

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ КИЛЬВАТЕРНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРОННЫМИ СГУСТКАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ МНОГОСЛОЙНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

*К.В. Галайдыч, Г.В. Сотников*

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина*

*E-mail: sotnikov@kipt.kharkov.ua*

Построена нелинейная самосогласованная теория возбуждения кильватерных полей в многослойном диэлектрическом резонаторе. Найдены аналитические выражения для возбуждаемых полей, функционально зависящие от положения частиц сгустков в резонаторе. Возбуждаемые поля представлены в виде суперпозиции вихревых (LSE- и LSM-типа) и потенциальных полей. Сформулированная в общем виде нелинейная теория позволяет исследовать нелинейную динамику сгустков в прямоугольном резонаторе при произвольном количестве диэлектрических слоёв.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Многослойные диэлектрические структуры являются притягательными для использования их в перспективных двухпучковых схемах ускорения заряженных частиц [1-4]. Благодаря наличию разнесенных в пространстве канала транспортировки ведущего сгустка и ускорительного канала для тестового сгустка можно получить большое значение коэффициента трансформации и, таким образом, достичь сверхвысокого темпа ускорения. Многослойную диэлектрическую структуру называют двухканальной [3] или трехканальной [4], имея ввиду число вакуумных каналов, в которых движутся ускоряющий и ускоряемый сгустки.

Теоретическое исследование и численное моделирование пятizonных диэлектрических структур [1-2] и симметричных семизонных структур [4] показали перспективность их как секций будущего кильватерного ускорителя. С целью проверки основных принципов такого ускорителя, в особенности, возможности получения больших коэффициентов трансформации и больших напряженностей ускоряющего поля, на базе ускорительного комплекса ANL проводится серия экспериментов [3]. Для теоретического описания возбуждения кильватерных полей в диэлектрических структурах прямоугольной конфигурации обычно используются аналитические методы [5,6], к настоящему времени они ограничиваются линейным приближением с заданным движением возбуждающих сгустков. Т.е. они не учитывают продольную и поперечную собственную динамику сгустков. Результаты, полученные численными методами [3,4] с использованием метода макрочастиц, описывают самосогласованную динамику полей и сгустков. Но часто их применимость ограничена возможностями современных компьютеров. Особенно эта проблема стоит актуально для моделирования возбуждения кильватерных волн в терагерцовой области частот [4], что связано с необходимостью уменьшения временного шага вычислений и размера пространственной сетки.

В настоящем докладе мы предлагаем комбинированный метод учета динамики сгустков на возбу-

ждение кильватерных полей. Если мы найдем аналитически выражения для возбуждаемых полей в каждый момент времени (нелинейная функция Грина), то нам останется моделировать только динамику макрочастиц сгустков [7]. Указанный алгоритм реализован для многослойного диэлектрического резонатора. Для нахождения полей используется метод разложения по собственным функциям многослойного диэлектрического резонатора. Найдены собственные функции вихревой части электромагнитного поля, а также собственные значения и собственные функции потенциальной части электрического поля. Используя эти выражения, определены амплитуды возбуждаемых полей, функционально зависящие от положения макрочастиц сгустков в любой момент времени.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исследуемая многослойная диэлектрическая структура представляет собой прямоугольный металлический резонатор, параллельно одной из стенок которого размещены диэлектрические пластины. Поперечное сечение такого резонатора и расположение прямоугольной системы координат, используемой в дальнейшем построении аналитической теории, схематически показаны на Рис.1. Диэлектрические пластины расположены параллельно оси  $y$  и имеют в общем случае различные значения диэлектрической,  $\varepsilon = \varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), и магнитной,  $\mu = \mu_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), проницаемостей;  $N$  - число слоев диэлектрической структуры. В одной из вакуумных зон ( $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ) вдоль диэлектрических пластин параллельно оси  $z$  (направлена перпендикулярно плоскости рисунка) распространяется электронный сгусток, возбуждающий резонатор.

