ЗАДАЧА ФУРЬЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Н.М. Бокало

Львов, Украина

Введение. В задаче Фурье для линейных и многих нелинейных параболических уравнений вместо классического начального условия задают определенные условия на поведение решения, когда временная переменная стремится к $-\infty$ [1-3]. Но существуют нелинейные уравнения, для которых таких условий не требуется [5,6]. В данной работе указан еще один класс уравнений такого рода. Отметим, что единственность обобщенных решений рассмотренной здесь задачи имеет место без каких-либо ограничений на поведение решений на бесконечности и по пространственным переменным. Здесь также доказано существование обобщенного решения без предположений о росте исходных данных на бесконечности, что также является в некотором смысле исключением из общего правила [1-4]. При обосновании соответствующих утверждений используется идея работы [7]. Заметим, что аналогичные результаты имеются и для задач других типов ([7-14]).

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть Ω – произвольная неограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, T – конечное число или $+\infty$. Положим $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$.

Рассматривается задача

$$u_t + (-\Delta)^m u + c(x,t,u) = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q\ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \quad (j = 0, 1, ..., m-1), \tag{2}$$

где $m \geqslant 1$ – целое число, ν – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Предположим, что

(A) функция $c(x,t,s)$, $(x,t,s) \in Q \times \mathbb{R}$, является каратеодориевской и для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и почти всех $(x,t) \in Q$ удовлетворяют неравенству

$$|c(x,t,s)| \leqslant c_1(x,t)|s|^{p-1} + c_2(x,t), \tag{3}$$

где $p > 2$, $c_1 \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $c_2 \in L^{p'}_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $c(x,t,0) = 0$, $(x,t) \in Q$;

(B) $f \in L^{p'}_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Эта работа частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP) Международного фонда "Возрождение", грант N APU 061007

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];\ \overset{o}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})),$$
$$u_t \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];\ H^{-m}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) + L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),$$

которая удовлетворяет уравнению (1).

Предположим, что точка $x = 0$ принадлежит Ω. Пусть для произвольного числа $R > 0$ Ω_R – связная компонента множества $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, которой принадлежит точка $x = 0$. Тогда, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для любых R, R_1 таких, что $0 < R < R_1$. Пусть $Q_{R,t_0} = \Omega_R \times (t_0 - R, t_0)$, где t_0 – произвольное число. Обозначим $|D^i u|^2 = \sum\limits_{|\alpha|=i} |D^\alpha u|^2$ для любого $i \in \{0, 1, ..., m\}$.

Теорема 1. *Пусть для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и почти всех $(x,t) \in Q$*

$$c(x,t,s)s \geqslant K_1|s|^p - b(x,t), \tag{4}$$

где $K_1 = const > 0$, $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $b(x,t) \geqslant 0$ для почти всех $(x,t) \in Q$.

Тогда существует обобщенное решение задачи (1), (2). Кроме того, для произвольного обобщенного решения u этой задачи и любых чисел t_0, R_0, R таких, что $t_0 \leqslant T$, $0 < R_0 < R$, справедлива оценка

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} u^2(x,t)\,dx + \sum_{i=0}^{m} (R-R_0)^{2(i-m)} \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} |D^i u|^2\,dxdt + \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} |u|^p\,dxdt \leqslant$$

$$\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \left(C_1 R^{n+1-p/(p-2)} + C_2 R^{n+1-2mp/(p-2)} + C_3 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} (|f|^{p'} + b)dxdt \right), \tag{5}$$

где $\varkappa > (2m+1)p/(p-2)$ – произвольное число; $C_1, C_2, C_3 > 0$ – постоянные, которые зависят только от $n, m, p, \varkappa, K_1$.

Следствие. *Пусть $p \in (2; 2(n+1)/n)$, $f \in L^{p'}(Q)$, $b \in L^1(Q)$ и имеют место условия теоремы 1. Тогда обобщенное решение u задачи (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\sup_{(-\infty,T]} \int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx + \iint\limits_{Q} (|D^m u|^2 + |u|^p)\,dxdt \leqslant C_3 \iint\limits_{Q} (|f|^{p'} + b)\,dxdt,$$

где C_3 – постоянная из оценки (5).

Теорема 2. *Пусть для любых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ и почти всех $(x,t) \in Q$*

$$(c(x,t,s_1) - c(x,t,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant K_2|s_1 - s_2|^q, \tag{6}$$

где $q \in (2; p]$, если $p \in (2, 2(n+1)/n)$, и $q \in (2; 2(n+1)/n)$, если $p \in [2(n+1)/n; +\infty)$; $K_2 = \mathrm{const} > 0$.

Тогда обобщенное решение задачи (1), (2) единственно.

Обозначим через e^i n-мерный вектор, i-тая компонента которого равна 1, а остальные – нули ($i \in \{1, ..., n\}$).

