ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2009

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 550.34.013:514.82

А. С. Костинский

Концепция ассоциированного пространства и геометрическое конструирование кинематических моделей

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

У рамках підходу до опису осередку землетрусу с позицій механіки збудливих середовищ досліджується зіставлений "квазідинамічній" моделі абстрактний асоційований простір, мінливий поза часом як послідовність геометричних образів. Побудовано аксіоматику оптимальної еволюції та показано, що принцип максимальної простоти визначає метрику як розв'язок рівнянь Ейнштейна з космологічної постійної.

Одна из общих проблем, встречающихся при исследовании законов живой и неживой природы, есть формирование языка, необходимого для описания динамики коллективного взаимодействия в сложных распределенных открытых системах, далеких от термодинамического равновесия. Очаг землетрясения несомненно — одна из таких систем, но каркас понятий и образов, связанных с сейсмическими явлениями, в основе своей сохраняет "материнские гены" полевой геологии. Ключевая в кинематике землетрясений связь [1]

$$U_i(\vec{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint\limits_{\Sigma} [U_j(\xi,\tau)] c_{jkpq} G_{ip,q}(\vec{r},t;\vec{\xi},\tau)\nu_k d\Sigma(\xi) \tag{1}$$

была предопределена: "архетип" сейсмических катастроф с самого начала устанавливал, что нужно искать, если ограничить описание рамками линейной упругости. Для смещения в дальней зоне выражение

$$U_i(\vec{r},t) = \frac{\gamma_i\gamma_p\gamma_q\nu_k}{4\pi\rho\alpha^3} \iint\limits_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi}-\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t}\left[U_j\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi}-\vec{r}|}{\alpha}\right)\right] d\Sigma(\xi) +$$
$$+ \frac{(\delta_{ip}-\gamma_i\gamma_p)\gamma_q\nu_k}{4\pi\rho\beta^3} \iint\limits_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi}-\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t}\left[U_j\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi}-\vec{r}|}{\beta}\right)\right] d\Sigma(\xi), \tag{2}$$

чисто математически следующее из (1), выглядит, применительно к описанию очага, как правило, определяющее значение измеряемого вектора U_i. Правило есть линейный оператор, действующий на функцию $[U_j(\ldots)]$, и если размеры площадки малы, можно полагать, что

$$\iint\limits_{\Sigma} (\ldots)\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{U}(\ldots)]d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} (\ldots)\left(\overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t)}\cdot|[\mathbf{U}(\ldots)]| + \overline{\mathbf{n}(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}|[\mathbf{U}(\ldots)]|\right)d\Sigma,$$

где единичный вектор направления $\mathbf{n}(t)$ и его производная по времени вычисляются в некоторой средней точке площадки. Характеристика системы при этих предположениях, следовательно, есть векторное поле

$$\vec{\Omega}(\vec{\xi},t) = \overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t)}\cdot|[\mathbf{U}(\vec{\xi},t)]| + \overline{\mathbf{n}(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}|[\mathbf{U}(\vec{\xi},t)]|, \qquad \vec{\xi}\in\Sigma,$$

и для логики традиционного кинематического конструирования это была отправная точка, а путь определялся уверенностью, что для $|\vec{\Omega}(\ldots)|$ можно найти "земной" математический образ. Отсюда плоскость разрыва, распространяющаяся трещина сдвига и "нефизическое" решение самоподобной задачи [2]

$$|\vec{\Omega}| \equiv \Delta U^s(\rho,t) = Kv\sqrt{t^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^2}H\left(t-\frac{\rho}{v}\right), \qquad K = \mathrm{const}, \tag{3}$$

бесконечно возрастающее со временем. Тупик хаотических попыток [3–5] "усовершенствовать" зависимость (3), быть может, можно преодолеть, если, следуя урокам квантовой механики, совершить мысленный переход в неньютоновский, релятивистский физический мир, где под очевидностью понимается согласованность постулатов, а основные законы уже не управляют непосредственно миром наших наглядных представлений. Все же некоторая физическая конструкция, определенная с максимальной степенью абстракции, должна занять место "бестелесного" скачка смещения на разрыве как модели. Требуется, в общем, только способность тонкого слоя вещества генерировать и распространять возбуждение, т. е. состояние, дополнительное по отношению к основному состоянию. Это взгляд на явление как на эволюцию возбудимой среды [6], но, согласившись столь радикально изменить язык описания процесса в очаге, мы вынуждены будем по-новому взглянуть на всю схему кинематического конструирования (рис. 1).