Для описания нелинейной динамики электромагнитных полей, возбуждаемых сгустками частиц в слоистом диэлектрическом резонаторе, представим искомые поля в виде суммы соленоидальной и потенциальной составляющих [8]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^t, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}^t$  и  $\mathbf{H}^t$  - вихревые компоненты электромагнитного поля ( $\text{div}(\varepsilon\mathbf{E}^t) = 0$ ,  $\text{div}(\mu\mathbf{H}^t) = 0$ ), удовлетворяющие первому и второму уравнениям Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{H}^t = \frac{\varepsilon(x)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot}\mathbf{E}^t = -\frac{\mu(x)}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial t}, \quad (2)$$

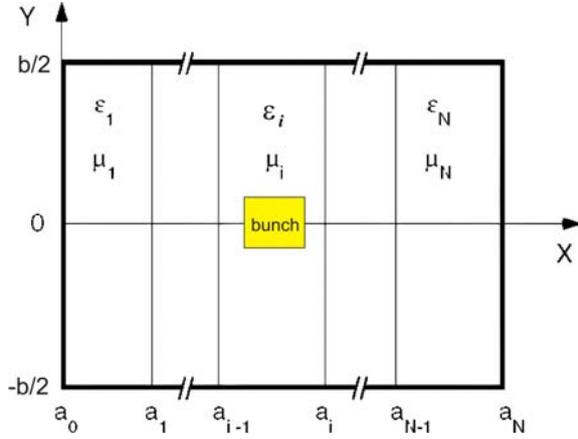
а потенциальное электрическое поле  $\mathbf{E}^l$  удовлетворяет закону Гаусса:

$$\text{div}(\varepsilon\mathbf{E}^l) = 4\pi\rho. \quad (3)$$

Вихревое  $\mathbf{E}^t$  и потенциальное  $\mathbf{E}^l$  электрические поля взаимно ортогональны [8] и удовлетворяют граничным условиям, обращающим их тангенциальные компоненты в ноль на металлических стенках резонатора:

$$\mathbf{E}_\tau^l(\mathbf{r} \in S_0) = 0, \quad \mathbf{E}_\tau^t(\mathbf{r} \in S_0) = 0, \quad (4)$$

где  $S_0$  означает металлическую поверхность резонатора, а индекс  $\tau$  - тангенциальную составляющую полей.



Поперечное сечение многослойного диэлектрического резонатора

Электронные сгустки будем описывать макрочастицами, поэтому плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  представим следующим образом:

$$\rho = \sum_{p \in V_R} q_p \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)], \quad \mathbf{j} = \sum_{p \in V_R} q_p \mathbf{v}_p(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)], \quad (5)$$

где  $q_p$  - заряд макрочастицы;  $\mathbf{r}_p$  и  $\mathbf{v}_p$  - ее координаты и скорость, зависящие от времени. Суммирование в (5) ведется по всем частицам, находящимся в объеме резонатора  $V_R$ .

Собственная динамика частиц сгустков описывается релятивистскими уравнениями движения в электромагнитных полях, возбуждаемых частицами сгустков:

$$\frac{d\mathbf{p}_p}{dt} = q_p \left( \mathbf{E} + \frac{1}{m_p c \gamma_p} \mathbf{p}_p \times \mathbf{B} \right), \quad \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \frac{\mathbf{p}_p}{m_p \gamma_p}, \quad (6)$$

где  $\gamma_p^2 = 1 + (\mathbf{p}_p / m_p c)^2$ .

Ниже мы найдем аналитические решения системы уравнений (1)-(5), что позволит при моделировании самосогласованной динамики сгустков и полей избежать их численного решения на пространственной сетке. В этом состоит существенное отличие от численных алгоритмов с использованием particle-in-cell, которые широко применяются при анализе ди-

намики частиц в возбуждаемых ими полях.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

#### 3.1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Учитывая (3) и (5), нахождение потенциального электрического поля,  $\mathbf{E}^l = -\nabla\Phi$ , сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \sum_{p \in V_R} q_p \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)]. \quad (7)$$

Электрический потенциал  $\Phi$  удовлетворяет следующим граничным условиям на металлической поверхности резонатора:

$$\begin{aligned} \Phi(y = \pm b/2) = \Phi(z = 0) = \Phi(z = L) \\ = \Phi(x = a_0) = \Phi(x = a_N) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (7) будем искать методом разложения по собственным функциям. Для их нахождения необходимо решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2} + \lambda_s \Phi_s = 0, \quad (9)$$

где  $\Phi_s$  и  $\lambda_s$  - неизвестные собственные функции и собственные значения. Решение уравнения (9) ищем методом разделения переменных:

$$\Phi_s = X_m(x) Y_n(y) Z_l(z). \quad (10)$$

С учетом граничных условий получаем, что

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin[k_y^n (y + b/2)], \quad k_y^n = \frac{\pi n}{b}, \quad (11)$$

$$Z_l(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_z^l z), \quad k_z^l = \frac{\pi l}{L},$$

а для нахождения собственных функций  $X_m(x)$  имеем уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left( \varepsilon(x) \frac{dX_m(x)}{dx} \right) + k_x^2 \varepsilon(x) X_m(x) = 0 \quad (12)$$

с неизвестными собственными значениями  $k_x^2$ .

