ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2007

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Е. В. Алтухов, академик НАН Украины **В. П. Шевченко**

Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транстропных термоупругих пластинах

Boundary-value problems of connected thermoelasticity for transtropic plates under various mechanical and thermal conditions given on their flat edges are investigated by the method of homogeneous solutions.

Для решения трехмерных краевых задач теории упругости одним из эффективных является метод однородных решений. В данной работе получены однородные решения уравнений связанной термоупругости для транстропных пластин, на плоских гранях которых заданы различные однородные механические и тепловые граничные условия.

Постановка задачи. Построение однородных решений после исключения временного множителя $\exp(-i\omega t)$ сводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{aligned} & s_0^{-2}\partial_3^2 u_j+(\lambda^2 D^2+\omega_1^2)u_j+\lambda^2\mu_1\partial_j(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2)+\lambda\mu_3\partial_j\partial_3 u_3 = 2\lambda^2\beta_1\partial_j u_4 \quad (j=1,2),\\ & \mu_2\partial_3^2 u_3+(\lambda^2 D^2+\omega_1^2)u_3+\lambda\mu_3\partial_3(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2) = 2\lambda\beta_3\partial_3 u_4,\\ & \lambda_0^2\partial_3^2 u_4+(\lambda^2 D^2+i\omega_2)u_4+2i\omega_3(\beta_1(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2)+\lambda^{-1}\beta_3\partial_3 u_3) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

при одном из механических краевых условий на плоских гранях пластины

$$u_j(x_1,x_2,\pm 1) = 0 \qquad (j=1,2,3), \tag{2}$$

$$\sigma_{j3}(x_1,x_2,\pm 1) = 0, \tag{3}$$

$$u_3(x_1,x_2,\pm 1) = 0, \qquad \sigma_{i3}(x_1),x_2,\pm 1) = 0 \qquad (i=1,2), \tag{4}$$

$$\sigma_{33}(x_1,x_2,\pm 1) = 0, \qquad u_i(x_1,x_2,\pm 1) = 0 \tag{5}$$

и тепловых

$$u_4(x_1,x_2,\pm 1) = 0 \tag{6}$$

или

$$\partial_3 u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \qquad (7)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{\widetilde{x}_1}{R}, \qquad x_2 = \frac{\widetilde{x}_2}{R}, \qquad x_3 = \frac{\lambda^{-1}\widetilde{x}_3}{R}, \qquad \lambda = \frac{h}{r}, \qquad u_i = \frac{\widetilde{u}_i}{R} \qquad (i = \overline{1,3}),$$

$$u_4 = \alpha_1(T - T_0), \qquad \sigma_{ij} = \frac{\widetilde{\sigma}_{ij}}{2G_1}, \qquad G_1 = \widetilde{A}_{66}, \qquad A_{ij} = \frac{\widetilde{A}_{ij}}{2G_1},$$

$$A_{11} = \mu_0^{-1}(1 - \nu_2\nu_3), \qquad A_{12} = \mu_0^{-1}(\nu_1 + \nu_2\nu_3), \qquad A_{13} = \mu_1\nu_3, \qquad A_{33} = \frac{\mu_2}{2},$$

$$A_{44} = \frac{s_0^{-2}}{2}, \qquad A_{66} = \frac{1}{2}, \qquad s_0^{-2} = \frac{G_3}{G_1}, \qquad \mu_0 = 1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3, \qquad \mu_1 = \mu_0^{-1}(1 + \nu_1),$$

$$\mu_2 = 2\mu_1(1 - \nu_1)\nu_2^{-1}\nu_3, \qquad \mu_3 = 2\mu_1\nu_3 + s_0^{-2}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu_3 E_1}{E_3}, \qquad \beta_1 = \mu_1(1 + \nu_3\alpha_0),$$

$$\beta_3 = \mu_1\nu_3(2 + (1 - \nu_1)\nu_2^{-1}\alpha_0), \qquad \alpha_0 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \qquad \lambda_0^2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \qquad \omega_1^2 = h^2\rho G_1^{-1}\omega^2,$$

$$\omega_2 = h^2 c_v \omega, \qquad \omega_3 = T_0\alpha_1^2 G_1 h^2 \lambda_1^{-1}\omega, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

символом “$\sim$” обозначены размерные величины: $\widetilde{A}_{ij}$, A_{ij} — компоненты тензора упругой жесткости транстропного тела; T_0 — температура тела в ненапряженном состоянии; $T(x_1, x_2, x_3)$ — абсолютная температура точек тела; ω — круговая частота; $2h$ — толщина пластины; R — характерный радиус пластины; ρ — плотность; α_1, α_3 — температурные коэффициенты линейного расширения; λ_1, λ_3 — коэффициенты теплопроводности; C_v — объемная теплоемкость; E_1, E_3 — модули Юнга; G_1, G_3 — модули сдвига; ν_1, ν_3 — коэффициенты Пуассона.

