Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 3, 383 – 398

Ентропійні числа класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних

Катерина В. Пожарська

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних у просторі Лебега. Дані класи при відповідному виборі мажорантної функції для мішаного модуля неперервності співпадають із класами Нікольського–Бєсова.

2010 MSC. 42A10, 42B99.

Ключові слова та фрази. Ентропійні числа, ентропія, східчастий гіперболічний хрест, мішаний модуль неперервності.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Через $L_q := L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x})$, які є 2π-періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

У подальших міркуваннях вважаємо, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}x_j = 0, \qquad j = \overline{1, d}.$$

Стаття надійшла в редакцію 11.05.2018

ISSN 1810 – 3200.

У роботі встановлено порядкові оцінки ентропійних чисел класів типу Нікольського–Бєсова $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у метриці простору L_q, при деяких умовах на функцію Ω та параметри p, q і θ.

Ентропія, або близька до неї характеристика – ентропійні числа, є однією з важливих характеристик компактів, адже володіючи інформацією про ентропію або поведінку ентропійних чисел компактної множини можна дійти висновку, наскільки великою (масивною) є ця множина і якими апроксимативними властивостями вона володіє. Питання, пов'язані з оцінками ентропійних чисел класів функцій багатьох змінних, зокрема, Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ ($B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p$) та їх аналогів досліджувалися багатьма авторами (див., наприклад, [1–14]), і при цьому одержано низку глибоких та завершених результатів. З більш детальною бібліографією можна ознайомитися в огляді [12]. З іншого боку, практично зовсім не дослідженими навіть в одновимірному виипадку у цьому напрямі залишалися класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які при $\theta = \infty$ (позначення H^{Ω}_p) були вперше розглянуті М. М. Пустовойтовим у роботі [15], а потім поширені S. Yongsheng, W. Heping у [16] на випадок $1 \leq \theta < \infty$ і є узагальненням за гладкісним параметром класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [17–19]). Детальніші коментарі щодо питань, пов'язаних із результатами даної статті, містяться у зауваженнях до встановлених тверджень.

Переходимо до означення досліджуваних в роботі класів.

Класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначаються за допомогою мажорантної функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$, для мішаного модуля неперервності $\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p$ l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, та числового параметра θ, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Отже, нехай для $f \in L_p$

$$\Omega_l(f)_p := \Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leqslant t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta^l_h f\|_p$$

– мішаний модуль неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції f, де

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d} \cdots \Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}} \cdots (\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}))\big),$$

$\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$, – мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, а

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Розглянемо далі множину $\Psi_{l,d}$ функцій $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$, типу мішаного модуля неперервності l-го порядку, які задовольняють умови

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\quad \Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(\boldsymbol{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1,d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant C \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, $C > 0$ — деяка стала.

Варто зазначити, що для кожної $f \in L_p$ її модуль неперервності $\Omega_l(f)_p \in \Psi_{l,d}$.

При формулюванні та доведенні результатів, на функції Ω накладемо додатково умови (S^α) і (S_l) Барі–Стєчкіна [20]. Для функції $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, це означає наступне:

а) $\varphi \in (S^\alpha)$, $\varphi \geqslant 0$, $\alpha > 0$, якщо функція $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає, тобто якщо існує така стала $C_1 > 0$, яка не залежить від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}.$$

б) $\varphi \in (S_l)$, $\varphi > 0$, $l \in \mathbb{N}$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає, тобто існує не залежна від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$, стала $C_2 > 0$, така що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}.$$

Зауважимо, що умови, еквівалентні до умов (S^α) і (S_l), розглядалися раніше С. М. Лозинським [21].

У багатовимірному випадку будемо говорити, що $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$, $d > 1$, задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо $\Omega(\boldsymbol{t})$ як функція однієї змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, задовольняє ці умови при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$.

Функція $f \in L_p$ належить простору $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^\alpha) \cap \Psi_{l,d}$, якщо для неї скінченна напівнорма

$$|f|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})} \right)^\theta \prod\limits_{j=1}^{d} \frac{\mathrm{d}t_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\substack{t_j \geq 0 \\ j=\overline{1,d}}} \frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Норму у просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначимо наступним чином

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}, \qquad 1 \le p, \theta \le \infty,$$

та будемо розглядати далі одиничні кулі в цьому просторі, використовуючи для них те ж саме позначення, що і для всього простору, тобто

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in B^{\Omega}_{p,\theta} \colon \quad \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}.$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ покладають $B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p$, де класи H^{Ω}_p – аналоги класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ (див., наприклад, [22]). Крім цього, при $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають із класами Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [17, 19]).

