3. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
4. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488.
5. *Харик И. Ю.* О проблеме аппроксимации функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 2. – С. 157–160.
6. *Харик И. Ю.* О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида // Мат. сб. – 1955. – **37**, № 2. – С. 353–384.
7. *Ильин В. П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1959. – **53**. – С. 64–127.
8. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.

Институт проблем искусственного интеллекта
НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 18.12.2006

УДК 517.956.4

О. В. Шиян

О динамике бегущих волн в системе уравнений Ван-дер-Поля с малой диффузией

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

The dynamics of traveling waves for a system of parabolic equations of the van-der-Pol type with small diffusion on a circle with radius r is studied. The existence, interaction, asymptotic form, and stability of these waves are analyzed. It is proved that the number of stable traveling waves increases with the radius r, and it is shown that the interaction of the waves satisfies the 1 : 2 *principle.*

Рассмотрим систему параболических уравнений ван-дер-полевского типа:

$$\begin{aligned} &\dot{u} - v = \delta(d_u \Delta u + d_{uv} \Delta v), \\ &\dot{v} + u = 2\delta(1 - u^2)v + \delta(d_{vu} \Delta u + d_v \Delta v) \end{aligned} \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi r), \qquad v(t, x) = v(t, x + 2\pi r). \tag{2}$$

Здесь точка означает дифференцирование по переменной t; $0 < \delta \ll 1$ — коэффициент трения; d_u, d_{uv}, d_{vu}, d_v — коэффициенты диффузии; Δ — одномерный оператор Лапласа; $r > 0$. Далее предполагается, что $4d_u d_v \geqslant (d_{uv} + d_{vu})^2$. В этом случае система (1)–(2) является системой параболических уравнений типа реакции-диффузии [1].

Система (1)–(2) является простейшей математической моделью автоволновой среды и изучалась в ряде работ (см. [2–4] и цитированную в них литературу).

Рассмотрим вопрос о динамике бегущих волн исходной задачи при увеличении r и фиксированных прочих параметрах. Точнее, будем интересоваться существованием, взаимодействием, асимптотической формой и устойчивостью бегущих волн краевой задачи (1)–(2). В данной работе доказано, что при $r \to \infty$ в задаче (1)–(2) растет число орбитально асимптотически устойчивых бегущих волн, т. е. имеет место явление буферности [5, 6]. Роль феномена буферности в динамике сложных систем и процессах самоорганизации рассмотрена в [5, 7]. Там же приведена достаточно полная библиография.

Для исследования динамики бегущих волн задачи (1)–(2) при увеличении r ниже использован подход, предложенный в работах [8, 9]. Этот подход приводит к конечной совокупности шестимерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая и определяет динамику бегущих волн задачи (1)–(2).

Асимптотическое разложение бегущих волн. Запишем задачу (1)–(2) в виде

$$\dot{w} = L(\delta)w + \delta R(w), \qquad w(t,x) = w(t, x + 2\pi r), \tag{3}$$

где $L(\delta)w = (A + \delta K + \delta D\Delta)w$, $w = (u,v)^T$,

$$R(w) = -2\begin{pmatrix} 0 \\ u^2 v \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_u & d_{uv} \\ d_{vu} & d_v \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $H = \{w = (u,v) \in L_2^2(]0, 2\pi r[)\}$ гильбертово пространство $2\pi r$ периодических вектор-функций.

Задача (1)–(2) или (3) порождает в пространстве H непрерывную полугруппу [1]. Выберем в качестве фазового пространства уравнения (3) пространство H. Следует отметить, что уравнение (3) инвариантно относительно полной ортогональной группы, порожденной вращениями и отражением окружности, т. е. уравнение (3) S^1-эквивариантно.

Несложно убедиться в том, что существует вектор $q_k(\delta)$:

$$q_k(\delta) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -\dfrac{k^2}{r^2} d_{uv} \\ \dfrac{k^2}{r^2} d_u + \lambda_k \end{pmatrix} + O(\delta^2)$$

такой, что

$$L(\delta)\exp(ik\theta)q_k(\delta) = \widetilde{\lambda}_k \exp(ik\theta) q_k(\delta), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\lambda}_k(\delta) = i + \delta\lambda_k + O(\delta^2), \qquad \lambda_k = \left[1 - \frac{k^2}{2r^2}(d_u + d_v)\right] + i\frac{k^2}{2r^2}(d_{vu} - d_{uv}), \\ k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \lambda_{-k} = \overline{\lambda}_k. \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда следует, что при увеличении r и прохождении им через $r_k^* = (k/\sqrt{2})(d_u + d_v)^{1/2}$ каждый раз размерность неустойчивого многообразия нулевого решения уравнения (3) повышается на два порядка. Построим бифурцирующие из нуля при прохождении r точки r_k^*

