Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 2, 289 – 300

К граничному поведению квазиконформных отображений

Владимир А. Зорич

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье обсуждаются открытые вопросы теории квазиконформных отображений, примыкающие к области исследований профессора Г. Д. Суворова, памяти которого посвящена эта работа.

2010 MSC. 30C62, 30C65, 30D40, 30F25, 30L10, 31B25, 53D99.

Ключевые слова и фразы. Квазиконформное отображение, граничное поведение, идеальная граница, простые концы, метрика Карно-Каратеодори.

1. Введение

Каждому, кто слушал даже краткий курс комплексного анализа, известна теорема Римана о конформном отображении односвязной области плоскости на каноническую область – круг. Но мало кто знает, как ведёт себя такое отображение на границе области. Граница отображаемой области, вообще говоря, может быть очень не похожа на привычную простую кривую. Что же тогда соответствует точке на граничной окружности круга, в который (или откуда) идёт отображение?

Соответствие границ при конформных отображениях изучил и описал Каратеодори, который дал ответ на поставленный вопрос [1]. По словам М. А. Лаврентьева [2], в этом смысле Каратеодори завершил теорему Римана.

Сам М. А. Лаврентьев, развивая теорию конформных отображений, не раз обращался к их граничному поведению [3]. Идеи работ Каратеодори и Лаврентьева, по-видимому, и дали основной импульс исследованиям Георгия Дмитриевича Суворова в этом направлении. Достаточно взглянуть на содержание и библиографию первой книги Г. Д. Суворова [4].

Статья поступила в редакцию 15.05.2019

Более поздняя книга Г. Д. Суворова [5] содержит уже обширную библиографию работ как самого автора, так и его учеников, сотрудников и коллег. Работы посвящены граничному поведению различных классов отображений, исходно связанных с конформными отображениями.

2. Теория Каратеодори

Пусть вслед за Каратеодори мы желаем пополнить односвязную область плоскости идеальной границей, состоящей из некоторых элементов, которые Каратеодори назвал *простыми концами*, и желаем на пополненной этой идеальной границей области ввести топологию так, чтобы при конформном отображении на круг простым концам соответствовали точки границы круга, а конформное отображение продолжалось на границу до гомеоморфизма замкнутых областей.

Каратеодори осуществил такое пополнение. Не повторяя конструкции Каратеодори, напомним лишь кое-что полезное для адекватного понимания дальнейшего.

Возьмём на плоскости гантель: два больших круга, соединённых узкой полоской. Отобразим эту область конформно на круг так, чтобы в центр круга перешёл центр одного из двух кругов гантели. Тогда всё, что лежит за этим кругом при таком отображении, попадёт в малую окрестность какой-то точки граничной окружности. Это будет так, даже если вы будете сильно раздувать вторую часть гантели или делать с ней ещё что-нибудь.

Приведённый пример отражает следующее общее явление. При однолистном конформном отображении круга около каждой точки граничной окружности можно выделить стягивающуюся к ней последовательность дуг с концами на границе, диаметр образов которых стремится к нулю. (Это верно и для квазиконформных отображений, и для отображений с ограниченным интегралом Дирихле, ...)

Рассмотрим образы этих дуг. Это разрезы односязной области. Такая последовательность разрезов малого диаметра в любой односвязной области порождает последовательность вложенных друг в друга областей, которые и дадут *простой конец*, которому при отображении области на круг будет соответствовать точка граничной окружности. Эти разрезы можно делать, видя саму область, не привлекая больше отображение, игравшее вспомогательную роль.

Пополнение метрического пространства, как известно, осуществляется последовательностями Коши, а здесь роль фундаментальных последовательностей выполняют последовательности вложенных друг в друга областей, относительная граница которых имеет диаметр, стремящийся к нулю.

Конструкция Каратеодори, в общем-то, топологическая, хотя выполнена с оглядкой на конформные отображения. С учётом этого обстоятельства не удивительно, что соответствие границ по простым концам Каратеодори происходит не только при конформных отображениях. (См., например, книгу [5] и библиографию в ней.)

