Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 3, 298 – 320

Оценки внутренних радиусов симметричных неналегающих областей

Александр К. Бахтин, Людмила В. Выговская

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе рассматривается задача об оценке функционала $I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, где $r(B_k, a_k)$ – внутренний радиус области B_k относительно точки a_k, при условии $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, где области $B_k \cap B_p = \emptyset, k \neq p, k, p = \overline{0, n}$, причем области B_k, $k = \overline{1, n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности. Решение этой задачи в некоторых частных случаях получено в работах [2–5]. Данная работа посвящена исследованию этой задачи при $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}}]$ и $n \geq 14$.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Inner radius of domain, non-overlapping domains, extremal problems, separating transformation, quadratic differential, Green's function.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость или сфера Римана. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1, 7]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношениями

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, \infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Для произвольного набора различных точек единичной окружности $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, $a_1 = 1$ введем обозначения $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Статья поступила в редакцию 27.04.2018

ISSN 1810 – 3200.

Рассмотрим следующую задачу.

Проблема. Найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \text{ при } \gamma \in (0, n], \; n \geq 2,$$

где $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, где $B_0, \ldots, B_n$ — взаимно непересекающиеся области, причем области $B_1, \ldots, B_n$ симметричны относительно единичной окружности.

Нетрудно показать, что при $\gamma > n$ задача не имеет решения. В случае односвязных областей и конформных радиусов подобные задачи рассматривались в работе [6]. При $\gamma = 1$ и $n \geq 2$ эта задача была поставлена в качестве открытой проблемы в работе [1]. В 2000 году Л. В. Ковалев в работах [2, 3] получил ее решение. Для $\gamma \in (0, 1]$ и $n \geq 2$ задача решена в работе [4]. В данной статье получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 14$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{1}{3}}$. Тогда для любых различных точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, причем области B_k, $k = \overline{1, n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left[\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (1)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (2)$$

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k$. Следуя методу работы [7, Теорема 5.2.3], получим

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1 - \frac{\gamma}{n}}. \qquad (3)$$

Из теоремы М. А. Лаврентьева [8], следует неравенство

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k)\leq 1.$$

Тогда $\prod\limits_{k=1}^{n}[r(B_0,0)r(B_k,a_k)]^{\frac{\gamma}{n}}\leq 1.$

Ввиду того, что области B_k, $k=\overline{0,n}$, попарно взаимно не пересекаются, тогда по известной теореме В. Н. Дубинина [9], справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leq\ 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

Тогда очевидно, что

$$\left[\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\leq\left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Легко видеть, что $\alpha_0=\alpha_{k_0}=\max\limits_{k}\alpha_k$, где k_0 – некоторое натуральное число, заключенное между 1 и n.

Применяя неравенство Коши и учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=2$, получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\alpha_k &= \alpha_{k_0}\prod_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k\leq\alpha_{k_0}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k\right)^{n-1}\\ &= \alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекают следующие соотношения

$$\begin{aligned}\left[\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} &\leq \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\\ &= \left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.\end{aligned}$$

В свою очередь, учитывая предыдущие рассуждения, приходим к неравенству

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \qquad (4)$$

Рассмотрим полином

$$T_n(x) = x(2-x)^{n-1}, \quad x \in (0,2].$$

$$T_n'(x) = (2-x)^{n-2}(2-nx).$$

$$T_n'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{2}{n} \text{ или } x = 2.$$

Отсюда следует, что полином $T_n(x)$ имеет единственный максимум на промежутке $(0,2]$ в точке $x = \frac{2}{n}$. Таким образом, полином $T_n(x)$ монотонно возрастает на промежутке $\left(0, \frac{2}{n}\right)$ от значения $T_n(0) = 0$ к $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ и монотонно убывает на промежутке $\left(\frac{2}{n}, 2\right)$ от значения $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ к значению $T_n(2) = 0$. В дальнейшем будем рассматривать γ такие, чтобы выполнялось условие $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \geq \frac{2}{n}$, то есть такие γ, при которых выполняется неравенство $\gamma \leq \frac{n^2}{2}$. Тогда, на промежутке $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \leqslant x \leqslant 2$ $(\gamma \in (1, \sqrt[3]{n}])$ выполняется неравенство

$$x(2-x)^{n-1} \leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}. \quad (5)$$

Пусть

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

где $0 \cup \{a_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}$ и $\{B_k^{(0)}\}_{k=0}^{n}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (2). Из вида квадратичного дифференциала следует, что полюсы $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k = \overline{1,n}$, где $\omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}$, то есть являются корнями $n-$той степени из единицы.