решения уравнения (3). С этой целью, следуя одночастотному методу [10, 11], будем искать решения уравнения (3) в виде

$$w = ze^{ik\theta}q_k(\delta) + \bar{z}e^{-ik\theta}\bar{q}_k(\delta) + \delta\sigma_1(ze^{ik\theta}, \bar{z}e^{-ik\theta}) + \delta^2\sigma_2(ze^{ik\theta}, \bar{z}e^{-ik\theta}) + \cdots, \tag{5}$$

где переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\widetilde{\lambda}_k(\delta) + \delta c_1|z|^2 + \delta^2 c_2|z|^3 + \cdots). \tag{6}$$

Подставим (5), (6) в уравнение (3) и выполним замену $ze^{ik\theta} \mapsto z$. Затем приравняем в обеих частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых степенях δ. В результате относительно σ_1, $\sigma_2, \ldots$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. Из условия разрешимости уравнения относительно σ_1 находим, что $c_1 = -1$, а затем находим σ_1 в той же форме, что и правая часть уравнения относительно σ_1. Далее, из уравнения относительно σ_2 находим, как и выше, c_2, а затем σ_2. Отметим, что процесс последовательного построения c_k, σ_k неограниченно продолжим.

Согласно проведенному анализу, уравнение (3) имеет приближенное по невязке порядка δ^2, периодическое по t решение $\widehat{w}_k^+ = \widehat{w}_k(\eta^+, \delta)$:

$$\widehat{w}_k^+ = 2(\operatorname{Re}\lambda_k)^{1/2}\begin{pmatrix}\cos\eta^+\\ -\sin\eta^+\end{pmatrix} + 2\delta(\operatorname{Re}\lambda_k)^{1/2}\begin{pmatrix}-\dfrac{k^2}{r^2}d_{uv}\cos\eta^+\\ \left(\dfrac{k^2}{r^2}d_u + \operatorname{Re}\lambda_k\right)\cos\eta^+ - \operatorname{Im}\lambda_k\sin\eta^+\end{pmatrix} -$$
$$-\delta(\operatorname{Re}\lambda_k)^{3/2}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin 3\eta^+\\ 3\cos 3\eta^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin\eta^+\\ \cos\eta^+\end{pmatrix}\right], \tag{7}$$

где $\eta^+ = \eta^+(\delta) = \widehat{\omega}_k t + k\theta$, $\widehat{\omega}_k = \widehat{\omega}_k(\delta) = 1 + \delta\operatorname{Im}\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, что приближенным решением уравнения (3) является также $\widehat{w}_k^- = \widehat{w}_k(\eta^-, \delta)$, где $\eta^- = \widehat{\omega}_k t - k\theta$.

Следует отметить, что приближенные по невязке порядка δ, периодические по t решения уравнения (3) были построены в работе [4] методом Ван-дер-Поля.

Устойчивость бегущих волн $\widehat{\mathbf{w}}_{\mathbf{k}}^+$. Перейдем теперь к вопросу об устойчивости бегущей волны $\widehat{w}_k^+$. Рассмотрим вопрос об устойчивости бегущей волны w_k^+ в связи с воздействием на нее пары бегущих волн $\widehat{w}_s^-$, $\widehat{w}_{2k+s}^+$, $s = 0, 1, 2 \ldots$. С этой целью, согласно [9], построим приближенные решения уравнения (3) в виде

$$w = z_1e^{ik\theta}q_k(\delta) + z_2e^{-is\theta}q_s(\delta) + z_3e^{in\theta}q_n(\delta) + \text{к.с.} + \delta\sigma_1(z_1e^{ik\theta}, z_2e^{-is\theta}, z_3e^{in\theta}, \text{к.с.}), \tag{8}$$

где $n = 2k + s$, а $z = (z_1, z_2, z_3)$ удовлетворяет S^1-эквивариантной системе уравнений:

$$\dot{z}_j = z_j(\mu_j + \delta f_j(z, \bar{z}) + \cdots), \qquad j = 1, 2, 3, \tag{9}$$

где $\mu_1 = \widetilde{\lambda}_k$, $\mu_2 = \widetilde{\lambda}_{-s}$, $\mu_3 = \widetilde{\lambda}_n$, $\widetilde{\lambda}_{-s} = \overline{\widetilde{\lambda}}_s$.

Подставим (8), (9) в уравнение (3) и выполним замену $z_1e^{ik\theta} \mapsto z_1$, $z_2e^{-is\theta} \mapsto z_2$, $z_3e^{in\theta} \mapsto z_3$. Затем приравняем в обеих частях полученного равенства коэффициенты при δ. В результате относительно σ_1 получим линейное неоднородное уравнение

$$B\sigma_1(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}), \tag{10}$$

где

$$Bpz^\alpha\overline{z}^\beta=(i\langle e,(\alpha-\beta)\rangle E-A)pz^\alpha\overline{z}^\beta,\qquad p\in\mathbb{R}^2,$$

$$z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3},\qquad \overline{z}^\beta=\overline{z_1}^{\beta_1}\overline{z_2}^{\beta_2}\overline{z_3}^{\beta_3},\qquad e=(1,-1,1),$$

E — единичная матрица, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $F(z,\overline{z})$ — форма третьей степени по переменным z, $\overline{z}$.