3. Каратеодори, Кёбе и все, все, все

Чтобы разбавить формальный текст, расскажу в этом месте небольшую историю собственного соприкосновения с теорией Каратеодори.

В конце пятидесятых – начале шестидесятых годов прошлого столетия началось интенсивное исследование квазиконформных отображений областей пространства (размерности выше двух). Помню, что в 1960 году, на пятом (тогда завершающем) курсе мехмата МГУ я получил от своего научного руководителя, Бориса Владимировича Шабата, задание: исследовать граничное поведение квазиконформных автоморфизмов шара. В дипломной работе я доказал, что такой автоморфизм всегда продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара. На этой задаче я приобрёл некоторый опыт работы с конформным инвариантом – конформной ёмкостью, которая квазиинвариантна при квазиконформных отображениях. Впоследствии я использовал этот опыт и конформную ёмкость для построения многомерного аналога теории Каратеодори для квазиконформных отображений шара. Через три года, в 1963 году, это стало частью моей кандидатской диссертации. Но там было ещё кое-что побочное, о чём я сейчас и хочу сказать.

Выучив классику и сделав что-то самостоятельно, я обратил внимание на то, что соответствие границ по простым концам Каратеодори осуществляется не только при конформных или квазиконформных отображениях, для которых теория исходно и строилась. Возник естественный вопрос о том, каков же максимально широкий класс отображений, при которых соответствие границ описывается в рамках теории Каратеодори?

Этот класс оказался следующим. (Приведу определение.)

Расстояние между двумя множествами, лежащими в области, будем измерять нижней гранью диаметров кривых, лежащих в области и соединяющих эти множества. Если эта величина равна нулю, будем говорить, что множества близки. Теперь в качестве множеств будем брать только связные, а в качестве отображений только такие гомеоморфизмы открытой области (круга, шара), которые сохраняют близость связных подмножеств (т. е. образы близки тогда и только тогда, когда близки прообразы).

Все конкретные классы отображений, подчиняющихся теории Каратеодори (конформные, квазиконформные и дальше), обладают этим свойством. Можно показать, что указанное условие на самом деле необходимо и достаточно для того, чтобы граничное поведение отображения круга (шара) происходило по простым концам Каратеодори [6].

В теории граничного поведения конформных отображений круга есть сравнительно простая, но весьма полезная теорема Кёбе, утверждающая, что при конформном отображении круга множество точек границы, отвечающих достижимым точкам границы образа круга, всюду плотно на граничной окружности отображаемого круга.

(Речь здесь идёт о точках граничной окружности, в которых отображение имеет асимптотическое значение, т. е. имеется путь, лежащий в отображаемом круге и идущий в эту точку границы, вдоль которого отображение имеет предел.)

В двумерном случае нетрудно показать, что отображение круга уважает теорию Каратеодори тогда и только тогда, когда оно уважает теорему Кёбе.

Мне очень хотелось доказать такую теорему о связи теории Каратеодори и теоремы Кёбе для отображений шара. Но для этого было мало доказать всюду плотность таких точек на граничной сфере, а нужна была опять всюду плотность на любом континууме, что, конечно, намного тоньше. Для квазиконформных отображений с использованием конформной ёмкости это делается просто. Вся теория для квазиконформного случая у меня уже давно была готова, а с этой теоремой Кёбе я никак не мог справиться. Понимал, что это, возможно, никому и не нужно, но было острое, наверное спортивное, желание иметь законченный результат. Потратив массу времени и сил, наконец, доказал такую теорему Кёбе.