Для дальнейшего нам важно вычислить величину $I_n^0(\gamma)$ при всех $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}}]$ и $n \geqslant 2$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При условиях теоремы (1) выполняются равенства*

$$\begin{aligned} I_n^0(\gamma) &= r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}\right) \\ &= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Система круговых областей квадратичного дифференциала (2) обладает $n-$кратной симметрией вращения относительно начала координат, а также симметрией относительно каждого луча $l_k = \{w : \arg w = \frac{2\pi k}{n}\}$, $k = \overline{0, n-1}$. Пусть $P_k^{(0)} := \{w : \arg \omega_k < \arg w < \arg \omega_{k+1}\}$. Применим разделяющее преобразование к системе круговых областей квадратичного дифференциала (2) с помощью системы функций $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$, где $\pi_k(w) = (\overline{\omega}_k \cdot w)^{\frac{n}{2}}$ и ветвь функции $t = \zeta^{\frac{n}{2}}$ выбрана так, что $\zeta^{\frac{n}{2}}\Big|_{\zeta=x} = x^{\frac{n}{2}} > 0$ если $x > 0$. В случае системы круговых областей квадратичного дифференциала (2), как было показано выше, $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k = \overline{1, n}$, $a_0^{(0)} = 0$.

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(\omega_k)$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1}^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(\omega_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси, $B_{n+1}^{(0)} := B_1^{(0)}$, $\pi_n(\omega_{n+1}) := \pi_n(\omega_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Отметим, что в силу выше описанных симметрий системы круговых областей $B_k^{(0)}$ квадратичного дифференциала (2) и свойств разделяющего преобразования следует, что все области $\Omega_k^{(1)}, k = \overline{1, n}$ совпадают при всех k с одной и той же областью Ω_1. Точно так же, все $\Omega_k^{(2)}, k = \overline{1, n}$ совпадают при всех k с одной и той же областью Ω_2. И, соответственно, области $\Omega_k^{(0)}, k = \overline{1, n}$ совпадают при всех k с одной и той же областью Ω_0, причем область Ω_1 симетрична области Ω_2 относительно мнимой оси, а область Ω_0 обладает симметрией относительно мнимой оси.

Тогда используя свойства разделяющего преобразования и симметрии областей $B_k^{(0)}$ получаем

$$r\left(B_0^{(0)},0\right)=\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right)=\left[\frac{2}{n}r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot\frac{2}{n}r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Итак,

$$r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right)$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4}{n^2}\gamma}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{4}{n^2}r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r\left(\Omega_1,1\right)r\left(\Omega_2,-1\right)\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_\infty,\infty\right)r\left(\Omega_1,1\right)r\left(\Omega_2,-1\right)\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{8\gamma}{n^2}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{4}},$$

где $\Omega_\infty=\{\zeta\in\overline{\mathbb{C}}:\frac{1}{\zeta}\subset\Omega_0\}$ и $r\left(\Omega_0,0\right)=r\left(\Omega_\infty,\infty\right).$

Используя несложные преобразования, получаем

$$A=\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B=\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}.$$

$$M=\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}},$$

$$N=\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$MN=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}},$$

и

$$AB=2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}MN=2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}}.$$

Таким образом,

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{n}{4}}.$$

Окончательно получаем, что утверждение леммы 1 справедливо. □

Пусть

$$J_n(\gamma)=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}=\frac{r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)},0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k^{(0)},a_k^{(0)})}.$$

Учитывая выше приведенные рассуждения, а также неравенство (4) и соотношения (6), получим оценку

$$J_n(\gamma)\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}$$

$$\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}$$

$$= \left[2^{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{n}$$

$$\times\left(\frac{n^2}{2\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}$$

$$= 2^{2n-2\gamma}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times n^{-(n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n})+n+\frac{2\gamma}{n}}\cdot 2^{-2n}\cdot(2\gamma)^{-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}$$

$$= 2^{-2\gamma}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot n^{1+\gamma+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