Для доведення результатів використовуємо еквівалентне представлення норми $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ в термінах так званого декомпозиційного нормування.

Отже, кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d} \right\},$$

і для $f \in L_p$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Відомо [16], що при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^{\alpha}) \cap \Psi_{l,d}$, мають місце співвідношення:

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{0.1}$$

де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що за допомогою деякої модифікації норми можна записати подібне до (0.1) зображення і для граничних значень параметра p, а саме для $p = 1$ і $p = \infty$ (див., наприклад, [15, 23]).

У роботі розглянуто функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, які мають вигляд

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1 \cdots t_d) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big),$$

де $\omega \in \Psi_{l,d}$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l) Барі – Стєчкіна.

Тепер означимо досліджувану апроксимативну характеристику.

Нехай $\mathscr{X}$ – банахів простір і

$$B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}: \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathscr{X}} \le r\}$$

– куля радіуса r з центром в точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A \subset \mathscr{X}$ і $\varepsilon > 0$ через $N_{\varepsilon}(A, \mathscr{X})$ позначимо

$$N_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) = \min\Big\{n: \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n \in \mathscr{X}: \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\Big\}.$$

Тоді ε-ентропією множини A відносно банахового простору $\mathscr{X}$ називають величину [24]

$$H_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) = \log N_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}). \tag{0.2}$$

(Тут і надалі під записом log будемо розуміти $\log_2$).

З ε-ентропією множини A тісно пов'язане поняття її ентропійних чисел (див., наприклад, [25])

$$\varepsilon_k(A, \mathscr{X}) = \inf\Big\{\varepsilon: \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in \mathscr{X}: \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\Big\}. \tag{0.3}$$

Зазначимо, що отримавши оцінки ентропійних чисел деякої множини A, можна, як наслідок, записати відповідні оцінки її ε-ентропії, оскільки з наведених вище означень величин $\varepsilon_k(A, \mathscr{X})$ та $H_{\varepsilon}(A, \mathscr{X})$ випливає, що при $k < H_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) \le k+1$ виконуються співвідношення $\varepsilon_{k+1}(A, \mathscr{X}) \le \varepsilon \le \varepsilon_k(A, \mathscr{X})$.

В процесі доведення одержаних результатів використані також числа

$$M_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) = \max\big\{n: \exists \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n \in A: \|\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^j\|_{\mathscr{X}} > \varepsilon, i \ne j, i, j = \overline{1, d}\big\}.$$

Легко переконатися (див., наприклад, [24]), що

$$N_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) \le M_{\varepsilon}(A, \mathscr{X}) \le N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A, \mathscr{X}). \qquad (0.4)$$

Результати роботи сформульовано у термінах порядкових співвідношень. Для невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_3 > 0$ така, що $a(n) \le C_3 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, у решті випадків вони будуть зрозумілими з контексту.

Якщо $\mathfrak{M}$ – деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{M}|$ будемо позначати кількість елементів цієї множини.

1. Допоміжні твердження

Для $G \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G)$ і $T(G)_q$, $1 \le q \le \infty$, позначимо наступні множини тригонометричних поліномів:

$$T(G) = \left\{ t: \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in G} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})} \right\};$$
$$T(G)_q = \{ t \in T(G): \quad \|t\|_q \le 1 \}.$$

Далі, нехай $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le n} \rho(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$, – "східчастий гіперболічний хрест" [22, с. 7]. Відомо (див., наприклад, [22, с. 70]), що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема 1.1. [2, Лема 2.2]. *Нехай $2 \le q < \infty$. Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(T(Q_n)_2, L_q\right) \ll \begin{cases} |Q_n| M^{-1} \left(\log\left(|Q_n| M^{-1}\right)\right)^2, & 2M \le |Q_n|, \\ 2^{-M|Q_n|^{-1}}, & 2M \ge |Q_n|. \end{cases}$$

Зауважимо, що аналогічні до встановлених у теоремі 1.1 оцінки справедливі також для множини $\triangle Q_n = Q_n \setminus Q_{n-1}$.