Почему я вдруг об этом здесь пишу? Доказательство я поместил в сборнике [6] трудов одной из конференций, главным организатором которых всегда был Георгий Дмитриевич Суворов. Этот материал, наряду с исходно главным, касавшимся квазиконформных отображений, был помещён в мою кандидатскую диссертацию, оппонентами в которой были Алексей Иванович Маркушевич и Семён Яковлевич Хавинсон. Защита прошла благополучно, а после защиты Семён Яковлевич мне говорит: “Ну я и намучился, разбирая Вашу мухобойную лемму к теореме Кёбе”. Не знаю, хватило ли ещё у кого-нибудь, кроме оппонентов, терпения разбирать доказательство моей теоремы Кёбе и мухобойной, с длиннющим доказательством, леммы к ней, но, признаюсь, я тоже с этим намучился. Зря, не зря, – не обсуждаю; сделано и идём дальше. А Георгию Дмитриевичу Суворову низкий поклон за конференции и школы, которые он организовывал, и за публикацию их трудов, которую он стимулировал.

4. Замечания о метризации

Итак, Каратеодори пополнил область идеальной границей и на пополненной области определил топологию так, что конформное отображение круга на эту область продолжается до гомеоморфного отображения замкнутого круга на пополненную идеальной границей область.

Знания одного этого факта достаточно, чтобы понять, что процедура Каратеодори допускает метризацию в том смысле, что в односвязной области можно определить новую метрику, стандартная процедура пополнения по которой присоединит в точности простые концы по Каратеодори. Такая метрика, конечно, не единственна, что и подтверждают работы многих авторов (см., например, библиографию в [5]). Изучались различные относительные расстояния и их изменения при отображениях различных классов.

Метрику, отвечающую простым концам Каратеодори, можно вводить также через конформную ёмкость. Такая метрика инвариантна при конформных отображениях и квазиинвариантна при квазиконформных отображениях.

Конформная ёмкость бывает полезна и в других связанных с идеальной границей аспектах. Так она позволяет определить конформный тип многообразия, который, в свою очередь, отвечает за свойства функций и отображений. Например, классическая теорема Лиувилля о постоянстве целой ограниченной голоморфной функции на плоскости на самом деле отражает тот факт, что евклидова плоскость и плоскость Лобачевского (единичный круг) имеют различный конформный тип, причём первая не допускает погружения во вторую. Голоморфность тут не нужна, нужно только поведение функции (отображения) на бесконечности. То же касается, например, так называемой основной теоремы алгебры о существовании комплексного корня многочлена. Тут важен не многочлен, а его старший член, который в окрестности бесконечности определяет степень отображения.

Когда от топологических конструкций Каратеодори переходят к их метрическим вариантам, то естественно появляются вопросы оценки возможного изменения такой метрики при изучаемых отображениях. Мы скажем об этом ниже. А здесь заметим только, что даже топологическая структура идеальной границы не всегда описана даже в очень конкретных случаях. Например, если идеальная граница вводится посредством конформной ёмкости, то, как известно, в случае евклидова пространства это всегда точка, для пространства Лобачевского это сфера соответствующей размерности, а вот для группы Гейзенберга, наделённой инвариантной римановой метрикой, по моему, соответствующая идеальная граница не описана, хотя разумное предположение на этот счёт сделать можно. Так, в случае трёхмерной группы Гейзенберга она, скорее всего, гомеоморфна одномерной окружности.

5. Проявления многомерности

Более детальное по сравнению с топологическим описание граничного поведения отображений нужного класса не только интересно само по себе, но порой имеет замечательные последствия.

Рассмотрим уже упоминавшийся пример квазиконформных автоморфизмов единичного шара. Мы уже знаем, что такой автоморфизм продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара. В работе [7] Геринг установил, что квазиконформный автоморфизм открытого шара не только продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара, но что возникающее при этом *отображение граничной сферы оказывается квазиконформным.*

Это обстоятельство было с успехом использовано Мостовым в его красивой работе [8] о жесткости пространственных гиперболических форм. Мостов, в частности, показал, что *если два компактных римановых многообразия одинаковой постоянной отрицательной кривизны диффеоморфны, а их размерность больше двух, то они изометричны.*

Вспоминая теорему униформизации Клейна–Пуанкаре–Кёбе и модель Пуанкаре планиметрии Лобачевского в круге, нетрудно понять, что это находится в полном контрасте с существованием модулей конформных структур на двумерных поверхностях.