Теорема 3. *Пусть имеют место условия теорем 1 и 2. Кроме того, пусть существуют числа $h > 0$ и $k \in \{1, 2, ...n\}$ такие, что: 1) $x \pm he^k \in \Omega$ для произвольных $x \in \Omega$; 2) $c(x + he^k, t, \xi) = c(x, t, \xi)$ для любых ξ и почти всех $(x,t) \in Q$; 3) $f(x + he^k, t) = f(x, t)$ для почти всех $(x, t) \in Q$.*

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2) и оно является периодическим по переменной x_k с периодом h.

Теорема 4. *Пусть имеют место условия теорем 1 и 2. Кроме того, пусть $T = +\infty$ и существует число $\sigma > 0$ такое, что: 1) $c(x, t + \sigma, \xi) = c(x, t, \xi)$ для всех ξ и почти всех $(x, t) \in Q$; 2) $f(x, t) = f(x, t + \sigma)$ для почти всех (x, t).*

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2) и оно является периодическим по переменной t с периодом σ.

2. Доказательство основных результатов. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть u – обобщенное решение задачи (1), (2), $\tilde{u}$ – обобщенное решение задачи, которая отличается от задачи (1), (2) только тем, что в правой части уравнения (1) вместо f стоит $\tilde{f} \in L^{p'}_{\text{loc}}(\overline{Q})$. Предположим, что имеет место неравенство (6) с произвольным $q \in (2, p]$. Тогда для любых чисел t_0, R_0, R таких, что $t_0 \leqslant T, 0 < R_0 < R$,*

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |(u-\tilde{u})(x,t)|^2\,dx + \sum_{i=0}^{m} (R-R_0)^{2(i-m)} \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} |D^i(u-\tilde{u})|^2\,dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} |u-\tilde{u}|^p\,dxdt \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \Bigg(C_4 R^{n+1-q/(q-2)} +$$

$$+ C_5 R^{n+1-2mq/(q-2)} + C_6 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} |f-\tilde{f}|^{p'}\,dxdt \Bigg), \tag{7}$$

где $\varkappa > (2m+1)q/(q-2)$ – произвольное число; $C_4, C_5, C_6 > 0$ – постоянные, которые зависят только от $n, p, q, \varkappa, K_2$.

Доказательство. Пусть $R > 0, t_0 < T$ – произвольные числа. Определим функции ζ и χ таким образом: $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, если $|x| \leqslant R$, и $\zeta(x) = 0$, если $|x| > R$; $\chi(t) = R - |t - t_0|$, если $t \in [t_0 - R, t_0]$, и $\chi = 0$, если $t \notin [t_0 - R, t_0]$.

Вычтем из уравнения (1) для u аналогичное уравнения для $\tilde{u}$ и "умножим" полученное равенство на $\psi = w\zeta^s\chi^r$, где $w = u - \tilde{u}$, s и r – пока произвольные достаточно большие положительные числа, и проинтегрируем по t от $t_0 - R$ до произвольного фиксированного $\tau \in (t_0 - R, t_0]$. В результате, после несложных преобразований, получим

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2} \int\limits_{\Omega_R} w^2|_{t=\tau}\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} \{ \sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha}wD^{\alpha}(w\zeta^s)\chi^r +$$

$$(c(x,t,u)-c(x,t,\tilde{u}))w\zeta^s\chi^r\}dxdt = \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} w^2\zeta^s\chi^{r-1}dxdt + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} (f-\tilde{f})w\zeta^s\chi^r\,dxdt, \quad (8)$$

где $Q^{\tau}_{R,t_0} = \Omega_R \times (t_0 - R, \tau)$.

Согласно утверждению 3.1 на стр. 220 работы [10] имеем

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha w D^\alpha (w\zeta^s)\,dx \geqslant (1-\varepsilon)\int\limits_{\Omega_R} |D^m w|^2\zeta^s\,dx - C(\varepsilon)\int\limits_{\Omega_R} w^2\zeta^{s-2m}\,dx, \quad (9)$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, $s > 2m$, $C(\varepsilon)$ – константа, которая зависит от n, m, s, ε.

На основании (6) и (9) (взяв $\varepsilon = 1/4$) из (8) получим

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R} w^2|_{t=\tau}\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} \{\frac{3}{4}|D^m w|^2 + K_2|w|^q\}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} w^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt + C_7\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} w^2\zeta^{s-2m}\chi^r\,dxdt + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} (f-\tilde{f})\,w\zeta^s\chi^r\,dxdt, \quad (10)$$

где $C_7 > 0$ – постоянная, зависящая только от n, m, s.