Из необходимого условия разрешимости уравнения (10) находим функции $f_j(z,\overline{z})$, удовлетворяющие S^1-эквивариантности. Оставшиеся в результате указанного выбора $f_j(z,\overline{z})$ резонансные мономы $z^\alpha\overline{z}^\beta$, т. е. те, для которых

$$\det(i\langle e,(\alpha-\beta)\rangle E-A)=0,$$

в соответствии с методом Галеркина, зануляем и затем находим σ_1. Подставим найденные значения $f_j(z,\overline{z})$ в (9). В результате получим следующую резонансную S^1-эквивариантную систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot z_1&=z_1(i-\delta(-\lambda_k+|z_1|^2+2|z_2|^2+2|z_3|^2)),\\
\dot z_2&=z_2(-i-\delta(-\overline{\lambda_s}+2|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_3|^2))-\delta z_1^2\overline{z}_3,\\
\dot z_3&=z_3(i-\delta(-\lambda_n+2|z_1|^2+2|z_2|^2+|z_3|^2))-\delta z_1^2\overline{z}_2.
\end{aligned}\tag{11}$$

Легко убедиться, что система (11) имеет периодическое по t решение

$$\varphi_k^+(t,\delta)=(\operatorname{Re}\lambda_k)^{1/2}(e^{i\omega_k t},e^{-i\omega_k t},0,\ldots,0)^T,\qquad \widehat{\omega}_k=1+\delta\operatorname{Im}\lambda_k.$$

Этому решению соответствует бегущая волна $\widehat{w}_k^+$ уравнения (3). Анализ устойчивости $\varphi_k^+(t,\delta)$ приводит к симметрической блочно-диагональной матрице. Ее блоками являются матрица

$$\begin{pmatrix}-\operatorname{Re}\lambda_k & -\operatorname{Re}\lambda_k\\ -\operatorname{Re}\lambda_k & -\operatorname{Re}\lambda_k\end{pmatrix}$$

и матрицы A_{k^+,s^-}, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, где

$$A_{k^+,s^-}=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\lambda_s-2\operatorname{Re}\lambda_k+i(\operatorname{Im}\lambda_k+\operatorname{Im}\lambda_s) & -\operatorname{Re}\lambda_k\\ -\operatorname{Re}\lambda_k & \operatorname{Re}\lambda_n-2\operatorname{Re}\lambda_k+i(\operatorname{Im}\lambda_n-\operatorname{Im}\lambda_k)\end{pmatrix},\tag{12}$$

$n=2k+s$.

Таким образом, характер устойчивости решения $\varphi_k^+(t,\delta)$ системы (11), а значит и бегущей волны $\widehat{w}_k^+$ уравнения (3), определяется матрицами A_{k^+,s^-}, $\overline{A}_{k^+,s^-}$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости бегущей волны $\widehat{w}_k^+$ в связи с воздействием на нее пары бегущих волн $\widehat{w}_s^+$, $\widehat{w}_{2k-s}^+$, $0\leqslant s<k$. Рассуждая, как и выше, убеждаемся, что это воздействие описывается системой (11), где $n=2k-s$, $0\leqslant s<k$, $\overline{\lambda}_s\mapsto\lambda_s$, $-i\mapsto i$. Устойчивость же $\widehat{w}_k^+$ относительно указанного воздействия определяется матрицами A_{k^+,s^+}, $\overline{A}_{k^+,s^+}$, где

$$A_{k^+,s^+}=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\lambda_s-2\operatorname{Re}\lambda_k+i(\operatorname{Im}\lambda_k-\operatorname{Im}\lambda_s) & -\operatorname{Re}\lambda_k\\ -\operatorname{Re}\lambda_k & \operatorname{Re}\lambda_n-2\operatorname{Re}\lambda_k+i(\operatorname{Im}\lambda_n-\operatorname{Im}\lambda_k)\end{pmatrix},\tag{13}$$

$n=2k-s$, $0\leqslant s<k$.

Обоснованием проведенного выше анализа устойчивости бегущих волн $\widehat{w}_k^+$ уравнения (3) является следующая теорема.

