УДК 517.944

А. А. Мурач

Эллиптические краевые задачи в многосвязной области в уточненной шкале пространств

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

A mixed elliptic boundary-value problem for a differential equation over a multiply connected bounded domain is studied. The boundary conditions have different orders on the distinct connected components of the boundary. We prove that the operator of the problem is a Fredholm one on the one-sided refined scale of functional Hilbert spaces. Elements of this scale are the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyakh. A mixed elliptic boundary-value problem with parameter is investigated as well.

В настоящей работе рассматривается эллиптическая краевая задача для линейного дифференциального уравнения, заданного в многосвязной ограниченной области евклидового пространства. В отличие от известных работ [1–5] предполагается, что порядки граничных выражений различны на разных связных компонентах границы. Например, для уравнения Лапласа в кольце можно задавать граничное условие Дирихле на одной и граничное условие Неймана на другой компонентах границы. Рассматриваемая задача относится к классу смешанных задач [6–9]. Они изучены существенно менее полно, чем несмешанные задачи. Это связано с тем, что при сведении смешанной задачи к псевдодифференциальному оператору на границе возникают определенные трудности (см., напр., [9]). В рассматриваемой нами задаче участки границы, на которых порядок граничного выражения различен, не примыкают друг к другу. Это позволяет с помощью локальных построений свести задачу к эллиптической модельной задаче в полупространстве. Отметим, что исследуемая задача, вообще говоря, нерегулярная.

Оператор, соответствующий задаче, исследуется в уточненной шкале гильбертовых функциональных пространств [10–12]. Элементами этой шкалы являются некоторые изотропные пространства Хермандера–Волевича–Панеяха. Уточненная шкала содержит классическую соболевскую шкалу и позволяет по сравнению с последней более тонко охарактеризовать гладкость функции по свойствам ее преобразования Фурье вблизи бесконечности. Установлены теорема о фредгольмовости оператора в односторонней уточненной шкале, априорная оценка решения и теорема об изоморфизмах, порождаемых оператором. Исследована также смешанная эллиптическая задача с параметром в уточненной шкале. В качестве приложения приводится одно достаточное условие классичности решения задачи. Отметим, что полученные результаты являются, по-видимому, новыми даже в случае соболевских пространств.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная многосвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Граница Γ области Ω состоит из $r \geqslant 2$ непустых связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, которые являются бесконечно гладкими многообразиями размерности $n-1$ без края. Пусть $\overline{\Omega} := \Omega \bigcup \Gamma$ — замыкание области Ω.

Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$Lu = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_{j,k}u = g_{j,k} \quad \text{на} \quad \Gamma_j \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, r \quad \text{и} \quad k = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Здесь L — линейное дифференциальное выражение, заданное в замкнутой области $\overline{\Omega}$; выражение L имеет произвольный четный порядок $2q \geqslant 2$. Здесь также $\{B_{j,k}\colon k = 1, \ldots, q\}$ — система граничных линейных дифференциальных выражений, заданных на связной компоненте Γ_j границы Γ. Выражение $B_{j,k}$ имеет порядок $m_{j,k} \leqslant 2q - 1$. Все коэффициенты выражений L и $B_{j,k}$ являются бесконечно гладкими комплекснозначными функциями. Положим

$$m := \max\{m_{j,k}\colon j = 1, \ldots, r \text{ и } k = 1, \ldots, q\}.$$

Определение 1. Краевую задачу (1), (2) называем эллиптической в многосвязной области Ω, если выполняются следующие условия:

а) дифференциальное выражение L правильно эллиптическое в замкнутой области $\overline{\Omega}$ [4, с. 166];

б) для любого номера $j = 1, \ldots, r$ система граничных выражений $\{B_{j,k}\colon k = 1, \ldots, q\}$ удовлетворяет условию дополнительности по отношению к L на Γ_j [4, с. 167].

Всюду далее предполагается, что граничная задача (1), (2) эллиптическая в многосвязной области Ω. Свяжем с этой задачей линейное отображение

$$u \mapsto Au := (Lu, B_{1,1}u, \ldots, B_{1,q}u, \ldots, B_{r,1}u, \ldots, B_{r,q}u), \tag{3}$$

где $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Будем изучать его продолжения по непрерывности в уточненных шкалах пространств.