В силу неравенства (I.2) на стр. 237 работы [7] для каждого $i \in \{0, ..., \ m-1\}$ имеем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_R} |D^i w|^2\zeta^{s+2(i-m)}\,dx \leqslant \delta\int\limits_{\Omega_R} |D^m w|^2\zeta^s\,dx + C(i,\delta)\int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2m}\,dx, \quad (11)$$

где $\delta > 0$ – произвольное число, $C(i,\delta) > 0$ – постоянная, которая зависит только от n, m, i, δ.

Из (10) и (11), вибрав соответствующим образом δ, получим

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} w^2|_{t=\tau}\zeta^s\,dx + \sum_{i=0}^{m}\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} |D^i w|^2\zeta^{s+2(i-m)}\chi^r\,dxdt + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} K_2|w|^q\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant r\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} w^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt + C_8\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} w^2\zeta^{s-2m}\chi^r\,dxdt + 2\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} (f-\tilde{f})w\zeta^s\chi^r\,dxdt, \quad (12)$$

где $C_8 > 0$ – постоянная, зависящая только от n, m, s.

Возьмем $s > 2mq/(q-2), r > q/(q-2)$ и оценим сверху члены правой части неравенства (1.17), используя неравенство Юнга. В результате приходим к неравенству

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} w^2|_{t=\tau}\zeta^s\,dx + \sum_{i=0}^{m}\iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} |D^i w|^2\zeta^{s+2(i-m)}\chi^r\,dxdt + \iint\limits_{Q^{\tau}_{R,t_0}} |w|^p\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \iint\limits_{Q^\tau_{R,t_0}} \zeta^{s-\frac{2mq}{q-2}}\chi^r\,dxdt + C_{10}\iint\limits_{Q^\tau_{R,t_0}} \zeta^s\chi^{r-\frac{q}{q-2}}\,dxdt + C_{11}\iint\limits_{Q^\tau_{R,t_0}} |f-\tilde f|^{p'}\zeta^s\chi^r\,dxdt,$$

где $C_9, C_{10}, C_{11} > 0$ – постоянные, которые зависят только от n, m, s, r, K_2, p, q.

Отсюда, учитывая, что $R-|x| \leqslant \zeta(x) \leqslant 2(R-|x|)$, легко получить (5). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Выберем последовательность областей $\{\Omega^k\}$ такую, что $\Omega^k \supset \Omega_k$, $\operatorname{dist}(\partial\Omega^k\setminus\partial\Omega, \partial\Omega^{k+1}\setminus\partial\Omega) > 0$, $\partial\Omega^k$ – кусочно-гладкая $(k\in\mathbb{N})$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\Omega^k = \Omega, \operatorname{dist}(O, \partial\Omega^k\setminus\partial\Omega) \geqslant k$, где O – начало координат. Предположим, что T – конечное и обозначим $Q^k = \Omega^k\times(T-k,T)$, $\Sigma^k = \partial\Omega^k\times(T-k,T)$ $(k\in\mathbb{N})$.

Рассмотрим семью $(k\in\mathbb{N})$ смешанных задач

$$u_{kt} + (-\Delta)^m u_k + c(x,t,u_k) = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q^k, \tag{13_k}$$

$$\frac{\partial^j u_k}{\partial\nu^j} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^k \quad (j = 0,1,\ldots,m-1), \tag{14_k}$$

$$u_k|_{t=T-k} = 0. \tag{15_k}$$

Под обобщенным решением задачи $(13_k)-(15_k)$ понимаем функцию $u_k \in L^2((T-k,T);\overset{o}{H}{}^m(\Omega^k)) \cap L^p(Q^k) \cap C([T-k,T];L^2(\Omega^k))$, $u_{kt} \in L^2((T-k,T);H^{-m}(\Omega^k)) + L^{p'}(Q^k)$, которая удовлетворяет уравнению (13_k) и условию (15_k) . Из [15] следует существование единственного обобщенного решения u_k задачи $(13_k)-(15_k)$ для каждого $k\in\mathbb{N}$. Доопределим u_k нулем на $Q\setminus Q_k$ и полученную функцию обозначим опять через u_k. Покажем, что последовательность $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность, которая стремится в некотором смысле к обобщенному решению задачи (1), (2). При этом будем выделять соответствующие подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$, которые, для сокращения записей, условимся обозначать так же, как и всю последовательность, через $\{u_k\}$.

Пусть l – произвольное натуральное число. Размышляя аналогично, как при доказательстве леммы, и используя при этом неравенство (4) вместо (5), для любых $k > 2l$ получим

$$\sup_{[T-l,T]}\int\limits_{\Omega_l} u_k^2(x,t)\,dx + \iint\limits_{Q_l}\Big(\sum_{i=1}^m |D^i u_k|^2 + |u_k|^p\Big)\,dxdt \leqslant C(l), \tag{16}$$

где $C(l) = \text{const} > 0$ от k не зависит.