И окончательно получим

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким образом, нам удалось получить оценку величины $J_n(\gamma)$ через пять элементарных функций, зависящих от n и γ. Введем обозначения

$$Y_1(n,\gamma)=\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_2(n,\gamma)=\left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_3(n,\gamma)=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_4(n,\gamma)=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},\quad Y_5(n,\gamma)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Сначала изучим поведение величины $J_n(\gamma)$ при $\gamma=n^{\frac{1}{3}}$. В этом случае получаем следующие неравенства

$$J_n(n^{\frac{1}{3}})\leqslant\prod_{k=1}^{5}y_k(n),$$

где

$$y_k(n)=Y_k(n,n^{\frac{1}{3}}),k=\overline{1,5},$$

$$y_1(n)=\left[\frac{n}{4}\right]^{n^{\frac{1}{3}}+1}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}\right]^{n-1-n^{\frac{1}{3}}+n^{-\frac{2}{3}}},$$

$$y_2(n)=\left(\frac{4}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}\right)\cdot\left(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}}\right)^{n^{-\frac{2}{3}}},$$

$$y_3(n)=\left(1-2n^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{n}{2}+n^{-\frac{2}{3}}},\quad y_4(n)=\left(\frac{1+\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}}{1-\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}}\right)^{\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}},$$

$$y_5(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{3}}+n^{-\frac{2}{3}}}.$$

Теперь рассмотрим оценки каждого из множителей $y_k(n)$, $k=\overline{1,5}$.

Значения функций $y_k(n)$, $k=\overline{1,5}$, и величины $J_n(n^{\frac{1}{3}})$ для $n\in[13,30]$ представлены в виде следующей таблице.

n	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$J_n(\gamma)$
13	0,11914	2,55014	0,82816	2,07572	2,19631	1,14713
14	0,10336	2,50632	0,83644	2,00239	2,22009	0,96332
15	0,08911	2,46559	0,84375	1,93968	2,24138	0,80602
16	0,07641	2,42764	0,85027	1,88540	2,26056	0,67226
17	0,06521	2,39218	0,85613	1,83792	2,27796	0,55914
18	0,05541	2,35896	0,86142	1,79599	2,29381	0,46391
19	0,04691	2,32776	0,86624	1,75867	2,30834	0,38405
20	0,03958	2,29840	0,87065	1,72522	2,32170	0,31732
21	0,03330	2,27069	0,87471	1,69505	2,33404	0,26172
22	0,02794	2,24449	0,87845	1,66769	2,34549	0,21552
23	0,02338	2,21967	0,88192	1,64274	2,35612	0,17722
24	0,01953	2,19612	0,88514	1,61990	2,36605	0,14553
25	0,01628	2,17372	0,88815	1,59889	2,37533	0,11937
26	0,01354	2,15238	0,89096	1,57949	2,38403	0,09780
27	0,01124	2,13203	0,89360	1,56153	2,39221	0,08005
28	0,00932	2,11258	0,89608	1,54484	2,39992	0,06546
29	0,00772	2,09398	0,89842	1,52929	2,40719	0,05349
30	0,00638	2,07616	0,90063	1,51475	2,41407	0,04367

Из таблицы видно, что при всех $14 \leqslant n \leqslant 30$, $J_n(n^{\frac{1}{3}}) < 1$.

Для значений $n \in [31, 50]$ представим функцию $\ln y_1(n)$ в следующем виде

$$\ln y_1(n) = (n^{\frac{1}{3}} + 1) \ln\left(\frac{n}{4}\right) + n\left(1 - n^{-1} - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2} n^{\frac{1}{6}}}\right),$$

где

$$q_1(n) = 1 - n^{-1} - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}},$$

$$q_2(n) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2} n^{\frac{1}{6}}}\right).$$