2. Уточненные шкалы гильбертовых функциональных пространств введены в [10]. Напомним определения этих шкал.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех таких функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что:

а) φ измерима по Борелю на полуоси $[1, +\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, где $1 < b < +\infty$;

в) функция φ медленно меняющаяся на $+\infty$, т. е. [13, с. 9]

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = 1 \qquad \text{для любого} \qquad \lambda > 0.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, где $n \geqslant 1$, пространство всех таких распределений u медленного роста, заданных в $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Здесь интеграл берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle = (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения возьмем величину

$$(u, v)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi.$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это частный изотропный гильбертов случай пространств, введенных Л. Хермандером [3, с. 54] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [14, с. 14]. В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Гильбертово сепарабельное пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ тесно связано с соболевской шкалой:

$$\bigcup_{\varepsilon>0} H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) =: H^{s+}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s-}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда вытекает, что в семействе $\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$ функциональный параметр φ уточняет основную (степенную) s-гладкость. Это семейство названо уточненной шкалой в $\mathbb{R}^n$.

Далее, обозначим через $H^{s,\varphi}(\Omega)$ факторпространство пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по замкнутому подпространству

$$\{w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}. \tag{4}$$

Факторпространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ гильбертово сепарабельное; в нем скалярное произведение классов смежности распределений $u_1,\ u_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ равно

$$(u_1 - \Pi u_1, u_2 - \Pi u_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)},$$

где Π — ортопроектор в $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство (4). Отметим, что $H^{s,\varphi}(\Omega)$ естественно трактовать как пространство сужений в область Ω всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Для такого сужения v имеем

$$\|v\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\Omega)} = \inf\{\|u\|_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\colon u = v \text{ в } \Omega\}.$$

Семейство $\{H^{s,\varphi}(\Omega)\colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$ называем уточненной шкалой в области Ω.

Наконец, для каждого $j = 1, \ldots, r$ определим уточненную шкалу на Γ_j. По условию, Γ_j — бесконечно гладкое компактное многообразие без края размерности $n-1$. Возьмем конечный атлас из C^∞-структуры на Γ_j, образованный локальными картами $\alpha_\iota\colon \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_\iota$, где $\iota = 1, \ldots, \rho$. Здесь множества U_ι составляют открытое покрытие многообразия Γ_j. Пусть функции $\chi_\iota \in C^\infty(\Gamma_j)$, где $\iota = 1, \ldots, \rho$, образуют разбиение единицы на Γ_j, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp} \chi_\iota \subset U_\iota$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\Gamma_j)$ пространство всех таких распределений g на Γ_j, что

$$(\chi_\iota g) \circ \alpha_\iota \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \qquad \text{для каждого} \qquad \iota = 1, \ldots, \rho.$$

Здесь $(\chi_\iota g) \circ \alpha_\iota$ — представление распределения $\chi_\iota g$ в локальной карте α_ι. В $H^{s,\varphi}(\Gamma_j)$ определим скалярное произведение по формуле

$$(g, h)_{H^{s,\varphi}(\Gamma_j)} := \sum_{\iota=1}^{\rho} ((\chi_\iota g) \circ \alpha_\iota, (\chi_\iota h) \circ \alpha_\iota)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma_j)$ гильбертово сепарабельное и с точностью до эквивалентности норм не зависит от использованных для его определения атласа и разбиения единицы.

В конце этого пункта отметим, что уточненная шкала позволяет тоньше, чем соболевская шкала, охарактеризовать классическую гладкость распределения по свойствам его преобразования Фурье в окрестности $+\infty$. А именно [10, с. 362], если функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty, \tag{5}$$

то справедливы компактные вложения

$$H^{k+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad \text{и} \quad H^{k+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma_j) \hookrightarrow C^k(\Gamma_j) \ \ \text{для любого целого} \ \ k \geqslant 0. \quad (6)$$

3. Оператор задачи в уточненной шкале. Предварительно напомним следующее.

Определение 2. Линейный ограниченный оператор $T\colon X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность. Индексом фредгольмового оператора T называется число $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_j}$ скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_j)$ соответственно, а также расширения по непрерывности этих скалярных произведений.

Граничная задача (1), (2), эллиптическая в многосвязной области Ω, имеет следующие свойства.

Теорема 1. *Пусть $s > m+1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Отображение* (3) *продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора*

$$A\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi} := H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{q} H^{s-m_{j,k}-1/2,\varphi}(\Gamma_j). \quad (7)$$

Ядро N оператора (7) *удовлетворяет условию $N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ и не зависит от s, φ. Область значений этого оператора состоит из всех таких векторов*

$$F := (f, g_{1,1}, \ldots, g_{1,q}, \ldots, g_{r,1}, \ldots, g_{r,q}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi},$$

что

$$(F,W)_{\Omega,\Gamma} := (f,w_0)_\Omega + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}(g_{j,k}, w_{j,k})_{\Gamma_j} = 0$$

для любой вектор-функции

$$W := (w_0, w_{1,1}, \ldots, w_{1,q}, \ldots, w_{r,1}, \ldots, w_{r,q}) \in N_*.$$

