Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 1, 2 – 9

Некоторые свойства квазисимметрий в метрических пространствах

Елена С. Афанасьева, Виктория В. Билет

(*Представлена А. А. Довгошеем*)

Статья посвящена памяти профессора Богдана Боярского

Аннотация. Пусть (X, d, μ), (Y, d', μ') – α-регулярные по Альфорсу метрические пространства с $\alpha > 0$ и локально конечными борелевскими мерами μ и μ' соответственно. В данной работе рассматривается класс ACS_E абсолютно непрерывных функций на п.в. компактных подмножествах $E \subset X$ и устанавливается принадлежность отображений $f : X \to Y$ заданному классу.

2010 MSC. 30L10.

Ключевые слова и фразы. Регулярное по Альфорсу метрическое пространство, квазисимметрический гомеоморфизм.

1. Введение и формулировка основного результата

Понятие квазисимметрии впервые рассмотрели в 1956 году А. Бёрлинг и Л. Альфорс (см. [1]). В своей работе они изучали вопросы о продолжении гомеоморфизма $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ до квазиконформного отображения верхней полуплоскости на себя. В результате их исследований было получено необходимое и достаточное условие на функцию, которое, в свою очередь, было использовано Дж. А. Келингосом в 1966 году для определения квазисимметрических функций (см. [11]). В 1971 году Г. Ренггли занялся теорией квазисимметрических отображений в плоском случае, рассматривая отображения,

Статья поступила в редакцию 27.12.2018
Работа выполнена при поддержке Национальной академии наук Украины в рамках научно-исследовательского проекта для молодых ученых “Геометрические свойства метрических пространств и отображений в финслеровых пространствах”. Авторы также выражают благодарность д.ф.-м.н. Рязанову В. И. за полезные обсуждения и замечания.

ISSN 1810 – 3200.

удовлетворяющие условию ограниченности искажения треугольников (см. [17]). О. Лехто и К. Виртанен в книге [13] рассматривали квазисимметрии для возрастающих вложений $f : \Delta \to \mathbb{R}^1$, где $\Delta \subset \mathbb{R}^1$ такой интервал, что для некоторой постоянной H выполнено неравенство $|f(a) - f(x)| \le H|f(b) - f(x)|$, где $|a - x| \le |b - x|$. Позднее, в 1980 году, финские математики П. Тукиа и Ю. Вяйсяля заметили, что определение, данное Г. Ренггли, может быть распространено на случай общих метрических пространств (см. [19]), что и позволило выделить класс η-квазисимметрических отображений.

В последние годы изучением данных отображений активно занимаются многие математики как на плоскости, так и в пространстве (см., например, [3,4,8,9]). Отметим, что указанные работы представляют лишь малую часть от обширного списка исследований по данной тематике.

Целью настоящей работы является доказательство следующего результата:

Теорема. *Пусть (X, d, μ), (Y, d', μ') — α-регулярные по Альфорсу метрические пространства с $\alpha > 0$ и $f : X \to Y$ — η-квазисимметрический гомеоморфизм. Тогда f принадлежит классу абсолютно непрерывных на п.в. компактных множествах $E \subset X$ функций.*

2. Предварительные замечания

Приведём необходимые обозначения и определения. Пусть H^α, $\alpha \in [0, \infty)$, обозначает *α-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X, d), т.е.

$$H^\alpha(A) : \quad = \quad \sup_{\varepsilon > 0} H^\alpha_\varepsilon(A)\,, \tag{2.1}$$

$$H^\alpha_\varepsilon(A) : \quad = \quad \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diamA_i})^\alpha\,, \tag{2.2}$$

где инфимум в (2.2) берётся по всем покрытиям A множествами A_i с $\mathrm{diam}A_i < \varepsilon$ (см., например, [10]). Напомним, что $\mathrm{diam}A_i = \sup\limits_{x,\, y \in A_i} d(x, y)$. Если для некоторого множества A и $\alpha_1 \ge 0$ выполнено условие $H^{\alpha_1}(A) < \infty$, то $H^{\alpha_2}(A) = 0$ для произвольного числа $\alpha_2 > \alpha_1$ (см., к примеру, [10, разд. 1, гл. VII]). Величина

$$\dim_H A := \sup_{H^\alpha(A) > 0} \alpha \tag{2.3}$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