Введем обозначение:

$$X_m(x) = \varphi^{(i)}(x), \quad a_{i-1} \leq x \leq a_i. \quad (13)$$

Решение уравнения (12) должно удовлетворять граничным условиям, состоящим в непрерывности потенциала и поперечной к диэлектрическим слоям компоненты вектора электрической индукции:

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(a_i) = \varphi^{(i+1)}(a_i), \\ \varepsilon_i \frac{d\varphi^{(i)}(x = a_i)}{dx} = \varepsilon_{i+1} \frac{d\varphi^{(i+1)}(x = a_i)}{dx}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ищем решение для  $\varphi^{(i)}(x)$  в каждом из слоев ( $1 \leq i \leq N$ ) в виде:

$$\varphi^{(i)}(x) = A^{(i)} \cos(k_x x) + B^{(i)} \sin(k_x x). \quad (15)$$

Тогда

$$\varepsilon_i \frac{d\varphi^{(i)}(x)}{dx} = -A^{(i)} \varepsilon_i k_x \sin(k_x x) + B^{(i)} \varepsilon_i k_x \cos(k_x x). \quad (16)$$

Запишем уравнения (15)-(16) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(i)} \\ \varepsilon_i \frac{d\varphi^{(i)}(x)}{dx} \end{pmatrix} = M_i(x) \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$M_i(x) = \begin{pmatrix} \cos(k_x x) & \sin(k_x x) \\ -\varepsilon_i k_x \sin(k_x x) & \varepsilon_i k_x \cos(k_x x) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда граничные условия (14) можно переписать также в матричном виде:

$$M_i(a_i) \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix} = M_{i+1}(a_i) \begin{pmatrix} A^{(i+1)} \\ B^{(i+1)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix} = M_i^{-1}(a_i) M_{i+1}(a_i) \begin{pmatrix} A^{(i+1)} \\ B^{(i+1)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Выразив коэффициенты  $A^{(i+1)}$ ,  $B^{(i+1)}$  через коэффициенты  $A^{(i+2)}$ ,  $B^{(i+2)}$  с использованием граничного условия при  $x = a_{i+1}$  и повторив указанную процедуру на последующих границах вплоть до  $x = a_{N-1}$ , приходим к соотношению, выражающему  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$  через константы  $A^{(N)}$ ,  $B^{(N)}$ :

$$\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix} = M_i^{-1}(a_i) V^{(i+1)} \dots V^{(N-1)} M_N(a_{N-1}) \begin{pmatrix} A^{(N)} \\ B^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где матрица перехода имеет вид:

$$V^{(i)} = \begin{pmatrix} \cos(k_x w_i) & -\frac{1}{\varepsilon_i k_x} \sin(k_x w_i) \\ \varepsilon_i k_x \sin(k_x w_i) & \cos(k_x w_i) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

и ширина  $i$ -й зоны  $w_i = a_i - a_{i-1}$ .

Но константы  $A^{(N)}$ ,  $B^{(N)}$  связаны граничным условием (8) при  $x = a_N$ , поэтому мы можем записать:

$$\begin{pmatrix} A^{(N)} \\ B^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(k_x a_N) \\ \cos(k_x a_N) \end{pmatrix} \frac{B^{(N)}}{\cos(k_x a_N)}. \quad (23)$$

Окончательно для констант  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$  получаем:

$$\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix} = M_i^{-1}(a_i) \left( \prod_{j=i+1}^{N-1} V^{(j)} \right) \begin{pmatrix} -\sin(k_x w_N) \\ \varepsilon_N k_x \cos(k_x w_N) \end{pmatrix} \frac{B^{(N)}}{\cos(k_x a_N)}. \quad (24)$$

В первой зоне константы  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$  также как и  $A^{(N)}$ ,  $B^{(N)}$  не являются независимыми, они связаны граничным условием (8) при  $x = a_0$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(k_x a_0) & \sin(k_x a_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