Здесь N_* — некоторое не зависящее от s, φ конечномерное подпространство в

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \times \prod_{j=1}^{r}(C^\infty(\Gamma_j))^q.$$

Индекс оператора (7) *равен числу* $\dim N - \dim N_*$ *и поэтому также не зависит от s, φ.*

Как видим, оператор (7) оставляет инвариантным индекс φ, уточняющий основную s-гладкость. Если $\varphi \equiv 1$, то этот оператор действует в пространствах Соболева. Теорема 1 хорошо известна в случае, когда $s \geqslant 2q$, $\varphi \equiv 1$, а область Ω односвязна (или, более общо, когда порядки граничных выражений $B_{j,k}$ не зависят от j); см., напр., [3, т. 3, § 20.1].

Теорема 2 (априорная оценка). *Для произвольных чисел $s > m+1/2$, $\rho > 0$ и функции $\varphi \in \mathcal{M}$ существует такое число $c > 0$, что*

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \leqslant c(\|Au\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}} + \|u\|_{H^{s-\rho,\varphi}(\Omega)}) \qquad \text{для любого} \qquad u \in H^{s,\varphi}(\Omega).$$

Согласно теореме 1 оператор (7) является топологическим изоморфизмом, если пространства N и N_* тривиальны. В общем случае изоморфизм удобно построить с помощью следующих проекторов. Рассмотрим прямые суммы

$$H^{s,\varphi}(\Omega) = N + \{u \in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon (u, w)_\Omega = 0 \text{ для любого } w \in N\},$$

$$\mathcal{H}_{s,\varphi} = N_* + A(H^{s,\varphi}(\Omega)).$$

Обозначим через P проектор пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$ на дополнение пространства N в первой сумме, а через Q — проектор пространства $\mathcal{H}_{s,\varphi}$ на дополнение пространства N_* во второй сумме. Эти проекторы не зависят от s, φ.

Теорема 3. *Для произвольных $s > m + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ справедлив топологический изоморфизм*

$$A\colon P(H^{s,\varphi}(\Omega)) \leftrightarrow Q(\mathcal{H}_{s,\varphi}).$$

4. Эллиптическая задача с параметром. Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$L(\lambda)u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8}$$

$$B_{j,k}(\lambda)u = g_{j,k} \quad \text{на} \quad \Gamma_j \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, r \quad \text{и} \quad k = 1, \ldots, q. \tag{9}$$

Здесь λ — комплексный параметр, а $L(\lambda)$ и $B_{j,k}(\lambda)$ — линейные дифференциальные выражения, зависящие от параметра λ следующим образом:

$$L(\lambda) := \sum_{\rho+|\mu|\leqslant 2q} l_{\rho,\mu}(x)\lambda^\rho D^\mu, \qquad B_{j,k}(\lambda) := \sum_{\rho+|\mu|\leqslant m_{j,k}} b^{j,k}_{\rho,\mu}(x)\lambda^\rho D^\mu.$$

Суммирование выполняется с помощью целого индекса $\rho \geqslant 0$ и мультииндекса $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ с неотрицательными целыми компонентами, причем $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$. Порядки $2q$ и $m_{j,k}$ такие, как и прежде. Предполагается, что функции $l_{\rho,\mu}(x)$ и $b^{j,k}_{\rho,\mu}(x)$ бесконечно гладкие в $\overline{\Omega}$ и на Γ_j соответственно.

Напомним, что оператор частного дифференцирования $D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$ при преобразовании Фурье переходит в оператор умножения на функцию $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ от $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$L^{(0)}(x, \xi, \lambda) := \sum_{\rho+|\mu|=2q} l_{\rho,\mu}(x)\lambda^\rho \xi^\mu, \qquad B^{(0)}_{j,k}(x, \xi, \lambda) := \sum_{\rho+|\mu|=m_{j,k}} b^{j,k}_{\rho,\mu}(x)\lambda^\rho \xi^\mu.$$

Пусть K — фиксированный замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат (не исключается случай, когда K — луч).