Позначимо через $S_{Q_n}(f)$ східчасто гіперболічну суму Фур'є функції f, тобто

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}.$$

Теорема 1.2. [16, Теорема 6]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тоді*

$$\sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_{Q_n}(f)\|_q \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

2. Основні результати

Теорема 2.1. *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $2 \le q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ *та умову* (S_l), $l \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m, *таких що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{2.1}$$

Доведення. Внаслідок вкладення $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$, $2 \le p \le \infty$, достатньо встановити оцінку (2.1) у випадку $p = 2$. При цьому, для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, скористаємося оцінкою величини $\left\|\sum\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2$, яку було одержано під час доведення теореми 1 у роботі [27], а саме:

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 \ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \quad 1 \le \theta \le \infty. \tag{2.2}$$

Далі, виберемо згідно з M число $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $|Q_{m-1}| < M \le |Q_m|$. Тоді, оскільки $|Q_m| \asymp |Q_{m-1}| \asymp 2^m m^{d-1}$, то $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$.

Визначимо числа β та $\overline{M}_n$ наступним чином:

$$\beta = \frac{1}{2}\min\left\{\left(\alpha - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\right); \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\}; \tag{2.3}$$

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_4(\beta) M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C_4(\beta) M 2^{-\beta(n-m)}, & n \ge m, \end{cases} \tag{2.4}$$

де стала $C_4(\beta) > 0$ така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \le M$. Зазначимо, що підібрати таку сталу $C_4(\beta)$ можна, оскільки, згідно з (2.3),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \sum_{n=1}^{m-1} C_4(\beta) M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + \sum_{n=m}^{\infty} C_4(\beta) M 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Нехай тепер $M_n = \left[\overline{M}_n\right]$, де $[a]$ – ціла частина числа a. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n \le M$ і, крім цього, $M_n = 0$, якщо $C_4(\beta) M 2^{-\beta(n-m)} < 1$, тобто при

$$n > m_1 = m + \beta^{-1} \log(C_4(\beta) M). \tag{2.5}$$

Покладемо

$$S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) = \left\{ g\colon \quad g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad f \in B^{\Omega}_{2,\theta} \right\},$$
$$\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_q = \sup_{g \in S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right)} \|g\|_q .$$

Тоді для ентропійних чисел $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q\right)$ можемо записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q\right) &\le \sum_n \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) \\ = \sum_{n \le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) &+ \sum_{n > m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) \\ \le \sum_{n \le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) &+ \sum_{n > m_1} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_q \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Оцінимо спочатку доданок I_2. Для цього встановимо оцінку зверху величини $\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_q$.

Скориставшись властивістю L_q-норми, для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_q &\le \left\| S_{Q_n}(f) - S_{Q_{n-1}}(f) + f - f \right\|_q \\ &\le \|f - S_{Q_n}(f)\|_q + \left\| f - S_{Q_{n-1}}(f) \right\|_q . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Враховуючи результат теореми 1.2, із (2.7) матимемо

$$\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_q \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{2.8}$$

Отже, беручи до уваги (2.8) та врахувавши ту обставину, що функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, знаходимо

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n>m_1} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right)\right\|_q \ll \sum_{n>m_1} \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &= \sum_{n>m_1>m} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} \sum_{n>m_1} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Оскільки $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, то із (2.5) робимо висновок, що $m_1 \asymp m + \beta^{-1}\log(C_4(\beta) 2^m m^{d-1}) \ll m$, і тому з (2.9) отримаємо

$$I_2 \ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{2.10}$$

Далі розглянемо випадки $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \alpha < 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ і $\alpha \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$.