Подставив в уравнение (25) выражение (24) при  $i = 1$ , приходим к дисперсионному уравнению для определения собственных значений  $k_x$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(k_x w_1) & -\frac{1}{\varepsilon_1 k_x} \sin(k_x w_1) \end{bmatrix} \left( \prod_{j=2}^{N-1} V^{(j)} \right) \begin{pmatrix} -\sin(k_x w_N) \\ \varepsilon_N k_x \cos(k_x w_N) \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Решив уравнение (26), мы получим набор  $k_x^m$ . Каждому значению  $k_x^m$  соответствует собственная функция  $\varphi_m^{(i)}$ . Используя (17), (21) и (23), найдем:

$$\varphi_m^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \cos k_x^m (x - a_i) & \frac{1}{\varepsilon_i k_x} \sin k_x^m (x - a_i) \end{bmatrix} \chi_m^{(i)}, \quad (27)$$

$$\chi_m^{(i)} = \left( \prod_{j=i+1}^{N-1} V^{(j)} \right) \begin{pmatrix} -\sin(k_x w_N) \\ \varepsilon_N k_x \cos(k_x w_N) \end{pmatrix} B^{(N)}, \quad i \leq N-2, \quad (28)$$

$$\chi_m^{(N-1)} = \begin{pmatrix} -\sin(k_x w_N) \\ \varepsilon_N k_x \cos(k_x w_N) \end{pmatrix} B^{(N)}, \quad \chi_m^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_N k_x \end{pmatrix} B^{(N)}.$$

Собственные функции  $X_m(x)$ , как следует из (12), ортогональны с весом  $\varepsilon$ :

$$\frac{2}{w} \int_{a_0}^{a_N} \varepsilon(x) X_m(x) X_{m'}(x) dx = \|X_m\|^2 \delta_{mm'}, \quad (29)$$

$$\|X_m\|^2 = \frac{2}{w} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} [\varphi_m^{(i)}(x)]^2 dx,$$

где  $w = \sum_{i=1}^N w_i$ .

Используя полученные выражения для собственных функций (10)-(11) и (27)-(29), решение уравнения Пуассона (9) в многослойной диэлектрической структуре, возбуждаемой сгустком частиц (7), запишем в виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{32\pi}{abL} \sum_{p \in I_R} \sum_{mnl} q_p \frac{X_m(x_p)}{\|X_m\|^2 \lambda_{mnl}} \quad (30)$$

$\cdot \sin k_y^n (y_p + b/2) \sin k_z^l z_p X_m(x) \sin k_y^n (y + b/2) \sin k_z^l z$ ,  
где  $\lambda_{mnl} = (k_x^m)^2 + \kappa_{nl}^2$ ,  $\kappa_{nl}^2 = (k_y^n)^2 + (k_z^l)^2$ .

Таким образом, задача нахождения потенциального электрического поля полностью решена.

### 3.2. СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Для нахождения соленоидальной части электромагнитного поля будем решать уравнения (2) методом разложения по собственным вихревым полям пустого многослойного резонатора:

$$\mathbf{E}^t = \sum_s A_s(t) \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}^t = -i \sum_s B_s(t) \mathbf{H}_s, \quad (31)$$

где собственные функции  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  удовлетворяют уравнениям [8]:

$$\text{rot} \mathbf{H}_s = -ik_s \varepsilon \mathbf{E}_s, \quad \text{rot} \mathbf{E}_s = ik_s \mu \mathbf{H}_s, \quad (32)$$

$k_s = \omega_s / c$ , а  $\omega_s$  - собственные частоты диэлектрического резонатора (индекс  $s$  заменяет три индекса:  $m$ ,  $n$  и  $l$ ). Здесь и далее  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  описывают пространственную структуру вихревых полей, множитель  $\exp(-i\omega_s t)$  опущен.