Определение 2.1. *Пусть* (X, d, μ) *и* (Y, d', μ') *– метрические пространства с локально конечными борелевскими мерами* μ *и* μ' *соответственно и* $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *– гомеоморфизм. Отображение* $f : X \to Y$ *называется* η*-квазисимметрическим гомеоморфизмом (сокращенно,* η*-QS), если*

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_Y(f(x), f(z))} \leq \eta\left(\frac{d_X(x, y)}{d_X(x, z)}\right) \tag{2.4}$$

для каждой тройки $x, y, z \in X$, $x \neq z$.

Замечание 2.1. Геометрический смысл этого определения заключается в том, что шары отображаются в "круглые" множества с количественным контролем их "эксцентриситетов". Это обобщенный вариант геометрического свойства квазиконформных отображений.

Замечание 2.2. В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, отображение является квазиконформным тогда и только тогда, когда оно квазисимметрическое. Обратные отображения и композиции квазисимметрических отображений являются квазисимметрическими отображениями (см., например, [5]). В монографии [3] приводится типичный пример таких гомеоморфизмов $\eta(t) = ct^\alpha$ при $\alpha > 0$ с постоянной $c \geq 1$. В 1998 году Хейнонен и Коскела (см. [9]) доказали замечательный результат, показывающий, что эти два понятия (квазиконформность и квазисимметрия) эквивалентны в широких классах метрических пространств, включающих в себя евклидовы пространства. В работе [2] рассмотрены гомеоморфизмы $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для которых показана равносильность между η-квазисимметричностью и K-квазиконформностью со взаимными оценками η и K.

Будем говорить, что компакт в метрическом пространстве (X, d) является *α-спрямляемым*, если его мера Хаусдорфа H^α конечна. Будем называть 1-спрямляемые компакты $E := \gamma$ просто *спрямляемыми компактами* или *компактами конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ – *длиной* γ. Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой (см., [7]). Нами будут рассмотрены системы борелевских мер, ассоциированных с компактами в метрических пространствах (X, d). Именно, мера $m_E^{(\alpha)}$, ассоциированная с компактом E в (X, d), определяется для каждого борелевского множества B в (X, d) как хаусдорфова мера H^α пересечения $B \cap E$ при фиксированном $\alpha > 0$. В дальнейшем, для любого компакта $E \subset X$ мера $m_E := m_E^{(1)}$.

Определение 2.2. *Пространство* (X, d, μ) *называется* α*-регулярным по Альфорсу с* $\alpha > 0$, *если существует постоянная* $C \geq 1$ *такая, что*

$$C^{-1}r^{\alpha} \leq \mu(B(x_0, r)) \leq Cr^{\alpha} \tag{2.5}$$

для всех шаров $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ *с центром в точке* $x_0 \in X$ *радиуса* $r < \mathrm{diam} X$.

Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [8, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in [1, \infty)$.

3. Доказательство основного результата

Нам понадобится следующее определение.

Определение 3.1. *Отображение* $f : X \to Y$ *между метрическими пространствами* (X, d, μ) *и* (Y, d', μ') *обладает* (N)*-свойством относительно хаусдорфовой меры, если* $H^{\alpha}(f(S)) = 0$ *как только* $H^{\alpha}(S) = 0$. *Аналогично,* f *обладает* N^{-1}*-свойством, если* $H^{\alpha}(S) = 0$ *как только* $H^{\alpha}(f(S)) = 0$.

Замечание 3.1. (N)-условие было введено Н.Н. Лузиным, который первым заметил важность этого свойства в теории интеграла (см., например, [14, гл. 4, с. 149]).

Доказательство основного результата базируется на следующем утверждении.

Теорема 3.1. *Пусть* (X, d, μ), (Y, d', μ') *–* α*-регулярные по Альфорсу метрические пространства с* $\alpha > 0$ *и* $f : X \to Y$ *–* η*-QS. Тогда* $H^{\alpha}(E) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $H^{\alpha}(f(E)) = 0$ *для любого компактного множества* $E \subset X$.