Нехай $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \alpha < 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$. Тоді, згідно з (2.3) та (2.5), одержимо

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\right), \qquad m_1 = m + \frac{2}{\alpha - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} \log(C_4(\beta) M).$$

Підставляючи у праву частину співвідношення (2.10) значення m_1 та враховуючи, що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} M^{-2} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} M^{-2} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-2\right)} m^{(d-1)\left(\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+ -1\right)} \\ &\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Нехай тепер $\alpha \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$. Тоді $\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$, і, відповідно,

$m_1 = m + \frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \log(C_4(\beta)M)$. У цьому випадку, з (2.10) отримаємо

$$\begin{aligned}
I_2 &\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha\right)} M^{\frac{1-\frac{2}{q}-2\alpha}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} M^{\frac{1-\frac{2}{q}-2\alpha}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} m^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} 2^{m\left(\frac{1-\frac{2}{q}-2\alpha}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\right)} m^{(d-1)\left(\frac{1-\frac{2}{q}-2\alpha}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \\
&\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Об'єднавши (2.12), (2.11) та (2.10), запишемо оцінку для виразу I_2:

$$I_2 \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (2.13)$$

Оцінимо тепер доданок I_1 із (2.6). З цією метою представимо його у вигляді

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) \\
&= \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right) + \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_q\right).
\end{aligned}$$

Беручи до уваги означення множини $T\left(\triangle Q_n\right)_2$ і частинних сум $S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right)$ та співвідношення (2.2), запишемо

$$\begin{aligned}
I_1 &\ll \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_2, L_q\right) \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&\quad + \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_2, L_q\right) \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&= I_3 + I_4. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Далі, для оцінки доданку I_3 скористаємося теоремою 1.1. Отже, оскільки для $n \le m$ $M_n = \left[C_4(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}\right]$, а $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, $|\triangle Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, то

$$2M_n \asymp 2\cdot 2^{\frac{n+m}{2}} m^{d-1} \ge |\triangle Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Тому, для виразу I_3 можемо записати

$$\begin{aligned} I_3 &\ll \sum_{n\leq m} 2^{-M_n|\triangle Q_n|^{-1}}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll \sum_{n\leq m} 2^{-C_4(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}2^{-n}n^{-(d-1)}}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll \sum_{n\leq m}\omega\left(2^{-n}\right)n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Звідси, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S_l), $l\in\mathbb{N}$, отримаємо

$$\begin{aligned} I_3 &\ll \sum_{n\leq m}\frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\gamma n}}2^{-\gamma n}n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\gamma m}}\sum_{n\leq m}2^{-\gamma n}n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Переходячи до розгляду випадку $2M_n = 2\left[C_4(\beta)M2^{-\beta(n-m)}\right]\leq |\triangle Q_n|$ зауважимо, що використання теореми 1.1 не приводить до встановлення бажаної оцінки доданку I_4 з (2.14). У зв'язку з цим, для проведення подальших міркувань, доведемо допоміжне твердження.

Лема 2.1. *Нехай $2<q<\infty$. Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(T(\Delta Q_n)_2, L_q\right)\ll\left(\left|\Delta Q_n\right|M^{-1}\right)^{\frac{\nu}{2}},\qquad 2M\leq|\Delta Q_n|,$$

де $\nu = 1-\frac{2}{q}+\eta$, а $\eta>0$ – деяке достатньо мале число.

Доведення. Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Через B_2^N та S^{N-1} позначимо, відповідно, одиничну евклідову кулю в $\mathbb{R}^N$ та її межу. Нехай також $\sigma=\sigma_N$ — нормована міра Лебега на S^{N-1}, $M_{\mathscr{X}} = \int\limits_{S^{N-1}}\|f\|_{\mathscr{X}}\,\mathrm{d}\sigma$.

Нехай далі для множини $G\subset\mathbb{Z}^d$, $\mathscr{X}_q^G$ – банахів простір тригонометричних поліномів $t\in T_R(G)=\{t\in T(G)\colon c_{\boldsymbol{k}}=\overline{c}_{-\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}\in G\}$ з дійсними коефіцієнтами зі звичайною L_q-нормою. Позначимо $M_q^G\equiv M_{\mathscr{X}_q^G}$.

Е. С. Белінським [7, с. 123] показано, що

$$\varepsilon_M\left(B_2^N, L_q\right)\leq 2\left(\varepsilon_M\left(B_2^N, L_t\right)\right)^{\nu}\leq 2\left(\sqrt{\frac{N}{M}}M_t^G\right)^{\nu} \tag{2.17}$$

для будь-якого $t > q$ і $\frac{1}{q} = \frac{1-\nu}{2} + \frac{\nu}{t}$.