Построение однородных решений. С учетом свойств векторного поля и в соответствии с полуобратным методом И. И. Воровича [4] амплитудные значения вектора перемещений и температуры представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i\text{в}}(x_1, x_2, x_3) + u_{in}(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = \overline{1,4}).$$

Вихревое решение

$$u_{1\text{в}} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3)\partial_2 B_k(x_1, x_2), \qquad u_{2\text{п}} = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3)\partial_1 B_k,$$

$$u_{3\text{в}} = u_{4\text{в}} = 0, \qquad \lambda^2 D^2 B_k = (\delta_k^2 - \omega_1^2)B_k,$$

соответствующее граничным условиям (2)–(5), совпадает с полученным в работах [1–3].

Потенциальное решение найдем, исходя из представлений

$$\begin{aligned} &u_{1\text{п}} = n(x_3)\partial_1 C(x_1, x_2), \qquad u_{2\text{п}} = n(x_3)\partial_2 C(x_1, x_2), \\ &u_{3\text{п}} = q(x_3)C(x_1, x_2), \qquad u_{4\text{п}} = \lambda^{-2} t(x_3)C(x_1, x_2). \end{aligned} \qquad (8)$$

Тогда из системы уравнений (1) с учетом выражений (8) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ является метагармонической

$$\lambda^2 D^2 C - \gamma^2 C = 0,$$

а неизвестные функции n, q, t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&s_0^{-2} n'' + (\gamma^2(1+\mu_1) + \omega_1^2) n + \lambda\mu_3 q' - 2\beta_1 t = 0,\\
&\mu_2 q'' + (\gamma^2 s_0^{-2} + \omega_1^2) q + \lambda^{-1}\mu_3\gamma^2 n' - 2\lambda^{-1}\beta^3 t' = 0,\\
&\lambda_0^2 t'' + (\gamma^2 + i\omega_2) t + 2i\omega_3\beta_1\gamma^2 n + 2i\omega_3\lambda\beta_3 q' = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где γ — параметр разделения переменных.

Характеристическое уравнение системы (9) имеет вид

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0, \tag{10}$$

в котором

$$\begin{aligned}
&a_1 = \lambda_0^2 s_0^{-2}\mu_2;\\
&a_2 = \gamma^2[s_0^{-2}\mu_2 + \lambda_0^2(s_0^{-4} + (1+\mu_1)\mu_2 - \mu_3^2)] + \omega_1^2\lambda_0^2(s_0^{-2} + \mu_2) + i s_0^{-2}(\omega_2\mu_2 + 4\omega_3\beta_3^2);\\
&a_3 = \gamma^4[s_0^{-4} + (1+\mu_1)(\mu_2 + s_0^{-2}\lambda_0^2) - \mu_3^2] + \gamma^2[\omega_1^2(s_0^{-2} + \mu_2 + \lambda_0^2(1+\mu_1+s_0^{-2})) +\\
&\qquad + i(\omega_2(s_0^{-4} + (1+\mu_1)\mu_2 - \mu_3^2) + 4\omega_3(\beta_3^2(1+\mu_1) - 2\mu_3\beta_1\beta_3)] + \lambda_0^2\omega_1^4 +\\
&\qquad + i\omega_1^2(4\omega_3\beta_3^2 + \omega_2(s_0^{-2} + \mu_2));\\
&a_4 = \gamma^6(1+\mu_1)s_0^{-2} + \gamma^4[\omega_1^2(1+\mu_1+s_0^{-2}) + i s_0^{-2}(\omega_2(1+\mu_1) + 4\omega_3\beta_1^2)] +\\
&\qquad + \gamma^2\omega_1^2[\omega_1^2 + i(\omega_2(1+\mu_1+s_0^{-2}) + 4\omega_3\beta_1^2)] + i\omega_1^4\omega_2^2.
\end{aligned}$$