Определение 3. Краевую задачу (10), (11) называем эллиптической с параметром в многосвязной области Ω и в угле K, если выполняются следующие условия:

а) для произвольных точки $x \in \overline{\Omega}$, вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и параметра $\lambda \in K$ справедливо $L^{(0)}(x, \xi, \lambda) \neq 0$ при $(\xi, \lambda) \neq 0$;

б) для произвольных номера $j = 1, \ldots, r$, точки $x \in \Gamma_j$, вектора τ, касательного к границе Γ в точке x, и параметра $\lambda \in K$, удовлетворяющих условию $|\tau| + |\lambda| \neq 0$, многочлены

$$B^{(0)}_{j,k}(x, \tau + \eta\nu, \lambda), \qquad k = 1, \ldots, q,$$

комплексного переменного η линейно независимы по модулю многочлена

$$L_{+}^{(0)}(x,\tau+\eta\nu,\lambda) := \prod_{k=1}^{q}(\eta-\eta_{k}^{+}(x,\tau,\lambda));$$

здесь ν — орт внутренней нормали к границе Γ в точке x, а $\eta_{1}^{+}(x,\tau,\lambda),\ldots,\eta_{q}^{+}(x,\tau,\lambda)$ — все η-корни многочлена $L^{(0)}(x,\tau+\eta\nu,\lambda)$, имеющие положительную мнимую часть.

Отметим следующее. Поскольку $n \geqslant 2$, то [5, с. 23] условие *а* влечет за собой, что многочлен $L^{(0)}(x,\tau+\eta\nu,\lambda)$ от переменного η имеет поровну, т. е. по q корней с положительной и отрицательной мнимыми частями. Поэтому условие *б* сформулировано корректно.

Если задача (8), (9) эллиптическая с параметром в Ω и в K, то она эллиптическая в Ω для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, в силу теоремы 1 отображение

$$u \mapsto A(\lambda)u := (L(\lambda)u, B_{1,1}(\lambda)u,\ldots,B_{1,q}(\lambda)u,\ldots,B_{r,1}(\lambda)u,\ldots,B_{r,q}(\lambda)u),$$

где $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора

$$A(\lambda)\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}, \tag{10}$$

где $s > m+1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Этот результат усиливается так:

Теорема 4. *Пусть краевая задача* (8), (9) *эллиптическая с параметром в многосвязной области* Ω *и в угле* K. *Тогда существует такое число* $\sigma > 0$, *что для каждого параметра* $\lambda \in K$, *удовлетворяющего условию* $|\lambda| \geqslant \sigma$, *оператор* (10) *является топологическим изоморфизмом.*

В случае, когда $\varphi \equiv 1$ (пространства Соболева), а порядки граничных выражений $B_{j,k}$ не зависят от j, теорема 4 доказана М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком [15, с. 85; 5, с. 25]. Из теоремы 4 вытекает (ср. [15, с. 96])

Теорема 5. *Если краевая задача* (8), (9) *эллиптическая с параметром в многосвязной области* Ω *и на некотором замкнутом луче* $K := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \arg\lambda = \mathrm{const}\}$, *то оператор* (10) *этой задачи имеет нулевой индекс.*

Заметим, что аналоги теорем 4, 5 верны и в односвязных областях.

5. Приложение. Теорема 1 позволяет исследовать гладкость решения эллиптической задачи (1), (2). Например, она в месте с вложениями (6) влечет за собой следующее достаточное условие классичности решения.

Пусть $H^{m+1/2+}(\Omega)$ обозначает пересечение всех пространств $H^{s,\varphi}(\Omega)$, где $s > m+1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ пространство всех таких распределений f в области Ω, что $\chi f \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ для произвольной функции $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ с носителем $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$.

Теорема 6. *Предположим, что функция* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *является решением задачи* (1), (2), *в которой*

$$f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \bigcap H^{m-2q+n/2,\varphi}(\Omega),$$

$$g_{j,k} \in H^{m-m_{j,k}+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma_{j}) \quad \textit{для любых} \quad j=1,\ldots,r \quad \textit{и} \quad k=1,\ldots,q,$$

где функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда* u — *классическое решение, т. е.* $u \in C^{2q}(\Omega) \bigcap C^{m}(\overline{\Omega})$.

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 206 с.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
3. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – Москва: Мир. – Т 2. – 1986. – 456 с; Т. 3. – 1987. – 696 с.
4. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
5. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., 79. Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.
6. *Schechter M.* Mixed boundary value problems for general elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, No 2. – P. 183–201.
7. *Peetre J.* Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables. I // Ann. Scuola norm. Super. Pisa. – 1961. – **15**. – P. 337–353.
8. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Смешанные краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбилис. гос. ун-та. – 1969. – **11**. – С. 31–48.
9. *Simanca S. R.* Mixed elliptic boundary value problems // Commun. Part. Differential Equations. – 1987. – **12**, No 2. – P. 123–200.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.
11. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двухсторонней уточненной шкале пространств // Там же. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536–1555.
12. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двухсторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісн. – 2006. – **3**, № 4. – С. 447–480.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 142 с.
14. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
15. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Там же. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.

Институт математики НАН Украины, Киев
Черниговский государственный технологический университет

Поступило в редакцию 26.09.2006