Тому, скориставшись оцінкою [7, Лема 3.4]

$$M_t^G \ll \sqrt{t}, \quad 2 < q < t < \infty,$$

із (2.17) отримаємо

$$\varepsilon_M\left(B_2^N, L_q\right) \ll \left(\frac{N}{M}\right)^{\frac{\nu}{2}}, \quad M \leq N.$$

Зазначимо, що для доведення леми достатньо розглянути множину $T_R(\Delta Q_n)_2$, тобто евклідову кулю B_2^N у $\mathbb{R}^N$, $N = \frac{|\Delta Q_n|}{2}$.

Отже, лема 2.1 доведена. □

Повернемося до доведення теореми 2.1. Застосовуючи лему 2.1 для оцінки доданку I_4 із (2.14), та враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
I_4 &= \sum_{m<n\leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_2, L_q\right)\omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&\ll \sum_{m<n\leq m_1} \left(\frac{|\triangle Q_n|}{M_n}\right)^{\frac{\nu}{2}} \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&\asymp \sum_{m<n\leq m_1} \left(\frac{2^n n^{d-1}}{M 2^{-\beta(n-m)}}\right)^{\frac{\nu}{2}} \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&\asymp \sum_{m<n\leq m_1} \left(\frac{2^{n(1+\beta)} n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)} m^{d-1}}\right)^{\frac{\nu}{2}} \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\
&= \sum_{m<n\leq m_1} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} 2^{-\frac{m\nu}{2}(1+\beta)} m^{-\frac{\nu}{2}(d-1)} \\
&\quad \times 2^{\frac{n\nu}{2}(1+\beta)} n^{\frac{\nu}{2}(d-1)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} 2^{-\frac{m\nu}{2}(1+\beta)} m^{-\frac{\nu}{2}(d-1)} \\
&\quad \times \sum_{m<n\leq m_1} 2^{n\left(\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha\right)} n^{\frac{\nu}{2}(d-1)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Покажемо, що $\frac{\nu}{2}(1+\beta) - \alpha < 0$. Для цього розглянемо випадки $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \alpha < 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ і $\alpha \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$.

Нехай $\frac{1}{2}-\frac{1}{q}<\alpha<2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$, $\beta=\frac{1}{2}\left(\alpha-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\right)$. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha &= \frac{\nu}{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\alpha-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\right)\right)-\alpha\\ &= \frac{\nu}{2}+\left(\frac{1}{2}\frac{\nu}{2}-1\right)\alpha-\frac{1}{2}\frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right).\end{aligned}$$

Оскільки $\nu=1-\frac{2}{q}+\eta$, $\eta>0$, то, виконавши елементарні перетворення, будемо мати

$$\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha=\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\alpha+\eta\right).$$

Звідси легко бачити, що можна підібрати η таким чином, що при $\frac{1}{2}-\frac{1}{q}<\alpha<2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$ справедлива нерівність $\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha<0$.

У випадку $\alpha\geq 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$, $\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$, виконавши аналогічні перетворення, можемо переконатися, що $\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha<0$.

Отже, із (2.18) отримаємо

$$\begin{aligned}I_4 &\ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}}2^{-\frac{m\nu}{2}(1+\beta)}m^{-\frac{\nu}{2}(d-1)}2^{m\left(\frac{\nu}{2}(1+\beta)-\alpha\right)}m^{\frac{\nu}{2}(d-1)}m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\\ &= \omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Об'єднуючи (2.19), (2.16) із (2.14), приходимо до оцінки

$$I_2\ll\omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (2.20)$$

Накінець, співставляючи (2.20), (2.13) і (2.6), та враховуючи, що $M=M(m)\asymp 2^m m^{d-1}$, отримуємо шукану оцінку зверху:

$$\begin{aligned}\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta},L_q\right) &\ll \omega\left(2^{-m}\right)m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\\ &\asymp \omega\left(2^{-m}\right)(\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.\end{aligned}$$

Теорему 2.1 доведено. □

Слід зазначити, що результат теореми 2.1 є новим і в одновимірному випадку. При цьому справедливе наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $d=1$, $2\leq p\leq\infty$, $2\leq q<\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$, а функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha>\frac{1}{2}-\frac{1}{q}$ та умову (S_l), $l\in\mathbb{N}$. Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(B^{\omega}_{p,\theta},L_q\right)\ll\omega\left(M^{-1}\right).$$