Используя процедуру, развитую в [8], для нахождения полей, возбуждаемых внешним монохроматическим источником, и условие ортогональности,

$$\int_{V_R} \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dV = \int_{V_R} \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^* dV = 4\pi N_s \delta_{ss'}, \quad (33)$$

в случае нестационарного источника для нахождения амплитуд полей  $A_s$  и  $B_s$  получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_s}{dt^2} + \omega_s^2 A_s &= -\frac{dR_s}{dt}, \\ \frac{d^2 B_s}{dt^2} + \omega_s^2 B_s &= -\omega_s R_s, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{где } R_s = \frac{1}{N_s} \sum_{p \in V_R} q_p \mathbf{v}_p(t) \mathbf{E}_s^*[\mathbf{r}_p(t)]. \quad (35)$$

Решения уравнений (34) имеют вид:

$$B_s = -\int_0^t dt' \sin \omega_s(t-t') R_s(t'), \quad A_s = \frac{1}{\omega_s} \frac{dB_s}{dt}. \quad (36)$$

Известно [9,10], что все компоненты электромагнитного поля собственных волн слоистой диэлектрической структуры могут быть выражены через две компоненты, перпендикулярные диэлектрическим пластинам. Для LSM-волны они выражаются через  $E_{xs}$ , а для LSE-волн – через  $H_{xs}$ .

С учетом граничных условий (4) запишем компоненты поля для LSM-волны в виде:

$$\begin{aligned} E_{xs} &= e_{xs}^{(i)}(x) \sin k_y^n (y+b/2) \sin k_z^l z, \\ E_{ys} &= \frac{1}{\kappa_{nl}^2 \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\varepsilon E_{xs}), \quad E_{zs} = \frac{1}{\kappa_{nl}^2 \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\varepsilon E_{xs}), \\ H_{xs} &= 0, \quad H_{ys} = \frac{-ik_s}{\kappa_{nl}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon E_{xs}), \quad H_{zs} = \frac{ik_s}{\kappa_{nl}^2} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon E_{xs}). \end{aligned} \quad (37)$$

Поперечная структура компоненты  $E_{xs}$  поля LSM-волны описывается функцией  $e_{xs}^{(i)}(x)$ . Эта функция в общем виде для произвольного числа слоев диэлектрического резонатора может быть найдена матричным методом, аналогичным примененному в предыдущем подразделе для нахождения электрического потенциала. В данном случае, кроме граничных условий (4), на металлических стенках резонатора необходимо использовать непрерывность касательной компоненты электрического поля ( $E_{zs}$  или  $E_{ys}$ ) и нормальной компоненты вектора электрической индукции на границах слоев. В случае волновода данная процедура выполнена в работе [5]. Для применения полученных там выражений в резонаторном случае можно просто заменить непрерывное продольное волновое число  $k_z$  на ее дискретное значение  $k_z^l$  в резонаторе. В результате имеем:

$$e_{xs}^{(i)} = \frac{1}{\varepsilon_i} \left( \cos k_{xs}^i (a_i - x), -\frac{\varepsilon_i}{k_{xs}^i} \sin k_{xs}^i (a_i - x) \right) \xi_s^{(i)}, \quad (38)$$

$$\xi_s^{(i)} = \left( \prod_{j=i+1}^{N-1} S_s^{(j)} \right) \begin{pmatrix} \cos(k_{xs}^N w_N) \\ k_{xs}^N \sin(k_{xs}^N w_N) \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} A_s^{(N)} \quad (i \leq N-2), \quad (39)$$

$$\xi_s^{(N-1)} = \begin{pmatrix} \cos(k_{xs}^N w_N) \\ k_{xs}^N \sin(k_{xs}^N w_N) \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} A_s^{(N)}, \quad \xi_s^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A_s^{(N)},$$

где  $A_s^{(N)}$  - произвольные константы;  $k_{xs}^i = k_x^i(\omega_s)$ ;  $(k_x^i)^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu_i / c^2 - (k_y^n)^2 - (k_z^l)^2$ ;  $S_s^{(i)} = S^{(i)}(\omega_s)$  и матрица перехода  $S^{(i)}$  для LSM-волны определена следующим образом:

$$S^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \cos k_x^i w_i & -\frac{\varepsilon_i}{k_x^i} \sin k_x^i w_i \\ \frac{k_x^i}{\varepsilon_i} \sin k_x^i w_i & \cos k_x^i w_i \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Собственные частоты,  $\omega_s \equiv \omega_{mnl}$ , LSM-волны определяются из дисперсионного уравнения [5]:

$$\begin{pmatrix} k_x^1 \sin k_x^1 w_1, \cos k_x^1 w_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \left( \prod_{i=2}^{N \geq 3} S^{(i)} \right) \begin{pmatrix} \cos k_x^N w_N \\ k_x^N \sin k_x^N w_N \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} = 0. \quad (41)$$