Добавим ещё кое-что, связанное со спецификой многомерного случая.

Круг можно конформно отобразить на круг с выброшенным радиусом, а шар нельзя отобразить на шар с выброшенным радиусом не только конформно, но даже квазиконформно (со сколь угодно большим, но конечным коэффициентом квазиконформности). Для доказательства этого факта достаточно пространственного аналога теории Каратеодори.

Интересно, что даже если вместо шара с выброшенным радиусом взять жорданову область с остриём направленным внутрь вдоль радиуса, то ситуация не изменится, а если вы добавите к шару такое остриё, – шип, торчащий наружи, то отображение уже возможно. Например, шар можно квазиконформно отобразить на бесконечный цилиндр.

Эти запреты, в конечном счёте, – наследие конформной жёсткости областей пространства.

В многомерном случае, в отличие от двумерного случая, пространство Тайхмюллера, квазиконформно не эквивалентных между собой топологических шаров, оказывается не только бесконечномерным, но даже не сепарабельным [9].

6. Устранимые и неустранимые особенности

Хорошо известно, что если голоморфная функция ограничена в окрестности изолированной особой точки, то функция продолжается в эту точку, оставаясь голоморфной. Такая теорема об устранении изолированной особенности справедлива и для гармонических функций, и для решений уравнения Бельтрами и, вообще, для решений уравнений эллиптического типа.

Если же голоморфная функция в изолированной особой точке не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного), то, по классической теореме Пикара, в любой проколотой окрестности такой особой точки функция обязана принимать все значения в расширенной комплексной плоскости, за возможным исключением только двух.

Такая же теорема верна для решений уравнения Бельтрами, т. е. для квазирегулярных (однолистных и неоднолистных квазиконформных) отображений, называемых также отображениями с ограниченным искажением.

В многомерном случае для квазирегулярных отображений, рассматриваемых в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$, тоже имеет место подобная теорема, но количество выпускаемых значений, хотя и конечно, может быть любым. Оно зависит от коэффициента квазиконформности (квазирегулярности) отображения.

Если же известно, что отображение $f : U \setminus o \to \mathbb{R}^n$ локально гомеоморфно в проколотой окрестности $U \setminus o$ некоторой точки o (т. е. не имеет в $U \setminus o$ ветвлений или, как в этом случае говорят геометры, является погружением $U \setminus o$ в $\mathbb{R}^n$), то при $n > 2$ найдётся меньшая проколотая окрестность той же точки, где отображение f однолистно (т. е. инъективно или, в геометрической терминологии, является вложением).

Эта теорема является обобщением теоремы о глобальном гомеоморфизме, утверждающей, что *квазиконформное погружение* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *при* $n > 2$ *всегда является вложением и* $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Таким образом, если квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимо локально, то при $n > 2$ оно обратимо и в целом.

Открытым остаётся следующий модельный вопрос о возможности усиления этой теоремы путём усиления теоремы о поведении квазиконформного погружения в проколотой окрестности точки.

Пусть $n = 3$. Заменим точку o отрезком I и рассмотрим проколотую окрестность $U \setminus I$ отрезка I в $\mathbb{R}^3$. Пусть известно, что квазиконформное отображение $f : U \setminus I \to \mathbb{R}^3$ локально однолистно. Верно ли, что тогда найдётся меньшая проколотая окрестность этого отрезка, где отображение уже однолистно?

Добавим ещё кое-что по поводу теоремы Пикара. Выше мы всюду говорили, что отображение идёт в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь погружение (иммерсию) одного риманова многообразия размерности $n > 2$ в другое риманово многообразие той же размерности. Опишем поведение вложения в неустранимой изолированной особой точке, предполагая, что вложение квазиконформно в проколотой окрестности этой точки.

Оказывается, в этом случае исключительных значений не будет вообще.