Как следует из публикации [7], существуют внутренние ресурсы, свойства решения (3), позволяющие, исходя только из этих свойств, оптимальным образом перейти от (3) к решениям, более физически приемлемым (ограниченным во времени). Наша цель — "разумное" выражение для $\vec{\Omega}(\vec{\xi},t)$, оно возникнет как результат смены состояний, последовательного изменения геометрии некоторого сопряженного физическому процессу абстрактного ("ассоциированного") пространства. В центре, как и в [7], "математическая тень" решения (3) — функция

$$f(t,x,y) = \sqrt{(vt)^2 - x^2 - y^2}$$

и "квазилоренцево" преобразование аргументов

$$t,x,y \to t',x',y', \tag{4}$$

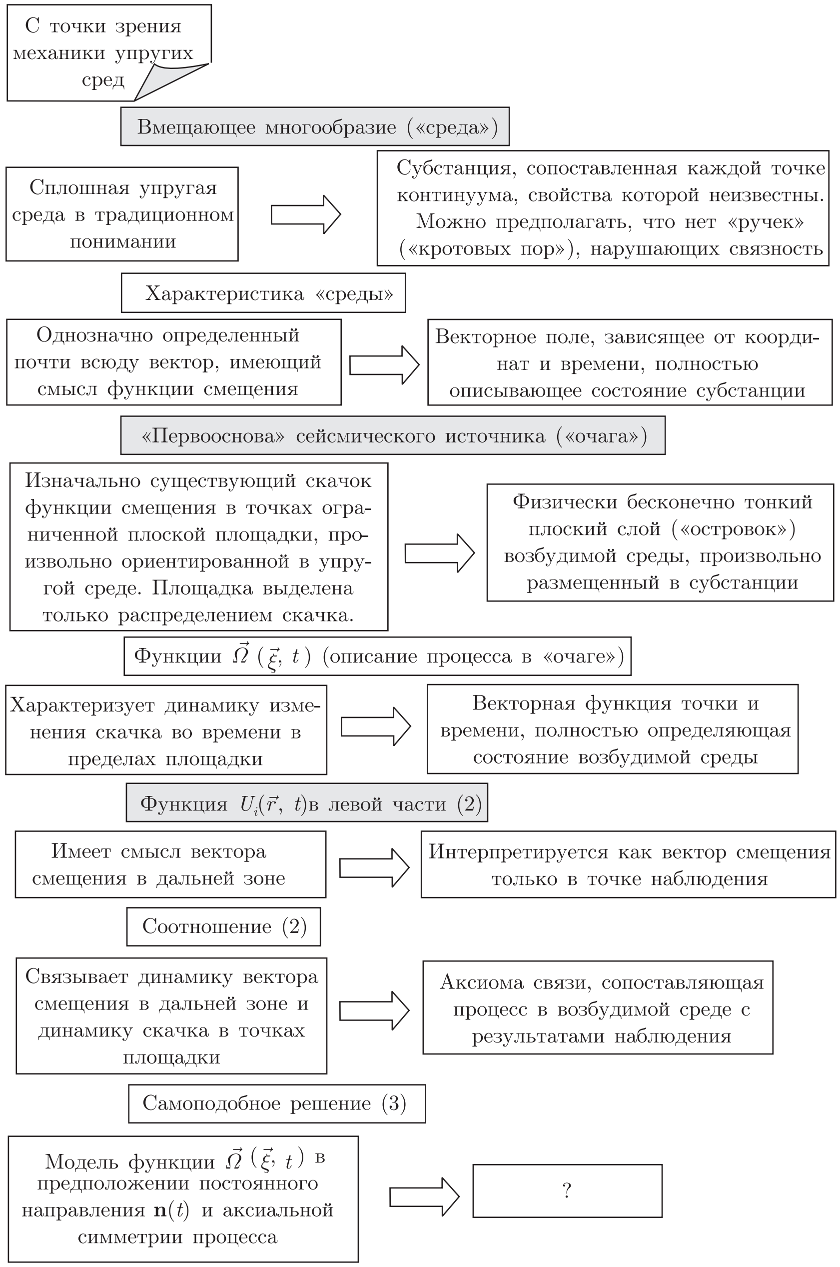

Рис. 1. Кинематика сейсмического источника: изменение точки зрения

определяемое произвольными параметрами u_1, u_2, ω. Параметр ω (угол) входит в выражение для оператора чисто пространственного вращения $\Re$, вектор $\vec{u}$ не имеет, конечно, смысла относительной скорости систем отсчета. Ясно (по аналогии), что множество преобразований (4) для всевозможных ω, $\vec{u}$, $-\infty < u_1,\, u_2 < \infty$, образует группу. Возникает соблазн, следуя логике Пуанкаре и Минковского, построить некоторое абстрактное пространство Λ, характер метрики которого был бы связан с инвариантными свойствами f.