Зауважимо також, що з теореми 2.1 випливає нова порядкова оцінка відповідних ентропійних чисел для класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у випадку $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Теорема 2.3. *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $2 \le q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$. *Тоді справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_q\right) \ll M^{-r_1} (\log M)^{(d-1)\left(r_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+\right)}.$$

Зауваження 2.1. Для класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > 1$, оцінки ентропійних чисел у просторі L_q, $1 \le q < \infty$, встановлено А. С. Романюком [10,11]. Оцінки величини $\varepsilon_M \left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_q\right)$, $1 < p, q < \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, іншими методами отримано також у роботі D. Dung [8]. Для класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ оцінки зверху ентропійних чисел отримано в роботах В. М. Темлякова [2] та, іншим методом, Е .С. Белінського [7].

Що стосується класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, то оцінка зверху ентропійних чисел $\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$ досі була відома [29] лише для випадку $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, при умові, що функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l), $l \in \mathbb{N}$.

Оцінку знизу ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, у просторі L_1 встановлено у теоремі 2 роботи [27]. Звідси, співставивши відповідні результати, приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.4. *Нехай* $2 \le p, \theta \le \infty$, $2 \le q < \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ *та умову* (S_l), $l \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *таких що* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Література

[1] В. Н. Темляков, *Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Докл. АН СССР, **301** (1988), No. 2, 288–291.

[2] В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **189** (1989), 138–168.

[3] E. S. Belinskii, *Approximation of functions of several variables by trigonometric polinomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy* // Anal. Math., **15** (1989), 67–74.

[4] Е. С. Белинский, *Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность)* // Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль, Ярослав. ун-т, 1990, 22–37.

[5] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *О наилучших m - членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1* // Матем. заметки, **56** (1994), No. 5, 57–86.

[6] V. N. Temlyakov, *An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers* // J. Complexity, **11** (1995), 293–307.

[7] E. S. Belinskii, *Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative* // J. Approx. Theory, **93** (1998), 114–127.

[8] D. Dung, *Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension* // J. Complexity, **17** (2001), No. 2, 467–492.

[9] V. N. Temlyakov, *An inequality for the entropy numbers and its application* // J. Approxim. Theory, **173** (2013), 110–121.

[10] А. С. Романюк, *Оценки энтропийных чисел и ε-энтропии классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **11** (2014), No. 3, 196–213.

[11] А. С. Романюк, *Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 11, 1540–1556.

[12] D. Dung , V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Birkhauser, 2018.

[13] V. N. Temlyakov, *On the entropy numbers of the mixed smoothness function classes* // J. Approxim. Theory, **217** (2017), 26–56.

[14] А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$* // Укр. мат. журн., **71** (2019), No. 2, 271–282.

[15] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20** (1994), No. 2, 35–48.

[16] S. Yongsheng, W. Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та РАН, **219** (1997), 356–377.

[17] Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77** (1965, 5–34.

[18] Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Алма-Ата, Наука, 1976.

[19] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187** (1989), 143–161.

[20] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. об-ва, **5** (1956), 483–522.

[21] С. М. Лозинский, *Обращение теорем Джексона* // Докл. АН СССР, **83** (1952), No. 5, 645–647.

[22] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178** (1986), 1–112.

[23] С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 5, 692–704.

[24] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах* // Успехи матем. наук, **14** (1959), No. 2, 3–86.

[25] K. Höllig, *Diameters of classes of smooth functions* // Quant. Approxim, New York, Acad. Press, 1980, 163–176.

[26] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1977.

[27] К. В. Пожарська, *Оцінки ентропійних чисел класів $\boldsymbol{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці* // Укр. мат. журн., **70** (2018), No. 9, 1249–1263.

[28] Г. Харди, И. Е. Литтлвуд, Дж. Пойа, *Неравенства*, М., Изд-во иностр. лит., 1948.

[29] А. Ф. Конограй, А. П. Мусієнко, *Оцінки ентропійних чисел $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14** (2017), No. 3, 222–239.

Відомості про авторів

Катерина Віталіївна Пожарська

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: kate.shvai@gmail.com