Доказательство. Ввиду того, что $H^{\alpha}(E) = 0$, можно выбрать счетное покрытие множества E шарами, $E \subset \cup_i B_i$, объединение которых имеет произвольно малую меру: $\sum\limits_{i=1} \mathrm{diam}(B_i)^{\alpha} \leq \varepsilon$, $\alpha > 1$. Используя лемму 5.5 о покрытиях (см. в [9]), находим для этого покрытия подпоследовательность попарно непересекающихся наборов $\{B_{ik}, k = 1, 2, ...\}$ шаров, таких что $E \subset \cup_k 5B_{ik}$. Напомним, что по лемме 2.7 в [4]

$$B(f(x), r) \subseteq f(B(x, r)) \subseteq f(kB(x, r)) \subseteq \eta(k)B(f(x), r). \tag{3.1}$$

Полагаем

$$L_f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_f^\varepsilon(x), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.2}$$

где $L_f^\varepsilon(x) = \sup\limits_{0<r\le\varepsilon} \frac{L_f(x,r)}{r}$, $\varepsilon > 0$, $L_f(x,r) = \sup\limits_{d(x,y)\le r} d'(f(x), f(y))$.

Ввиду (3.1) получаем, что

$$H^\alpha(f(5B_k)) \le \sum_k \eta(5) H^\alpha(f(B_k)) \le C_\eta \sum_k \int_{B_k} [L_f^\varepsilon]^\alpha dm_E^\alpha \tag{3.3}$$

$$= C_\eta \int_{\cup B_k} [L_f^\varepsilon]^\alpha dm_E^\alpha \le C_\eta \int_{\cup_i B_i} [L_f^\varepsilon]^\alpha dm_E^\alpha.$$

Из (7.10) в [9] видим, что квазисимметрия подразумевает $[L_f(x)]^\alpha \le C_\eta \mu_f(x)$ для п.в. $x \in X$, где

$$\mu_f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{H^\alpha(f(B(x,r))}{H^\alpha(B(x,r))} \tag{3.4}$$

есть объёмная производная, которая существует для п.в. $x \in X$ и конечна, а также $\int\limits_E \mu_f(x) dH^\alpha(x) \le H^\alpha(f(E))$ для любого измеримого подмножества $E \subset X$. В частности, для последовательности множеств с $H^\alpha(E_j) \to 0$ при $j \to \infty$, имеем, что

$$\int\limits_{E_j} [L_f^\varepsilon]^\alpha dm_E^\alpha \to 0 \tag{3.5}$$

при $j \to \infty$. Учитывая это и тот факт, что f^{-1} – тоже квазисимметрия (см., напр., [4]), по (3.3) выводим, что $H^\alpha(f(E)) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если $H^\alpha(f(E)) = 0$, то также $H^\alpha(E) = H^\alpha(f^{-1}(f(E))) = 0$. □

Напомним, что конечную функцию называют абсолютно непрерывной в широком смысле на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, или *абсолютно непрерывной на* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для каждой последовательности неперекрывающихся сегментов $\{[a_k, b_k]\}$, концы которых принадлежат E, неравенство $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ влечет $\sum\limits_k (F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$ (см., например, [18]).

Замечание 3.2. Ввиду α-регулярности метрических пространств, хаусдорфова мера образа множества конечна $H^\alpha(f(E)) < \infty$ для любого непрерывного отображения f (см., для деталей, 2.2.2 в [6]).

Обозначим через ACS_E класс абсолютно непрерывных на п.в. компактных множествах $E \subset X$ функций. По теореме 3.1 и замечанию 3.2 получаем следующее важное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть (X, d, μ), (Y, d', μ') – α-регулярные по Альфорсу метрические пространства с $\alpha > 0$ и $f : X \to Y$ – η-QS. Тогда f принадлежит классу ACS_E.*

Напомним, что непрерывная функция f в $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}$, тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е., если отображение f локально абсолютно непрерывно на почти всех отрезках, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p (см., например, теоремы 2.7.1 и 2.7.2 в [16]).