Пусть Λ — трехмерное аффинное пространство, возникающее с помощью обычной аксиоматики как множество элементов типа "точка" или "вектор". Выберем в Λ некоторый репер (начало O$+$ три линейно независимых вектора $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, отложенных из O). Тем самым оказываются определены координаты x^0, x^1, x^2 всех точек (как координаты соответствующих радиус-векторов). Линейное пространство Λ сколь угодно протяженно во всех трех измерениях, $-\infty < x^0$, x^1, $x^2 < \infty$, для любой тройки вещественных чисел найдется точка Λ, координаты которой равны этим числам. Поэтому любое событие на "плоскости событий" отображается в точку Λ, в том числе события "ничего не происходит" для сколь угодно больших x, y, $x^0 = vt$, $x^1 = x$, $x^2 = y$. Метрики пока нет, связь координат

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0 \tag{5}$$

("световой конус") описывает в произвольном репере геометрическое место точек независимо от метрики.

Пусть некоторая тройка параметров u_1, u_2, ω определяет преобразование к новым переменным по формулам (4). Эти же параметры "синхронно" порождают преобразование ортов и координат

$$\begin{gathered}\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \to \vec{e}_{0'}, \vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \qquad x^0, x^1, x^2 \to x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, \\ x^{i'} = \Lambda_i(x^0, x^1, x^2), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\end{gathered} \tag{6}$$

которое (с точки зрения "alias") можно трактовать как переход к новому описанию пространства Λ. Если появляется квадрат длины вектора

$$\begin{gathered}\vec{r} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2, \\ |\vec{r}|^2 = g_{ij}x^i x^j, \qquad g_{ij} = (\vec{e}_i\vec{e}_j), \qquad i, j = 0,\ 1,\ 2,\end{gathered} \tag{7}$$

то естественно рассматривать ортонормированные реперы, дающие наиболее простое, "экономное", описание, и вопрос только в числе положительных квадратов приведенной квадратичной формы (7). Псевдоортогональные преобразования (6) для всевозможных троек u_1, u_2, ω оставляют инвариантной функцию

$$s(x^0, x^1, x^2) = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}, \qquad s(x^0, x^1, x^2) = s(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'})$$

и образуют группу. Логично считать s длиной радиуса-вектора с координатами x^0, x^1, x^2, нормировать репер так, что $|\vec{e}_0|^2 = 1$, $|\vec{e}_1|^2 = -1$, $|\vec{e}_2|^2 = -1$, и, таким образом, мир Λ приобретает геометрию псевдоевклидова пространства индекса 1.

Здесь приходится отклониться от "архитектурного проекта" Минковского, расстояние между точками Λ не имеет прототипа в физическом мире, неизменного в разных системах отсчета. "Нефизическая" группа (4) порождает группу (6), сохраняющую определенный инвариант, существующий только в пространстве Λ, и это означает принципиально иной характер связи с реальностью. Можно выделить некоторые "ключевые реальности" плоского релятивистского мира, мира материальных точек и световых лучей. Это система отсчета, преобразование системы отсчета, интервал. Каждой из них соответствует одна и только одна "узловая" конструкция (3 ± 1)-мерного пространства-времени: ортонормированный репер, ортогональное преобразование, метрика. Но ситуация с Λ не есть подобное "отражение в математическом зеркале". Разные системы отсчета, с точки зрения которых можно рассматривать процесс (3), не имеют никакого отношения к координатным системам в Λ. Преобразование систем отсчета по формулам Лоренца не играет роли при конструировании Λ, так как сохраняет не f, а истинный (физический) интервал. Сама собой напрашивается мысль о том, что “ассоциированное” пространство Λ, приобретая метрику, переходит в *новое состояние*. Иначе говоря, есть смысл несколько изменить терминологию. Именно, аффинную геометрию без метрических свойств теперь следует рассматривать как состояние первоначальное, или состояние A, мысленного мира Λ, меняющегося, но вне пространства и времени, как последовательность образов. “Образ” означает геометрическую “картинку”, появление метрики добавляет новую “краску”. Это состояние B, и замысел заключается в том, чтобы продолжить эволюцию Λ, перейдя к состоянию C, геометрия Λ_C должна “подсказать” корректировку функции $f(t,x,y)$.

Фактически, устанавливая (“угадывая”) механизм эволюции от B к C, приходится руководствоваться “принципом максимальной простоты” [6]. Из всех геометрических конструкций, более сложных, чем Λ_B, конструкция Λ_C должна быть наиболее простой, в некотором смысле ближайшей к Λ_B. Как вариант, Λ_C — многообразие постоянной положительной кривизны, в котором вещественная длина “времениподобной” геодезической, исходящей из начала координат, не больше определенного предела [7]. Сформулируем более строго, чем это сделано в [7], основные предположения, позволяющие определить Λ_C:

1^0. Пространство Λ_C — псевдориманово с сигнатурой метрики $(+--)$.