Функция $q_1(x)$ монотонно возрастает на промежутке $n \geqslant 14$, тогда справедливо неравенство $q_1(x) \geqslant q_1(31) \approx 0,86968$. Так как функция $q_2(x)$ монотонно возрастает к нулю при всех $n \geqslant 14$, то выполняется следующее соотношение $q_2(x) \geqslant q_2(50) \approx -0,45951$. Принимая во внимание монотонность функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ и неравенство $\ln(\frac{n}{4}) \leqslant n^{\frac{1}{4}}$, получим для функции $y_1(n)$ следующее неравенство

$$\ln y_1(n) = (n^{\frac{1}{3}} + 1) \ln\left(\frac{n}{4}\right) + n q_1(n) q_2(n)$$
$$\leqslant (n^{\frac{1}{3}} + 1) \cdot n^{\frac{1}{4}} + n q_1(31) q_2(50) \leqslant n^{\frac{7}{12}} + n^{\frac{1}{4}} - 0,39963n.$$

Легко видеть, что функция

$$v_1(x) = x^{\frac{7}{12}} + x^{\frac{1}{4}} - 0,39963x.$$

монотонно убывает на промежутке $x \in [31, 50]$, тогда выполняются неравенства $v(x) \leqslant v(31) \approx -2,61649$ и $y_1(n) < 0,07306, n \in [31, 50]$.

Рассмотрим функцию

$$y_2(x) = \left(\frac{4}{\sqrt{2} x^{\frac{1}{6}}}\right) \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}}\right)^{x^{-\frac{2}{3}}}.$$

Тогда

$$(\ln y_2(x))'_x = x^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{\ln 2}{3} + \frac{5}{9} \ln \frac{1}{x} + \frac{5}{6} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{6}\right).$$

Очевидно, что при $n \in [31, 50]$ справедливо неравенство

$$y_2(n) < y_2(31) \approx 2,05908.$$

Ясно, что

$$y_3(n) = \left(1 - 2n^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{n}{2}+n^{-\frac{2}{3}}} < 1, \quad n \in [31, 50].$$

Функцию $y_4(n)$ представим в следующем виде

$$y_4(n) = \left(1 + \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}})\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}} \left(1 - \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(-\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}})\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}.$$

Так как $\left(1 + \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})} < e$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\left(1 - \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(-\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})} < 2,9$ при $n \geqslant 31$, то

$$y_4(n) \leqslant (2,9e)^{2n^{-\frac{2}{3}}}|_{n=31} < 1,51962 \quad \text{при}\, n \in [31, 50].$$

Для функции $y_5(n)$ выполняется следующее соотношение

$$y_5(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{3}}+n^{-\frac{2}{3}}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e.$$

Таким образом, при $n \in [31, 50]$ получаем, что

$$J_n(n^{\frac{1}{3}}) \leqslant \prod_{k=1}^{5} y_k(n) \leqslant 0,07306 \cdot 2,05908 \cdot 1 \cdot 1,51962 \cdot e$$
$$\leqslant 0,62142 < 1.$$

Пусть теперь $n \geqslant 51$.

При $0 < x < 1$ выполняется неравенство

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots < -x.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\ln y_1(n) \leqslant (n^{\frac{1}{3}}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) + \left(n - 1 - n^{\frac{1}{3}} + n^{-\frac{2}{3}}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}\right)$$
$$\leqslant (n^{\frac{1}{3}}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) + \left(n - 1 - n^{\frac{1}{3}} + n^{-\frac{2}{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}\right)$$
$$= (n^{\frac{1}{3}}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{5}{6}}\left(1 - n^{-1} - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}}\right).$$

Таким образом,

$$\ln y_1(n) \leqslant (n^{\frac{1}{3}}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\frac{5}{6}} q_1(n),$$

где

$$q_1(n) = 1 - n^{-1} - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}}.$$

Так как

$$\ln\left(\frac{n}{4}\right) \leqslant 1,05\sqrt[4]{n} \quad \text{при } n \geqslant 14,$$

то

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{\frac{1}{3}}+1\right) 1,05\sqrt[4]{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\frac{5}{6}} q_1(50) \quad \text{при } n > 50.$$

Рассмотрим функцию $v_2(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}+1\right) 1,05\sqrt[4]{x} - 0,7x^{\frac{5}{6}}$, $x > 50$.