Более того (и вот это надо проверить!) многообразие, куда идёт отображение, должно иметь очень специальный топологический вид (иначе неустранимости точки не будет).

Многообразие образа должно быть гомеоморфно либо тору Хопфа (фактору пространства $\mathbb{R}^n$ по группе гомотетий $x \mapsto 2x$ или, что то же самое, $S^{n-1} \times S^1$), либо прямому произведению $\mathbb{R}^k \times T^{n-k}$ пространства $\mathbb{R}^k$ и стандартного тора T^{n-k} при $1 \leq k < n$.

7. Каратеодори в математике и физике

Мы начали с теории Каратеодори, относящейся к граничному поведению конформных и более общих отображений. В математике имя Каратеодори, как известно, появляется в разных областях и по разным поводам. Но Каратеодори, как и Пуанкаре, известен также своими работами физического содержания. Упомянем здесь исследования Каратеодори, относящиеся к математической формализации классической (феноменологической) термодинамики, связавшие её с анализом и геометрией [11].

В классической термодинамике с термодинамической системой (через законы сохранения энергии – первое начало термодинамики) связывается опредлённая 1-форма ω, называемая *формой притока тепла.* Она отвечает за теплообмен системы с окружением. Переходы из одного термодинамического состояния системы в другое, происходящие без обмена теплом с окружающей средой, называются адиабатическими переходами. Таким образом, адиабатические переходы идут вдоль нулей (ядер $\ker\omega$) этой 1-формы притока тепла.

Каратеодори сформулировал следующий, абсолютно понятный физикам, принцип: в любой окрестности термодинамического состояния системы есть состояния, в которые невозможно перейти адиабатически. Нарушение этого принципа означало бы нарушение общепринятого второго начала термодинамики. Собственно, формулируя этот принцип, Каратеодори как раз и хотел дать математически последовательное изложение второго начала термодинамики. Будем считать, что я пояснил мотивировку того, к чему теперь перехожу.

Предположим, что в пространстве, например в $\mathbb{R}^3$, имеется 1-форма ω. Её ядра $\ker\omega$ образуют распределение плоскостей (гиперплоскостей) в пространстве. Разрешается ходить только по путям, касающимся плоскостей распределения. Пусть известно, что в любой окрестности любой точки пространства имеются точку, в которые нельзя перейти по такому (допустимому для данного распределения, в указанном смысле контактному) пути.

Доказанная Каратеодори теорема утверждает, что в этом случае распределение $\{\ker\omega\}$ гиперплоскостей интегрируемо (имеет интегральные поверхности, которых оно касается).

В физической интерпретации это приводит к существованию функции энтропии – ключевого объекта второго начала термодинамики. Но мы остановимся на математических связях.

По существу Каратеодори доказал, что *соединимость точек пространства путями, допустимыми для данного распределения, возможна в том и только в том случае, когда распределение не является интегрируемым.*

Вопрос же интегрируемости пфаффовых форм и соответствующих им распределений решает классическое условие (теорема) Фробениуса. Это делает теорему Каратеодори при ответе на вопрос соединимости точек пространства путями, допустимыми для данного распределения, в той же мере эффективной, в какой эффективна теорема Фробениуса при ответе на вопрос об интегрируемости самого распределения.

8. Метрика Карно–Каратеодори

Если при наличии распределения пространство оказывается связным (допустимыми для распределения путями), то в пространстве естественно возникает новая метрика, в которой расстояние между точками измеряется нижней гранью длин допустимых путей, соединяющих точки. Эту метрику называют *метрикой Карно–Каратеодори* или C-C-метрикой. Её термодинамические корни описаны выше.

Квазиконформные отображения рассматривают и в этой метрике. В частности, для такого субриманова пространства Карно–Каратеодори тоже имеет место теорема о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных погружений.