Теорема. *Пусть для некоторого фиксированного* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $r > 0$ *выполнено условие* $r^2 > k^2(d_u + d_v)/2$. *Тогда уравнение* (3) *имеет периодические по* t *решения* $w_k^\pm = w_k(\eta^\pm, \delta)$, *где* $\eta^\pm = \omega_k(\delta)t \pm k\theta$, $\omega_k(\delta) = \widehat{\omega}_k(\delta) + O(\delta^2)$, $\theta = x/r$, $w_k^\pm = \widehat{w}_k^\pm + O(\delta^2)$, *а* $\widehat{w}_k^+$ *удовлетворяет равенству* (7).

Бегущая волна w_k^+ *экспоненциально орбитально устойчива тогда и только тогда, когда:*

1) для любого $s \geqslant 0$ *матрица* A_{k^+,s^-} *устойчива;*

2) для любого $0 \leqslant s < 2k$ *матрица* A_{k^+,s^+} *устойчива.*

Доказательство теоремы следует методу, использованному в [8, 12].

Опираясь на теорему, получено достаточное условие экспоненциальной орбитальной устойчивости бегущей волны w_k^+ задачи (3):

$$\frac{k}{r} < \sqrt{\frac{a}{2b^2 + 3a^2}} + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{14}$$

где $a = \dfrac{d_u + d_v}{2}$, $b = \dfrac{d_{vu} - d_{uv}}{2}$ — эффективные длины диффузии [4].

Отсюда следует, что число экспоненциально орбитально устойчивых бегущих волн задачи (1)–(2) неограниченно растет, когда $r \to \infty$, при этом наличие перекрестной диффузии d_{uv}, d_{vu} замедляет этот рост. Следует отметить, что при $b = 0$ условие устойчивости бегущей волны w_k^+ согласуется с условием устойчивости, полученным в работе [4].

Легко устанавливается, что так называемая стоячая волна w_0 задачи (1)–(2) существует при любом выборе параметра r и является экспоненциально орбитально устойчивой. При увеличении параметра r и прохождении его через значение r_1^* из неустойчивого нулевого состояния равновесия бифурцирует пара бегущих волн $w_1^\pm$, которая в момент рождения является также неустойчивой. Возрастая по амплитуде, при увеличении r и прохождении его через критическое значение $r_{\text{кр}}^2 \simeq (2b^2/a + 3a)$, бегущая волна w_1^+ преодолевает давление бегущих волн w_0, w_2^+ и обретает устойчивость. Таким образом, на устойчивость бегущей волны w_1^+ наиболее сильное влияние оказывают пары "соседних" бегущих волн w_2^+, w_0 и w_1^-, w_3^+.

Таким образом, в результате проведенного анализа динамики бегущих волн задачи (1)–(2) установлено следующее:

во-первых, в области $r^2 > ak^2$ существуют периодические по t решения типа "бегущая волна", асимптотические разложения которых, с точностью порядка малости δ^2, имеют вид (7); во-вторых, при $r \to \infty$ число экспоненциально орбитально устойчивых бегущих волн неограниченно растет (наличие перекрестной диффуции лишь немного тормозит этот рост), т. е. в данной задаче имеет место явление буферности [5, 6]; в-третьих, взаимодействие бегущих волн подчинено принципу $1:2$ [9].

Характер устойчивости бегущей волны w_k^+ *полностью определяется воздействием на нее пар бегущих волн* w_s^-, w_{2k+s}^+, $s \geqslant 0$, *и* w_s^+, w_{2k-s}^+, $0 \leqslant s < k$.

Воздействие на w_k^+ указанных пар бегущих волн описывается системой (11), где $n = 2k + s$ в первом и $n = 2k - s$, $\overline{\lambda}_s \mapsto \lambda_s$, $-i \mapsto i$ во втором случае.

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – Москва: Наука, 1989. – 290 с.
2. *Романовский Ю. П., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическое моделирование в биофизике. – Москва: Наука, 1975. – 237 с.

3. *Полякова М. С., Романовский Ю. М., Сидорова Г. А.* О синхронизации автоколебательных химических реакций, протекающих в пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Физ. астрон. – 1968. – № 6. – С. 95–98.
4. *Балкарей Ю. И., Никулин М. Г.* О нелинейных волнах в среде из осцилляторов Ван-дер-Поля, связанных диффузией // Журн. техн. физики. – 1979. – **49**, № 2. – С. 231–236.
5. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. – Москва: Физматлит, 2004. – 406 с.
6. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в теории горения // Докл. АН. – 2004. – **396**, № 2. – С. 170–173.
7. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – Москва: Физматлит, 2005. – 430 с.
8. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Мат. физика: анализ и геометрия. – 2005. – **1**, № 1. – С. 3–30.
9. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // Докл. АН. – 2006. – **406**, № 6. – С. 738–741.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1963. – 410 с.
11. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища шк., 1976. – 357 с.
12. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. – 1989. – **130(172)**, № 4(8). – С. 488–499.

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

Поступило в редакцию 12.12.2006