Легко видеть, что функция $v_2(x)$ на промежутке $x \geqslant 51$ монотонно убывает и справедливы неравенства $v_1(x) < v_1(51) \approx -5,32677$, $y_1(n) < e^{v_1(51)} \approx 0,00486, n \in [51,\infty)$.

В силу выше указанной монотонности функции $y_2(x)$ на промежутке $x \geqslant 51$, справедливо неравенство

$$y_2(n) < y_2(51) \approx 1,81751, n \in [51,\infty).$$

Как и выше, ясно что

$$y_3(n) = \left(1 - 2n^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{n}{2}+n^{-\frac{2}{3}}} < 1, \quad n \in [51,\infty).$$

Аналогично предыдущему, преобразуем функцию $y_4(n)$ следующим образом

$$y_4(n) = \left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}})\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}} \left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(-\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}})\sqrt{2}n^{\frac{1}{6}}}.$$

Поскольку $\left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})} < e$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}\right)^{(-\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}})} < 2,8$ при $n \geqslant 51$, то

$$y_4(n) \leqslant (2,8e)^{2n^{-\frac{2}{3}}} < 1,34335 \quad \text{при } n \in [51,\infty).$$

Для функции $y_5(n)$ ранее было установлено неравенство

$$y_5(n) < e.$$

Таким образом,

$$J_n(n^{\frac{1}{3}}) \leqslant \prod_{k=1}^{5} y_k(n) \leqslant 0,00486 \cdot 1,81751 \cdot 1 \cdot 1,34335 \cdot e$$

$$\leqslant 0,03226 < 1.$$

Таким образом, подытоживая все предыдущие рассуждения получим, что $J_n\left(n^{\frac{1}{3}}\right) < 1$ при $n \geqslant 14$ и $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$.

Теперь необходимо показать, что справедливо неравенство $J_n(\gamma) <$ 1 при $n \geqslant 14$ и $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}})$ и $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$. Для этого докажем следующие утверждения.

Лемма 2. *При каждом фиксированном* $n \geqslant 14$, *функция* $m_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$ *монотонно возрастает по* γ *на промежутке* $(1;\, n^{\frac{1}{3}}]$.

Доказательство. Справедливы соотношения

$$\ln(m_n(\gamma)) = (1-\frac{\gamma}{n})\left[n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\gamma\right.$$

$$\left.+(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma = -\ln 4 + \frac{1}{2n}\ln 2 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)$$

$$+\frac{n-1}{n}\ln(n-1) + (1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1}-1\right).$$

Ввиду того, что справедливы следующие неравенства

$$0 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{13}{14}\ln 13 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

и

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \geqslant 0, \quad (1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1}-1\right) \geqslant 0,$$

легко видеть, что $m_n(\gamma)$ монотонно возрастает при указанных в лемме параметрах n, γ. Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма 3. *При каждом фиксированном* $n \geqslant 14$, *функционал* $I_n^0(\gamma)$ *монотонно убывает по* γ *на промежутке* $(1;\, n^{\frac{1}{3}}]$.

Доказательство. В лемме 1 показано, что величина $I_n^0(\gamma)$ удовлетворяет следующему равенству

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left[\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Так как

$$\ln I_n^0(\gamma) = n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2} - \left(\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}\right)\ln(1-\frac{2\gamma}{n^2}) + \sqrt{2\gamma}\ln\left[\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right],$$

то

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2-2\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\ln\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right].$$

Обозначив $\frac{\sqrt{2\gamma}}{n} = x$, получим, что $\gamma = \frac{1}{2}n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}nx$ и $\frac{\sqrt{2}}{n} \leq x \leq \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}$.

Используя указанные обозначения, преобразуем выражение логарифмической производной $I_n^0(\gamma)$ следующим образом

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{1}{nx}\ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right].$$

Далее используя известные формулы

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - ...,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+...\right),$$

получим, что

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+...+\frac{x^{2n}}{n}+...\right)$$
$$-\frac{2}{n}\left[1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{x^{2k}}{2k+1}\right]+\dots.$$

Не трудно видеть, что справедливо следующее соотношение

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x - \frac{2}{n} + \frac{x^2}{n}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)$$

$$+ \ldots + \frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) + \ldots.$$