Ввиду того, что $ACS_E \supset ACL$, говорим, что $f \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1,1}_{loc}$, тогда и только тогда, когда $f \in ACS_E$ и $f \in L^1_{loc}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть (X, d, μ), (Y, d', μ') – α-регулярные по Альфорсу метрические пространства с $\alpha > 0$ и $f : X \to Y$ – η-QS, $E \subset X$ – компактное множество. Тогда $f \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1,1}_{loc}(E, Y)$.*

Доказательство. Докажем, что если $f : X \to Y$ – η-QS, то f имеет локально суммируемые производные. Так как

$$\frac{1}{m^\alpha_E(E)} \int_E [L_f(x)]^\alpha dm^\alpha_E \le \frac{C_\eta}{m^\alpha_E(E)} \int_E \mu_f(x) dm^\alpha_E$$

(см. (7.10) в [9]), то по определению объемной производной (3.4), а также ввиду замечания 3.2 имеем:

$$\frac{C_\eta}{m^\alpha_E(E)} \int_E \mu_f(x) dm^\alpha_E \le C_\eta \left(\frac{H^\alpha(f(B(x,r))}{H^\alpha(B(x,r))} \right) < \infty. \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{m^\alpha_E(E)} \int_E [L_f(x)]^\alpha dm^\alpha_E < \infty \tag{3.7}$$

и $f \in L^1_{loc}(E)$.

По теореме 3.2 о принадлежности f классу ACS_E п.в. и неравенству (3.7) можно утверждать, что $f \in \widetilde{\mathbb{W}}^{1,1}_{loc}(E, Y)$ (см., например, [15, с. 8]). □

Замечание 3.3. Полученные результаты применимы к известным пространствам Лёвнера, группам Карно и Гейзенберга, римановым и финслеровым многообразиям.

Литература

[1] L. V. Ahlfors, A. Beurling, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings* // Acta Math., **96** (1956), 125–142.

[2] В. В. Асеев, Д. Г. Кузин, *Достаточные условия квазисимметричности отображений прямой и плоскости* // Сиб. матем. журн., **39** (1998), No. 6, 1225–1235.

[3] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton; Oxford, Princeton University Press, 2009.

[4] C. J. Bishop, H. Hakobyan, M. Williams, *Quasisymmetric dimension distortion of Ahlfors regular subsets of a metric space* // Geom. Funct. Anal., **26** (2016), No. 2, 379–421.

[5] M. Bonk, *Quasiconformal geometry of fractals* // International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zurich., (2006), 1349–1373.

[6] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen, **153**, Springer-Verlag, New York, 1969.

[7] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[8] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, New York, Springer, 2001.

[9] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry* // Acta Math., **181** (1998), 1–61.

[10] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press., 1948.

[11] J. A. Kelingos, *Boundary correspondence under quasiconformal mappings* // Michigan Math. J., **13** (1966), 235–249.

[12] P. Koskela, K. Wildrick, *Analytic properties of quasiconformal mappings between metric spaces* // Metric and Differential Geometry. The Jeff Cheeger Anniversary Volume. Progress in Mathematics, **297** (2012), 163–174.

[13] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[14] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд* // Матем. сб., **30** (1916), No. 1, 1–242.

[15] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Berlin, Springer—Verlag, 1985.

[16] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, М., Высшая школа, 1977.

[17] H. Renggli, *On triangular dilatation* // Proc. of the Romanian — Finnish seminar on Teichmuller spaces and quasiconformal mappings, Brasov, 1969, Bucharest, Publ. House of the Acad, of the Soc. Rep. Romania., 1971, 255–259.

[18] С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во, Иностранной литературы, 1949.

[19] P. Tukia, J. Vaisala, *Quasisymmetric embeddings of metric spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **5** (1980), 97–114.

Сведения об авторах

Елена Сергеевна Афанасьева
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: es.afanasjeva@gmail.com

Виктория Викторовна Билет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: viktoriiabilet@gmail.com