathered} \tag{20}$$

що є рівнянням діаграми граничних напружень у системі декартових координат $O\sigma_{1*}\sigma_{2*}$. Діаграма, яку описує (20), обмежує область значень головних напружень σ_1, σ_2, безпечних відносно міцності елемента конструкції, що містить дефекти такого типу. Враховуючи це, а також користуючись співвідношенням (20), одержимо таку умову циклічної міцності квазікрихких тіл:

$$\sigma_{1*} - F_{0*}\left[-0{,}5\xi_i + \sqrt{1 - 0{,}25\xi_i^2}\,\right]^{1/2} < 0 \qquad (\sigma_1 > 0), \tag{21}$$

де ξ_i, η_0 визначені у співвідношеннях (20).

Таким чином, співвідношення (15), (17), (20) і (21) за наявності l_0, N_*, а також знайдених з експерименту K_{fC}, σ_y і дають розв'язок поставленої задачі для оцінки циклічної міцності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами.

1. *Трощенко В. Т.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1981. – 344 с.
2. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 415 с.
3. *Handbook* of fatigue crack propagation in metallic structures / Edited by A. Carpinteri. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – Vol. 1. – 952 p.
4. *Панасюк В. В., Андрейкив О. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
5. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
6. *Форрест П.* Усталость металлов: Пер. с англ. / Под ред. С. В. Серенсена. – Москва: Машиностроение, 1968. – 352 с.
7. *Хейвуд Р. Б.* Проектирование с учетом усталости / Под ред. И. Ф. Образцова. – Москва: Машиностроение, 1969. – 504 с.
8. *Andreikiv O. Ye., Ivanytskyi Ya. L., Terletska Z. O., Kit M. B.* Assessment of the life of a oil pipe with a surface crack under biaxial block loading // Materials Science. – 2004. – No 3.
9. *Андрейків О. Є., Кіт М. Б., Сас Н. Б.* Енергетичні критерії в механіці заповільненого руйнування матеріалів // Збірник тез доповідей 7-го Міжнар. симп. укр. інженерів-механіків у Львові. – Львів, 18–20 травня 2005 р. – С. 4–5.
10. *Андрейків О. Є., Кіт М. Б.* Визначення періоду докритичного росту тріщин в елементах конструкцій при їх двочастотному навантаженні // Машинознавство. – 2006. – № 2. – С. 3–7.
11. *Шата М., Терлецька З. О.* Енергетичний підхід у механіці втомного поширення макротріщини // Механіка руйнування і міцність конструкцій / Під. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 141–148.

12. *Андрейків О. Є., Ліщинська М. В.* Рівняння росту втомних тріщин в неоднорідних пластинах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 3. – С. 53–58.
13. *Андрейкив А. Е., Дарчук А. И.* Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 184 с.
14. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
15. *Cornet J., Crassi R. C.* Theories of fracture under combined stresses // Trans. ASME. Ser. D. – 1961. – **83**, No 1. – P. 39–44.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 03.11.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **O. Ye. Andreikiv,**
Yu. V. Banakhevych, M. B. Kit

Cyclic durability of the thin-walled elements of constructions

Using the calculation model earlier formulated by the authors for the fatigue cracks growth in construction of materials, a method for construction of a diagram of limit stresses for a plate with cracks at cyclic loadings has been developed. On this basis, a method for cyclic strength calculation of thin-walled structural elements with cracks is presented. The obtained theoretical results are compared with the known experimental data.