Из (3) и (16) следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$ и функций $u \in \overset{o}{H}{}^{m,0}_{\text{loc}}(\overline{Q})\bigcap L^p_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\chi \in L^{p'}_{\text{loc}}(\overline{Q})$ таких,что

$$u_k \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2((T-l,T);H^m(\Omega_l)), \tag{17}$$

$$u_k \to u \quad \text{слабо в} \quad L^p(Q_l), \tag{18}$$

$$u_k \to u \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty((T-l,T);L^2(\Omega_l)), \tag{19}$$

$$c(\cdot,\cdot,u_k(\cdot,\cdot)) \to \chi(\cdot,\cdot) \quad \text{слабо в } L^{p'}(Q_l) \tag{20}$$

для произвольных $l \in \mathbb{N}$.

Учитывая (17)-(20), на основании уравнений $(13_k)(k \in \mathbb{N})$ легко устанавливаем, что

$$(u_k)_t \to u_t \quad \text{слабо в} \quad L^2((T-l,T);H^{-m}(\Omega_l)) + L^{p'}(Q_l).$$

Отсюда и из (17), (18) на основании леммы о компактности [15, Лемма 1.3, §1, Глава I] получим, что

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_l).$$

Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{u_k\}$, которая стремится к u почти всюду на Q_l. Отсюда, учитывая (A), (20) и лемму [15,стр. 25], вытекает, что

$$c(\cdot,\cdot,u_k(\cdot,\cdot)) \to c(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot)) \quad \text{слабо в } L^{p'}(Q_l). \tag{21}$$

Из (17),(18),(21) легко вытекает, что u – обобщенное решение задачи (1), (2). Оценка (5) решения следует из леммы. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть u_1, u_2 – два обобщенных решения задачи (1), (2). В силу леммы для $w = u_1 - u_2$ имеем оценку

$$\iint\limits_{Q_{R,t_0}} (|D^m(u_1-u_2)|^2 + |u_1-u_2|^q)\,dxdt \leqslant C_{10}R^{n+1-q/(q-2)}, \tag{22}$$

где C_{12} – положительная постоянная, которая зависит только от n, m, q, K_2, $R > 1$ – произвольная постоянная.

Поскольку $q \in (2; \frac{2(n+1)}{n})$, то $n+1-q/(q-2) < 0$. Учитывая это, перейдем в (22) к пределу, устремив R к $+\infty$. В результате получим $w = 0$ почти везде на Q, что и надо было показать. □

Доказательство теоремы 3. В силу наших условий из теорем 1 и 2 имеем существование единственного обобщенного решения u задачи (1), (2). Поскольку функция $u(x+he^k,t),(x,t) \in Q$, тоже является обобщенным решением задачи (1),(2), то из единственности обобщенного решения этой задачи (1), (2) следует равенство $u(x+he^k,t) = u(x,t)$ для почти всех $(x,t) \in Q$. Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 4. Рассуждая аналогично, как при доказательстве теоремы 3, и учитывая, что $c(x,t+\sigma,u(x,t+\sigma)) = c(x,t,u(x,t+\sigma)),(x,t) \in Q$, получим нужное утверждение. □

Список литературы

1. Тихонов А.Н., *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности*, Матем. сборник, 2, (1935), 199–216.
2. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*, Успехи мат. наук, 6, 31 (1976), 142–166.

3. Бокало М.М., *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений.*, Дифференц. уравнения., 8, **30** (1994), 1395–1402.
4. Шишков А.Е., *Эволюция носителя решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка*, Матем. сборник, 12, **186** (1995), 151–172.
5. Бокало Н.М., *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Тр. семинара им. И.Г.Петровского. **14** (1989), 3–44.
6. Бокало Н.М., *Об однозначной разрешимости задачи без начальных условий для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*, Сиб. мат. ж., 4, **34** (1993), 33–40.
7. Bernis F., *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity*, Arch. Ration Mech. and Anal. **106** (1989), no. 3, 217–241.
8. Brezis H., *Semilinear equations in* R^N *without condition at infinity*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), 271–282.
9. Herrero M.A., Pierre M., *Cauchy problem for* $u_t - \Delta u^m = 0$, *when* $0 < m < 1.$, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 145–158.
1985. V.291. P.145-158.
10. Гладков А.Л., *Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением*, Сиб.мат. журн., 1, **34** (1993), 47–64.
11. Абдуллаев У.Г., *О существовании неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности со стоком*, Журн. вычисл. мат. и мат. физики., 2, **33** (1993), 232–245.
12. Vazquez J.L., Walias M., *Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data*, Journ. Diff. Int. Equations **7** (1994), 15–36.
13. Курта В.В., *О поведении решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, 10, **30** (1994), 1782–1791.
14. Guo J.S., *Large time behaviour of solutions of fast diffusion equation with source*, Nonlin. Anal. **23** (1994), no. 12, 1559–1568.
15. Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972.