Из уравнений (32) для компонент электромагнитного поля LSE-волны с учетом граничных условий (4) получим выражения:

$$\begin{aligned} H_{xs} &= h_{xs}^{(i)}(x) \cos k_y^n (y+b/2) \cos k_z^l z, \\ H_{ys} &= \frac{1}{\kappa_{nl}^2 \mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\mu H_{xs}), \quad H_{zs} = \frac{1}{\kappa_{nl}^2 \mu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\mu H_{xs}), \\ E_{xs} &= 0, \quad E_{ys} = \frac{ik_s}{\kappa_{nl}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\mu H_{xs}), \quad E_{zs} = \frac{-ik_s}{\kappa_{nl}^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu H_{xs}). \end{aligned} \quad (42)$$

Поперечную структуру компоненты  $H_{xs}$ -поля LSE-волны описывает функция  $h_{xs}^{(i)}(x)$  [6], модифицированная в резонаторном случае так же, как и функция  $e_{xs}^{(i)}(x)$  (см. выше), и имеющая вид:

$$h_{xs}^{(i)} = \frac{1}{\mu_i} \left( \cos k_{xs}^i (a_i - x), -\frac{\mu_i}{k_{xs}^i} \sin k_{xs}^i (a_i - x) \right) \zeta_s^{(i)}, \quad (43)$$

$$\zeta_s^{(i)} = \left( \prod_{j=i+1}^{N-1} T_s^{(j)} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\mu_N}{k_{xs}^N} \sin k_{xs}^N w_N \\ \cos k_{xs}^N w_N \end{pmatrix} D_s^{(N)} \quad (i \leq N-2), \quad (44)$$

$$\zeta_s^{(N-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_N}{k_{xs}^N} \sin k_{xs}^N w_N \\ \cos k_{xs}^N w_N \end{pmatrix} D_s^{(N)}, \quad \zeta_s^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} D_s^{(N)},$$

$D_s^{(N)}$  - произвольные константы;  $T_s^{(i)} = T^{(i)}(\omega_s)$  и матрица перехода  $T^{(i)}$  для LSE-волны определена следующим образом [6]:

$$T^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \cos k_x^i w_i & -\frac{\mu_i}{k_x^i} \sin k_x^i w_i \\ \frac{k_x^i}{\mu_i} \sin k_x^i w_i & \cos k_x^i w_i \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Собственные частоты,  $\omega_s \equiv \omega_{mnl}$ , LSE-волны определяются из дисперсионного уравнения [6]:

$$\begin{pmatrix} \cos k_x^1 w_1, -\frac{\mu_1}{k_x^1} \sin k_x^1 w_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \left( \prod_{i=2}^{N \geq 3} T^{(i)} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\mu_N}{k_x^N} \sin k_x^N w_N \\ \cos k_x^N w_N \end{pmatrix} = 0, \quad (46)$$

Запишем теперь норму электромагнитного поля  $N_s$ , введенную выражениями (33), с использованием собственных функций  $e_{xs}^{(i)}(x)$  и  $h_{xs}^{(i)}(x)$ .

Для LSM-волны норму удобнее определить, используя компоненты магнитного поля. Подставив  $H_{ys}$  и  $H_{zs}$  из (37) во второе определение нормы, получим:

$$N_s = \frac{k_s^2 b L}{16\pi\kappa_{nl}^2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \mu_i^2 \int_{a_{i-1}}^{a_i} (e_{xs}^{(i)})^2 dx. \quad (47)$$

Для LSE-волны норму удобнее определить, используя компоненты электрического поля. Подставив  $E_{ys}$  и  $E_{zs}$  из (42) в первое определение нормы, получим:

$$N_s = \frac{k_s^2 b L}{16\pi\kappa_{nl}^2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \mu_i^2 \int_{a_{i-1}}^{a_i} (h_{xs}^{(i)})^2 dx, \quad (48)$$

т.е. норма LSE-волны определяется с использованием только одной компоненты магнитного поля, перпендикулярной диэлектрическим пластинам.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная в работе система уравнений описывает самосогласованную динамику релятивистских электронных сгустков в многослойном диэлектрическом резонаторе. Динамика сгустков описывается уравнениями движения для макрочастиц (6), где электромагнитные поля задаются суперпозицией функций Грина, в которых источниками являются движущиеся макрочастицы. Найденные аналитические решения для возбуждаемых полей представлены в виде суперпозиции потенциального и вихревого полей. Для потенциального поля найдены собственные функции и условие их ортогональности, получено уравнение для определения собственных значений (волновых чисел, перпендикулярных диэлектрическим слоям). Вихревое поле представлено в идее разложения по собственным функциям LSM- и LSE-волн. Получены выражения для амплитуд этих волн. Собственные функции и уравнения для собственных частот LSM- и LSE-волн, полученные ранее для волноводной постановки возбуждения структуры, обобщены на случай резонатора. Используя собственные функции, найдены компактные формы норм этих волн в многослойном диэлектрическом резонаторе.