Учитывая, что $n \geqslant 14$, $\frac{\sqrt{2}}{n} \leq x \leq \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}$ и $\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k(2k+1)} \leqslant \frac{1}{3}, k \geqslant 1$, получим

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant -\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + ... + \frac{1}{3}x^{2k} + ...\right)$$

$$= -\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{42}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

В силу монотонного возрастания функции $\frac{x^2}{1-x^2}$ на промежутке $[0,1)$, для $x \in [\frac{\sqrt{2}}{n}, \sqrt{2}n^{-\frac{5}{6}}]$, справедливы неравенства

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant -\frac{2}{n}\left(1 + \ln\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{42}\left(\frac{2}{n^{\frac{5}{3}} - 2}\right)$$

$$< -\frac{2}{n}\left(1 + \ln\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{42}\left(\frac{2}{n^{\frac{5}{3}} - 2}\right)$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65 + \frac{5}{6}\ln n - \frac{1}{42}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1 - \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}}\right)$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65 - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right) < 0,$$

поскольку

$$\frac{1}{42}\frac{1}{1 - \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}} < 1, n \geqslant 14.$$

Очевидно, что $0,65 - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} > 0$ при всех $n \geqslant 14$.

Таким образом, $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ на всем промежутке $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}}]$.

Лемма 3 доказана. $\square$

Принимая во внимание результаты лемм 2, 3 получаем, что справедливы следующие соотношения

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{m_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{m_n(n^{\frac{1}{3}})}{I_n^0(n^{\frac{1}{3}})} < 1.$$

Таким образом, при $n \geqslant 14$ и $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}}]$ и $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$ выполняется неравенство $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$, а это означает, что для указанных параметров n, γ, α_0 экстремальных конфигураций не существует.

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$. В этом случае применим метод разделяющего преобразования. Рассмотрим систему функций $\pi_k(w) = \left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ называется допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k = \overline{0,n}$ относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$, $P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси, $B_{n+1} := B_1, \pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)} = 1,\ \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)} = -1,\ k = \overline{1,n},\ \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что справедливы следующие асимптотические соотношения

$$|\pi_k(w) - 1| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) + 1| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

В соответствии с методом, предложенным В. Н. Дубининым (см. [9]), получаем оценки

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot\alpha_{k-1} r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

тогда

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 r\left(\Omega_k^{(1)},1\right) r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right) r\left(\Omega_k^{(1)},1\right) r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Аналогично работе [12], произведем оценку функционала $r^{\alpha_k^2\gamma}(G_0,0)r(G_1,1)r(G_2,-1)$, где области G_0, G_1, G_2 являются попарно непересекающимися областями комплексной плоскости, причем $0\in G_0$, $1\in G_1$, $-1\in G_2$ и области G_1, G_2 обладают симметрией относительно единичной окружности. К областям G_0, G_1, G_2 применим разделяющее преобразование следующего вида. Пусть

$$M_k := \{z : (-1)^{k+1} Im\, z > 0\}, \quad k\in\{1,2\},$$

$$D_1 = \overline{M_1}\cap K_1, \quad D_2 = \overline{\mathbb{C}}\backslash K_1\cap\overline{M_1}, \quad D_3 = \overline{M_2}\cap K_1, \quad D_4 = \overline{\mathbb{C}}\backslash K_1\cap\overline{M_2},$$

$$\zeta = \beta(z) = \frac{2z}{1+z^2},$$

где K_1 – открытый единичный круг комплексной плоскости. Из определения функции $\beta(z)$, получаем следующие асимптотические соотношения

$$|\beta(z)| \sim 2|z|, \quad z\to 0, \quad z\in\overline{D_k},$$

$$|\beta(z)-1| \sim \frac{1}{2}\left|z-1\right|^2, \quad z\to 1, \quad z\in\overline{D_k},$$

$$|\beta(z)+1| \sim \frac{1}{2}\left|z+1\right|^2, \quad z\to -1, \quad z\in\overline{D_k}.$$

Пусть $G_k^{(0)}$, $k=\overline{1,4}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\beta(G_0\bigcap\overline{D}_k)$, содержащей точку 0, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. Через $G_k^{(1)}$, $k=\overline{1,4}$, обозначим область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\beta(G_1\bigcap\overline{D}_k)$, содержащей точку 1, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. Кроме того, пусть $G_k^{(2)}$, $k=\overline{1,4}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\beta(G_2\bigcap\overline{D}_k)$, содержащей точку -1, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси.

