

**УСРЕДНЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТОМ,
ЗАВИСЯЩИМ ОТ НОРМЫ РЕШЕНИЯ**

© Н.Р. Сиденко

Киев, Украина

РЕЗЮМЕ. С использованием результата С.И.Похожаева о разрешимости начально-краевой задачи для уравнений данного типа доказана возможность усреднения задачи Неймана в периодически перфорированной области.

В работе [1] доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач вида

$$\begin{aligned} u''(x, t) - k \left(\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \Delta u(x, t) &= f(x, t), \\ (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), & \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, u(x, 0) = \varphi(x), u'(x, 0) = \psi(x), & \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω - ограниченная область в R^n ($n \geq 2$) с гладкой границей $\partial\Omega$, $T = const > 0$ (произвольная), $u' \equiv u_t \equiv \partial u / \partial t$, $u'' \equiv u_{tt} \equiv \partial^2 u / \partial t^2$, $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$, $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$, $\partial_i^2 \equiv \partial^2 / \partial x_i^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$; функции $u(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ комплексные, $k(s)$ — вещественная положительная функция на $\overline{R^+} = \{s \in R : s \geq 0\}$. Из данного в [1] доказательства разрешимости подобного класса задач вытекает в частности такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\partial\Omega$ — многообразие размерности $n-1$ класса C^3 , $k(s) \in C^1(\overline{R^+})$, $k(s) \geq k_0 = const > 0 \forall s \geq 0$, $\varphi \in H^3(\Omega, \partial\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega))$, где $H^3(\Omega, \partial\Omega) = \{v \in H^3(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = A^{\frac{1}{2}}v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $H^k(\Omega)$ — комплексные гильбертовы пространства Соболева, $Av = -\Delta v$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$. Тогда задача (1) имеет единственное решение $u(x, t)$ со свойствами (см.[2], гл.3, лемма 8.1)

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H^3(\Omega, \partial\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \subset C_s^0(0, T; H^3(\Omega, \partial\Omega)), \\ u' &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \\ &\subset C_s^0(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)), \quad u'' \in L^1(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (2)$$

причем справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}^2 &\leq k_0^{-1} K_0, \quad \|u'\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \leq K_0, \\ K_0 &= 2 \left[\|\psi\|^2 + I(\|\nabla \varphi\|^2) + 2\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right], \\ I(\alpha) &= \int_0^\alpha k(s) ds, \quad \alpha \in \overline{R^+}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\|\nabla \Delta u(\cdot, t)\|^2 + \|\Delta u'(\cdot, t)\|^2 \leq K_1 \left(\|\nabla \Delta \varphi\|, \right.$$

$$\left. \|\Delta \psi\|, \|\Delta f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}, k_0^{-1}, K_0, \|k(s)\|_{C^0([0, k_0^{-1} K_0])}, T \right) \quad \forall t \in [0, T], \quad (4)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\Omega)$, $K_1(\dots)$ является непрерывной возрастающей функцией своих положительных аргументов.

В настоящей работе рассматривается периодически перфорированная область $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ типа II, определение которой следующее [3]: $\Omega^\varepsilon = (\Omega \setminus \Omega_1) \cup \Omega_1^\varepsilon$, где $\Omega_1 \equiv \Omega_1(\varepsilon) = \bigcup \{\varepsilon z + \varepsilon \bar{Y} : z \in Z^n, \text{dist}(\varepsilon z + \varepsilon \bar{Y}, \partial\Omega) \geq \varepsilon\}$, $Y = (0, 1)^n$, $\varepsilon \bar{Y} = [0, \varepsilon]^n$, $\varepsilon > 0$, $\overset{\circ}{\Omega}_1 \equiv \overset{\circ}{\Omega}_1(\varepsilon)$ — множество внутренних точек Ω_1 , $\Omega_1^\varepsilon = \Omega_1 \setminus \Theta^\varepsilon$, $\Theta^\varepsilon = \{\varepsilon z + \varepsilon \Theta : z \in Z^n\}$, Θ — замкнутая область в Y с границей $\partial\Theta$. В такой области рассматривается начально-краевая задача

$$u_{tt}^\varepsilon(x, t) - k(N_\varepsilon^2(t)) \Delta u^\varepsilon(x, t) = f^\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in Q^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \times (0, T),$$

$$u^\varepsilon(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u^\varepsilon(\cdot, t)}{\partial n} \right|_{\partial\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1} = 0, \quad (5)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x), \quad u_t^\varepsilon(x, 0) = u_1^\varepsilon(x),$$

где $N_\varepsilon(t) = \|\Delta u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали. и изучается возможность ее усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В предположении, что $\partial\Omega$, $\partial\Theta \in C^3$, введем определения и обозначения гильбертовых комплексных пространств:

$$H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon) : v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H^2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon) = \left\{ v \in H^2(\Omega^\varepsilon) : v|_{\partial\Omega} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1} = 0 \right\},$$

$$H^3(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon) = \left\{ v \in H^3(\Omega^\varepsilon) : v|_{\partial\Omega} = A_1^{\frac{1}{2}} v|_{\partial\Omega} = \right.$$

$$\left. \Delta v|_{\partial\Omega} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1} = \frac{\partial}{\partial n} A_1^{\frac{1}{2}} v|_{\partial\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1} = 0 \right\},$$

$$A_1 v = -\Delta v, D(A_1) = \left\{ v \in H^2(\Omega^\varepsilon) : v|_{\partial\Omega} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1} = 0 \right\}.$$

Справедливо такое предложение.