Решением системы (9) для различных корней k_i уравнения (10) являются функции

$$\begin{aligned}
&n^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} H_i^+ \operatorname{ch} k_i x_3, \qquad n^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} H_i^- \operatorname{sh} k_i x_3,\\
&q^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i^+ \operatorname{sh} k_i x_3, \qquad q^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i^- \operatorname{ch} k_i x_3,\\
&t^+(x_3) = \sum_{i=1}^{3} T_i^+ \operatorname{ch} k_i x_3, \qquad t_i^-(x_3) = \sum_{i=1}^{3} T_i^- \operatorname{sh} k_i x_3.
\end{aligned} \tag{11}$$

При этом

$$\begin{aligned}
&Q_i^{\pm} = c_i H_i^{\pm}, \qquad T_i^{\pm} = d_i H_i^1,\\
&c_i = [s_0^{-2}\beta_3 k_i^2 + (\beta_3(1+\mu_1) - \mu_3\beta_1)\gamma^2 + \beta_3\omega_1^2] k_i \Delta_i^{-1}\lambda^{-1},\\
&d_i = [(s_0^{-2}k_i^2 + (1+\mu_1)\gamma^2 + \omega_1^2)(\mu_2 k_i^2 + s_0^{-2}\gamma^2 + \omega_1^2) - \mu_3^2 k_i^2\gamma^2]\Delta_i^{-1},\\
&\Delta_i = (\beta_1\mu_2 - \beta_3\mu_3)k_i^2 + \beta_1(\gamma^2 s_0^{-2} + \omega_1^2)
\end{aligned}$$

и знаками + и − отмечены величины, относящиеся соответственно к симметричным и антисимметричным относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ видам колебаний пластины.

Неизвестные коэффициенты $H_i^{\pm}$ и собственные значения γ найдем из граничных условий (2)–(7). Подставляя соотношения (8), (11) в граничные условия (2), (6), получим однородные системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^{+} \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^{+} c_i \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^{+} d_i \operatorname{ch} k_i = 0; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{3} H_i^{-} \operatorname{sh} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^{-} c_i \operatorname{ch} k_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i^{-} d_i \operatorname{sh} k_i = 0. \tag{13}$$

Из условия равенства нулю определителей системы (12), (13) получаем относительно γ дисперсионные уравнения

$$\Delta_{26}^{+} = c_1(d_2 - d_3) \operatorname{th} k_1 + c_2(d_3 - d_1) \operatorname{th} k_2 + c_3(d_1 - d_2) \operatorname{th} k_3 = 0, \tag{14}$$

$$\Delta_{26}^{-} = c_1(d_2 - d_3) \operatorname{cth} k_1 + c_2(d_3 - d_1) \operatorname{cth} k_2 + c_3(d_1 - d_2) \operatorname{cth} k_3 = 0. \tag{15}$$

В случае граничных условий (2), (7) дисперсионные уравнения имеют вид

$$\Delta_{27}^{+} = (c_2 d_3 k_3 - c_3 d_2 k_2) \operatorname{cth} k_1 + (c_3 d_1 k_1 - c_1 d_3 k_3) \operatorname{cth} k_2 + (c_1 d_2 k_2 - c_2 d_1 k_1) \operatorname{cth} k_3 = 0, \tag{16}$$

$$\Delta_{27}^{-} = (c_2 d_3 k_3 - c_3 d_2 k_2) \operatorname{th} k_1 + (c_3 d_1 k_1 - c_1 d_3 k_3) \operatorname{th} k_2 + (c_1 d_2 k_2 - c_2 d_1 k_1) \operatorname{th} k_3 = 0. \tag{17}$$

Краевым условиям (3) и (6), (4) и (6), (5) и (6) соответствуют дисперсионные уравнения

$$\Delta_{36}^{+} = (e_3 d_2 - e_2 d_3) f_1 \operatorname{th} k_1 + (e_1 d_3 - e_3 d_1) f_2 \operatorname{th} k_2 + (e_2 d_1 - e_1 d_2) f_3 \operatorname{th} k_3 = 0, \tag{18}$$

$$\Delta_{36}^{-} = (e_3 d_2 - e_2 d_3) f_1 \operatorname{cth} k_1 + (e_1 d_3 - e_3 d_1) f_2 \operatorname{cth} k_2 + (e_2 d_1 - e_1 d_2) f_3 \operatorname{cth} k_3 = 0, \tag{19}$$