Тогда имеем неравенства

$$r\left(G_0,0\right)\leq\left[\frac{1}{2}r\left(G_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(G_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1,1\right)\leq\left[2r\left(G_1^{(1)},1\right)2r\left(G_1^{(2)},1\right)2r\left(G_1^{(3)},1\right)2r\left(G_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(G_2,-1\right)\leq\left[2r\left(G_2^{(1)},-1\right)2r\left(G_2^{(2)},-1\right)2r\left(G_2^{(3)},-1\right)2r\left(G_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Поскольку области G_1, G_2, обладают симметрией относительно единичной окружности, то области $G_1^{(1)}$, $G_1^{(3)}$, $G_2^{(1)}$, $G_2^{(3)}$, совпадают соответственно с областями $G_1^{(2)}$, $G_1^{(4)}$, $G_2^{(2)}$ $G_2^{(4)}$, и справедливы неравенства

$$r\left(G_1,1\right)\leq\left[2^4r^2\left(G_1^{(1)},1\right)r^2\left(G_1^{(3)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}}=\left[2^2r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_1^{(3)},1\right)\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$r\left(G_2,-1\right)\leq\left[2^4r^2\left(G_2^{(1)},-1\right)r^2\left(G_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}$$
$$=\left[2^2r\left(G_2^{(1)},-1\right)r\left(G_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

И окончательно получим

$$r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_0,0\right)r\left(G_1,1\right)r\left(G_2,-1\right)$$
$$\leq 2^{1-\alpha_k^2\gamma}\left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(1)},0\right)r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(3)},0\right)r\left(G_1^{(3)},1\right)r\left(G_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В случае когда $2\alpha_k^2\gamma \leq 4$, в силу известных результатов [9, 12], получаем

$$r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(s)},0\right)r\left(G_1^{(s)},1\right)r\left(G_2^{(s)},-1\right)$$

$$\leq r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(\tilde{G}_0^{(s)},0\right)r\left(\tilde{G}_1^{(s)},1\right)r\left(\tilde{G}_2^{(s)},-1\right)$$

$$=\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}},\quad s=1,3,$$

где $\tilde{G}_0^{(0)}$, $\tilde{G}_1^{(0)}$, $\tilde{G}_2^{(0)}$ являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2=-\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)z^2+2\alpha_k^2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2, \tag{8}$$

и $0\in\tilde{G}_0^{(0)}$, $1\in\tilde{G}_1^{(0)}$, $-1\in\tilde{G}_2^{(0)}$.

Учитывая, что $\alpha_k^2\gamma \leq 2$, то из всего выше приведенного следует, что

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)\,2^{\frac{1-\alpha_k^2\gamma}{2}}$$

$$\times\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^8\,(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$\Psi(x)=2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

где $x=\alpha_k\sqrt{2\gamma}$, $x\in[0,2]$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\longrightarrow\max,\quad \sum_{k=1}^{n}x_k=2\sqrt{2\gamma}, x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma},\quad 0<x_k<2. \tag{9}$$

Пусть $F(x)=\ln(\Psi(x))$ и $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольная система экстремальных точек задачи (9).

Аналогично рассуждениям, приведенным в работе [10] получаем утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тогда имеет место соотношение

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}),$$

и если некоторое $x_j^{(0)} = 2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1,$$

где $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{4}{x}$ (см. Рис. 1).