Отметим, наконец, что если на пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) смотреть как на группу Гейзенберга H_1 и, взяв в начале координат плоскость $z = 0$, разнести её под действием групповой операции по всему пространству $\mathbb{R}^3$, мы получим неинтегрируемое распределение. Тогда в $\mathbb{R}^3$ будет, с одной стороны, метрика Карно–Каратеодори, а, с другой стороны, инвариантная риманова метрика на группе Гейзенберга. Интересно, что метрическая размерность $\mathbb{R}^3$ по отношению к первой метрике равна 4, а по отношения ко второй 3. При этом в первом случае пространство будет иметь конформно параболический тип с одноточечной идеальной границей, а во втором случае оно будет конформно гиперболического типа. Именно в этом последнем случае, как мы говорили выше, обсуждая вопросы пополнения пространства, естественная идеальная граница, скорее всего, будет гомеоморфна одномерной окружности.

Поскольку группа Гейзенберга с инвариантной римановой метрикой не допускает квазиконформных погружений в себя [12], это ещё раз показывает, что теорема о глобальном гомеоморфизме, скорее всего, может быть распространена и на n-мерные римановы многообразия конформно гиперболического типа, граница которых имеет размерность, меньшую, чем $n - 1$. При доказательстве, конечно, уже надо использовать более тонкие факты о граничном поведении квазиконформных отображений, частично упомянутые выше. Полезно иметь в виду, что квазиконформное отображение не меняет конформную размерность риманова многообразия. Уже по топологическим соображениям это означает, что если граница n-мерного многообразия имела размерность, меньшую чем $n - 1$, то такое риманово многообразие не допускает квазиконформного погружения в себя.

9. Заключительный комментарий

Этот краткий обзор написан на основе источников [13–15], где при необходимости можно найти некоторые подробности, пояснения, а также дополнительную информацию по темам, которых мы здесь не касались.

Литература

[1] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* // Math. Ann., **73** (1913), 323–370.

[2] М. А. Лаврентьев, *Избранные труды. Математика и Механика*, М., Наука, 1990.

[3] М. А. Лаврентьев, *О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях* // Докл. АН СССР, **4** (1936), No. 5, 207–210.

[4] Г. Д. Суворов, *Семейства плоских топологических отображений*, Новосибирск, Сибирское отделение Академии Наук СССР, 1965.

[5] Г. Д. Суворов, *Обобщённый принцип длины и площади в теории отображений*, Киев, Наукова Думка, 1985.

[6] В. А. Зорич, *Класс Каратеодори и пространственный аналог теоремы Кёбе* // Теория отображений, её обобщения и приложения, Сборник научных трудов, Киев, Наукова Думка, 1982, 92–101.

[7] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[8] G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms* // Publ. IHES, **34** (1968), 53–104.

[9] F. W. Gehring, J. Väisälä, *The coefficients of quasiconformality of domains in space* // Acta Math., **114** (1965), 1–70.

[10] В. А. Зорич, *Квазиконформные погружения римановых многообразий и теорема пикаровского типа* // Функц. анализ и его прил., **34** (2000), No. 3, 37–48.

[11] C. Carathéodory, *Untersuhungen über die Grundlagen der Thermodynamik* // Mathematische Annalen, **67** (1909), 355–386.

[12] I. Hololpainen, S. Rickman, *Quasiregular mappings, Heisenberg group, and Picard's theorem* // Proceeings of the Fourth Finnish–Polish Summer School in Complex Analysis, Jyväskylä, Finland, 1992 / ed. J.Lawrinowicz et al. Jyväskylä Mathematisches Institut, Jyväskylä Univ., 1993, 25–35, Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst., V. 55.

[13] В. А. Зорич, *Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий* // Успехи матем. наук, **57** (2002), No. 3 (345), 3–28.

[14] В. А. Зорич, *Граничное поведение автоморфизмов гиперболического пространства* // Успехи матем. наук, **72** (2017), No. 4 (436), 67–94.

[15] В. А. Зорич, *Математические аспекты классической термодинамики*, М., МЦНМО, 2019.

Сведения об авторах

Владимир Антонович Зорич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-Mail: `vzor@mccme.ru`