Исследования выполнены с частичной поддержкой Министерства энергетики США и Управления физики высоких энергий.

### THE NONLINEAR THEORY OF WAKEFIELD EXCITATION BY ELECTRON BUNCHES IN A RECTANGULAR MULTILAYERED DIELECTRIC RESONATOR

*K.V. Galaydych, G.V. Sotnikov*

The nonlinear self-consistent theory of wake field excitation in the multilayered dielectric resonators is built. Expressions for the excited fields, functionally depending on position of bunch particles in the resonator are found analytically. Excited fields are presented in the form of superposition solenoidal (LSE and LSM type) and potential fields. The nonlinear theory constructed in a general view allows investigating nonlinear dynamics of bunches in the rectangular resonator at any number of dielectric layers.

### НЕЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ЗБУДЖЕННЯ КІЛЬВАТЕРНИХ ПОЛІВ ЕЛЕКТРОННИМИ ЗГУСТКАМИ В ПРЯМОКУТНОМУ БАГАТОШАРОВОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ РЕЗОНАТОРІ

*К.В. Галайдиш, Г.В. Сотніков*

Побудовано нелінійну самоузгоджену теорію збудження кильватерних полів у багатошаровому діелектричному резонаторі. Знайдено аналітичні вирази для збуджуваних полів, що функціонально залежать від положення часток згустків у резонаторі. Збуджувані поля представлені у вигляді суперпозиції вихрових (LSE- і LSM-типу) і потенційних полів. Побудована в загальному виді нелінійна теорія дозволяє досліджувати нелінійну динаміку згустків у прямокутному резонаторі при довільній кількості діелектричних шарів.

### ЛИТЕРАТУРА

1. C. Wang, V.P. Yakovlev, J.L. Hirshfield. Rectangular dielectric-lined two-beam wakefield accelerator structure // *Proc. PAC2005*. IEEE. 2005, p.1333-1335.
2. C. Wang, V.P. Yakovlev, T.C. Marshall, et al. Rectangular dielectric-loaded structures for achieving high acceleration gradients // *Advanced Accelerator Workshop. AIP Conf. Proc.* 2006, v.877, p.910-917.
3. G.V. Sotnikov, T.C. Marshall, S.Y. Shchelkunov, et al. Two-Channel Rectangular Dielectric Wake Field Accelerator Structure Experiment // *Advanced Accelerator Workshop. AIP Conf. Proc.* 2009, v.1086, p.415-420.
4. T.C. Marshall, G.V. Sotnikov, S.V. Shchelkunov, L. Hirshfield. Analysis of a Symmetric Terahertz Dielectric-Lined Rectangular Structure for High Gradient Acceleration // *Advanced Accelerator Workshop. AIP Conf. Proc.* 2009, v.1086, p.421-426.
5. C. Wang, J.L. Hirshfield. Theory of wakefields in multizone dielectric lined waveguide // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. 2006, v.9, №3, p.031301(18).
6. G.V. Sotnikov, I.N. Onishchenko, J.L. Hirshfield, T.C. Marshall. A five-zone two-channel dielectric wakefield structure for two beam acceleration experiments at argonne national laboratory // *Вопросы атомной науки и техники. Серия «Ядерно-физические исследования»*. 2007, №3(49), p.148-152.
7. К.В. Галайдыч, П.И. Марков, Г.В. Сотников. Возбуждение кильватерных полей протяженными электронными сгустками в диэлектрическом резонаторе // *Радиотехника и электроника*. 2009, т.54, №10, с.1258-1267.
8. Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны*. 2-е изд. М.: «Радио и связь», 1988, с.440.
9. L. Pincherle. Electromagnetic waves in metal tubes filled longitudinally with two dielectric // *Phys.Rev.* 1944, v.66, №5-6, p.118-130.
10. Ю.В. Егоров. *Частично заполненные волноводы*. М.: «Советское радио», 1967, с.216.

*Статья поступила в редакцию 13.10.2009 г.*