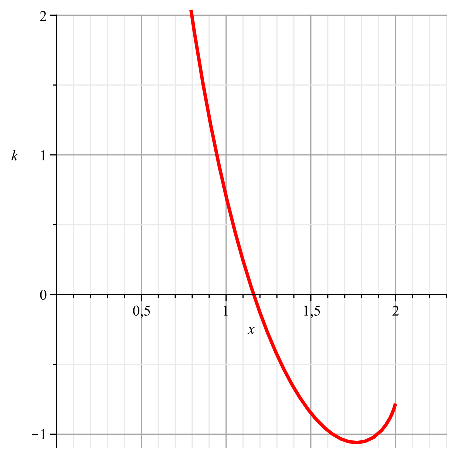

Рис. 1: График функции $F'(x)$

Убедимся, что при условиях теоремы 1 выполняется условие

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Функция

$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$

строго возрастает на $(0, 2)$ и существует x_0, $x_0 \approx 1,768828$ такое, что

$$F''(x_0) = 0.$$

Тогда функция $t = F'(x)$ монотонно убывает на промежутке $(0, x_0]$ и монотонно возрастает на промежутке $[x_0, 2]$. На промежутке $[t_0, t_1]$, где $t_0 = F'(x_0) \approx -1,059$, а значение $t_1 = F'(2) \approx -0,78$, имеются два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения $F'(x) = t$, где $t \in [t_0, t_1]$, причем $1,45 < x_1(t) \leqslant x_0 \leqslant x_2(t) < 2$.

Предположим, что существует система экстремальных точек $x_k^{(0)}$ задачи (9) такая, что одна из этих точек принадлежит интервалу $(x_0, 2)$. Тогда имеет место неравенство $(x_1 - 1,45)\, n + (x_2 - x_1) > 0$ для $n \geqslant 14$. Отсюда $(n-1)x_1 + x_2 > 1,45n$.

С другой стороны необходимо, чтобы $(n-1)x_1 + x_2 = 2\sqrt{2\gamma}$.

Таким образом, $2\sqrt{2\gamma} > 1,45n$, то есть $\gamma > 0,2625n^2$.

Следовательно, для того, чтобы одна из экстремальных точек, а именно $x_2(t) \in [x_0, 2)$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\gamma > 0,2625n^2$. С другой стороны, $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}})$, тогда необходимо, чтобы выполнялось неравенство $0,2625n^2 < n^{\frac{1}{3}}$, а это не возможно при $n \geq 14$. Таким образом, $x_2(t)$ обязано лежать на промежутке $(0, x_0]$. Тогда с учетом леммы 1 получается, что все $x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}$.

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left[1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left[\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Поскольку для экстремального случай все $\alpha_k = \frac{2}{n}$, то квадратичный дифференциал (8) принимает вид

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(n^2 - 2\gamma)z^2 + 2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\, dz^2. \tag{10}$$

Делая в квадратичном дифференциале (10) замену переменной по формуле $z = 2w^{\frac{n}{2}}/(1 + w^n)$, получаем квадратичный дифференциал (2), который описывает экстремальную конфигурацию.

Теорема 1 доказана. □

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 14$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{1}{3}}$. Тогда для любых различных точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, причем области B_k, $k = \overline{1,n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности, справедливо неравенство

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right) \leq r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right), \tag{11}$$

где $a_k^{(0)}$ и $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{12}$$

Литература

[1] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (295) (1994), No. 1, 3–76.

[2] Л. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей* // Изв. вузов. Матем., (2000), No. 6, 80–81.

[3] , Л. Ковалев, *О трех непересекающихся областях* // Дальневост. матем. журн., **1** (2000), No. 1, 3–7.

[4] Я. В. Заболотный, Л. В. Выговская, *О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей* // Укр. матем. вiсник, **14** (2017), No. 3, 441–452.

[5] L. V. Vyhivska, *On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains* // Journal of Mathematical Sciences, **229** (2018), No. 1, 108–113.

[6] Г. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев, (1984), 21–27.

[7] А. Бахтин, Г. Бахтина, Ю. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе* // Труды Ин–та математики НАН Украины, **73** (2008), 308.

[8] М. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

[9] В. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168**, Изд–во “Наука”, Ленинград. отд., Л., (1988), 48–66.

[10] Л. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. матем. сб., **2** (1996), 96–98.

[11] А. К. Бахтин. *Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей* // Зб. пр. Iнституту математики НАН України, **14** (2017), No. 1, 25–33.

[12] А. К. Бахтин, Г. П.Бахтина, И. В. Денега, *Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами* // Зб. праць Iн-ту матем. НАН України, **14** (2017), No. 1, 34–38.

[13] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: abahtin@imath.kiev.ua

Людмила Вячеславовна Выговская
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: liudmylavygivska@ukr.net