2^0. Пространство Λ_C аксиально симметрично, т. е. существует глобальная система координат x^0, $x^1=\rho$, $x^2=\phi$, для которой коэффициенты метрического тензора не зависят от ϕ, а интервал не меняется, если ϕ заменить на $-\phi$ [8]. Следовательно, в этой системе

$$dS^2 = g_{00}(x^0,\rho)(dx^0)^2 + 2g_{01}(x^0,\rho)dx^0d\rho + g_{11}(x^0,\rho)d\rho^2 + g_{22}(x^0,\rho)\rho^2d\phi^2,$$

и в силу теоремы Римана координаты x^0, ρ можно выбрать так, чтобы обратить в нуль g_{01} и уравнять g_{11} с g_{22}:

$$dS^2 = e^{2\lambda}(dx^0)^2 - e^{2\mu}(d\rho^2+\rho^2d\phi^2), \qquad \lambda,\mu = \lambda,\mu(x^0,\rho).$$

3^0. Уравнения для метрики пространства Λ_C должны содержать производные от “потенциалов” λ, μ не выше второго порядка.

4^0. Существует интеграл действия S с трансформационными свойствами 3-скаляра относительно общих преобразований координат

$$x'^i = \zeta^i(x^0,x^1,x^2), \qquad i=0,\,1,\,2,$$

представимый в виде

$$S = \int G\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2, \qquad G = G(g_{ij},\Gamma^k_{lm}),$$

геометрия пространства Λ_C следует из условия обращения в нуль первой вариации S по коэффициентам метрического тензора.

Требование 3^0 единственным образом определяет величину G [9]. Поскольку

$$\delta\int G\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2 = \delta\int(R+2\kappa)\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2,$$

где R — скалярная кривизна, $\kappa=\mathrm{const}$ — “космологическая постоянная”, Λ_C есть пространство Эйнштейна,

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa g_{ik}, \qquad i,k=0,\,1,\,2. \tag{8}$$

Здесь уместно остановиться и подвести некоторые промежуточные итоги. Основная, помимо осознанного выстраивания цепочки состояний Λ, цель настоящего сообщения — показать возможность непротиворечивым образом вписать в эту цепочку логику уравнений. Первая пробная попытка геометрического конструирования [7] означала "ручной режим", интуитивную эмпирику, и в этом смысле была уникальной, резко индивидуальной. Как результат, возникла новая "изолированная точка" в мире моделей, как и для [3–5], невозможно представить ее окрестность. Хотя тем самым демонстрируется корректность подхода (т. е. принципиальная осуществимость полного описания изменившегося ассоциированного пространства), все же человек должен быть в максимальной степени исключен из процесса принятия решений. Экстремальный принцип, "в автоматическом режиме" порождающий множество вариантов геометрии и, как следствие, поле моделей, представляет поэтому следующий логически оправданный шаг. Для выбора единственного варианта Λ_C в данной ситуации нет другого ориентира, кроме того же "принципа максимальной простоты". Опыт теории гравитации поможет лишь отчасти и разумно, даже сведя определение геометрии Λ_C к стандартной задаче исследования пространств Эйнштейна, рассмотреть решения системы (8) как отдельный этап.

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 2. – Москва: Мир, 1983. – 360 с. – [Пер. с англ.].
2. *Burridge R., Willis J.* The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // Proc. Cambr. Philosoph. Soc. – 1969. – **66**. – P. 443–468.
3. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear crack // J. Phys. Earth. – 1973. – **21**. – P. 415–431.
4. *Dahlen F. A.* On the ratio of P-wave to S-wave corner frequences for shallow earthquake sources // Bull. Seismol. Soc. Amer. – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
5. *Boatwright J.* Quasi-dynamic models of simple earthquakes: application to an aftershock of the Oroville, California, earthquake // Ibid. – 1981. – **71**. – P. 69–94.
6. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. – Москва: Наука, 1984. – 304 с.
7. *Костинский А. С.* Очаг землетрясения как возбудимая среда: простейший пример оптимального конструирования // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 87–94.
8. *Синг Дж.* Общая теория относительности. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 429 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – Москва: Наука, 1973. – 504 с.

Отдел сейсмологии Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь

Поступило в редакцию 15.10.2008

A. S. Kostinsky

The associated space conception and the geometric design of kinematic models

In the context of an approach to the description of an earthquake focus from the positions of excitable medium mechanics, the abstract associated space related to a "quasidynamic" model and varying out of time as a chain of geometric images is studied. The optimal evolution axiomatics is built up, and it is shown that the "maximal simplicity principle" determines the metric as a solution of the Einstein equations including the cosmological constant.