$$\Delta_{46}^{+} = d_1(k_2 c_3 - k_3 c_2) \operatorname{cth} k_1 + d_2(k_3 c_1 - k_1 c_3) \operatorname{cth} k_2 + d_3(k_1 c_2 - k_2 c_1) \operatorname{cth} k_3 = 0, \tag{20}$$

$$\Delta_{46}^{-} = d_1(k_2 c_3 - k_3 c_2) \operatorname{th} k_1 + d_2(k_3 c_1 - k_1 c_3) \operatorname{th} k_2 + d_3(k_1 c_2 - k_2 c_1) \operatorname{th} k_3 = 0, \tag{21}$$

$$\Delta_{56}^{+} = \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3 = 0, \tag{22}$$

$$\Delta_{56}^{-} = \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3 = 0. \tag{23}$$

Здесь $e_i = \nu_2(1 - \nu_1)^{-1} + \lambda e_i k_i,\ f_i = k_i + \lambda c_i$.

В случае теплоизолированных плоских граней пластины (7) и граничных условий (3)–(5) алгоритм получения дисперсионных уравнений и потенциального решения не изменяется. Неизвестные коэффициенты $H_i^{\pm}$ определяются из решения систем вида (12), (13).

Счетному множеству корней γ_p дисперсионных уравнений (14)–(23) соответствуют собственные функции $n_p^{\pm}(x_3)$, $q_p^{\pm}(x_3)$, $t_p^{\pm}(x_3)$, $C_p^{\pm}(x_1, x_2)$. Поэтому потенциальное решение для всех видов граничных условий имеет форму

$$\begin{gathered} u_{1\text{п}} = \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{\pm}(x_3) \partial_1 C_p^{\pm}(x_1, x_2), \qquad u_{2\text{п}} = \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{\pm} \partial_2 C_p^{\pm}, \\ u_{3\text{п}} = \sum_{p=1}^{\infty} q_p^{\pm} C_p^{\pm}, \qquad u_{4\text{п}} = \sum_{p=1}^{\infty} t_p c_p. \end{gathered} \tag{24}$$

Таким образом, решение краевых задач связанной термоупругости сведено к нахождению метагармонических $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ функций с учетом граничных условий на боковой поверхности пластины.

Полученные однородные решения могут быть использованы для построения приближенных теорий тонких пластинок [5] и позволяют исследовать волноводные свойства транстропных толстых плит.

1. *Алтухов Е. В., Панченко Ю. В.* Колебания транстропных пластин в случае смешанных граничных условий // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 52–62.
2. *Алтухов Е. В., Панченко Ю. В.* Колебания транстропных пластин с граничными условиями типа плоского торца или диафрагмы // Динамич. системы. – 1999. – Вып. 15. – С. 104–109.
3. *Космодамианский А. С., Сторожев В. И., Шалдырван В. А.* Вынужденные колебания многосвязных транстропных толстых пластин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – С. 1088–1092.
4. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 2. – С. 230–241.
5. *Швец Р. Н.* Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 84–92.

Донецкий национальный университет *Поступило в редакцию 27.07.2006*

УДК 539.3

Я. О. Жук, О. П. Червінко, Л. Я. Васильєва

Уточнена модель структурних перетворень в тонкому сталевому циліндрі при тепловому опроміненні торця

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Phase transformations in a steel thin cylinder under thermal pulse irradiation of the cylinder end are studied. The statement of a dynamic problem of coupled thermomechanics along with a thermodynamically consistent theory of the inelastic behavior of a material is used. The model is refined to take account for temperature-induced phase transformations. The residual stress-strain and structural states of the steel cylinder are studied by the numerical simulation.

Розробка лазерних та імпульсних систем для мікро- і нанообробки вимагає детального дослідження зв'язаних термомеханічних процесів, які відбуваються при опроміненні і подальшому охолодженні матеріалу. Зокрема для матеріалів типу сталей такі історії зміни температури можуть супроводжуватись структурними перетвореннями, що роблять відповідний внесок у формування залишкового напружено–деформованого стану. В даній роботі розв'язується модельна задача про опромінення лазерним імпульсом або пучком заряджених часток торця тонкого кругового циліндра (стержня) з мартенситної сталі 35ХМ. Мета такої обробки полягає у підвищенні міцнісних і втомних характеристик приповерхневих шарів матеріалу, тому дослідження і коректне описання структурних перетворень в околі дії імпульсу є важливим при оцінці довговічності сталевих елементів конструкцій [1, 2].