ТЕОРЕМА 2. Если $\partial\Omega$ и $k(s)$ такие же, как в теореме 1, $\partial\Theta \in C^3$, $u_0^\varepsilon \in H^3(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon)$, $u_1^\varepsilon \in H^2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon)$, $f^\varepsilon \in L^1(0, T; H^2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon))$, то задача (5) имеет единственное решение со свойствами

$$u^\varepsilon \in C_s^0(0, T; H^3(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon)) \cap C^0([0, T]; H^2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon)),$$

$$u_t^\varepsilon \in C_s^0(0, T; H^2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega^\varepsilon)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon)), \quad (6)$$

$$u_{tt}^\varepsilon \in L^1(0, T; H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)),$$

причем справедливы оценки, аналогичные (3), (4), с очевидной заменой u на u^ε , φ на u_0^ε , ψ на u_1^ε , f на f^ε , Ω на Ω^ε .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 методом работы [1].

СЛЕДСТВИЕ. Если предположить, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla u_0^\varepsilon\| + \|\nabla \Delta u_0^\varepsilon\| + \|u_1^\varepsilon\| + \|\Delta u_1^\varepsilon\| + \|f^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + \\ & \|\Delta f^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} \leq M = \text{const} \quad \forall \varepsilon, \quad \|v^\varepsilon\| \equiv \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (7)$$

то имеют место равномерные оценки вида (3), (4):

$$\begin{aligned} & \|\nabla u^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \|u_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 \leq K_2, \\ & \|\nabla \Delta u^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \|\Delta u_t^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 \leq K_3 \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (8)$$

где K_2, K_3 — числа, не зависящие от ε , а значит — на основании интерполяции — верны равномерные оценки

$$\begin{aligned} & 0 < k_0 \leq k(N_\varepsilon^2(t)) \leq k_1 = \max_{0 \leq s \leq K_2} k(s), \\ & \|\Delta u^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \|\nabla u_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 \leq K_4 \quad \forall \varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Тот факт, что функция $f(y)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, определена и интегрируема в $Y \setminus \Theta$ (или Y) и периодична по каждой переменной y_i с единичным периодом, обозначаем включением $f \in \Gamma(Y \setminus \Theta)$ (соответственно $f \in \Gamma(\dot{Y})$). Для такой функции обозначаем

$$\langle f \rangle_{Y \setminus \Theta} = (1 - |\Theta|)^{-1} \int_{Y \setminus \Theta} f(y) dy, \quad |\Theta| = \text{meas}_n \Theta = \int_{\Theta} dy.$$

Представим временно, что

$$f^\varepsilon(x, t) = f(x, t, x/\varepsilon), \quad f(x, t, \cdot) \in \Gamma(Y \setminus \Theta)$$

и что решение задачи (5) представляется асимптотической формулой

$$\begin{aligned} & u^\varepsilon(x, t) \cong u_0(x, t, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, t, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, t, x/\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \\ & (x, t) \in \Omega_1^\varepsilon \times (0, T), \quad u_k(x, t, \cdot) \in \Gamma(Y \setminus \Theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив разложение (10) (формально) в уравнение и граничное условие на $\partial\Omega^\varepsilon$ в (5) и приравняв слагаемые с одинаковыми степенями ε , считая $y = x/\varepsilon$ и x независимыми аргументами (см., например, [3, 4]), найдем

$$u_0 \equiv u_0(x, t), \quad u_1(x, t, y) = N_k(y) \partial_k u_0(x, t), \quad (11)$$

где $N_k, k = \overline{1, n}$, является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} & \Delta N_k(y) = 0, \quad y \in Y \setminus \Theta, \quad N_k \in \Gamma(Y \setminus \Theta), \\ & \left[\frac{\partial N_k(y)}{\partial n} + \cos(n_y, y_k) \right]_{\partial\Theta} = 0, \quad \langle N_k \rangle_{Y \setminus \Theta} = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

далее формально устанавливаем, что

$$\begin{aligned} & N_\varepsilon^2(t) = N^2(t) + q(\varepsilon), \quad k(N_\varepsilon^2(t)) = k(N^2(t)) + q_1(\varepsilon), \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_1(\varepsilon) = 0, \\ & N^2(t) = \int_{\Omega} \int_{Y \setminus \Theta} \left| \nabla u_0(x, t) + \nabla_y u_1(x, t, y) \right|^2 dy dx = \\ & (1 - |\Theta|) \left(\|\nabla u_0(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_{ij} \int_{\Omega} \partial_i u_0(x, t) \partial_j \bar{u}_0(x, t) dx \right) \leq \\ & (1 - |\Theta|)(1 - \alpha) \|\nabla u_0(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n . \bar{u}_0 — комплексно сопряженная функция для u_0 ,

$$\alpha = \min_{\xi:|\xi|=1} \left\langle \left| \nabla \left(\xi_i N_i(\cdot) \right) \right|^2 \right\rangle_{Y \setminus \Theta} \in (0, 1),$$

$$\alpha_{ij} = \langle \nabla N_i \cdot \nabla N_j \rangle_{Y \setminus \Theta} = (1 - |\Theta|)^{-1} \int_{\partial\Theta} N_j(y) \cos(n_y, y_i) d\sigma_y =$$

$$-\left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y_i} \right\rangle_{Y \setminus \Theta}; \quad (14)$$

необходимое условие для определения $u_2(x, t, y)$ — уравнение относительно $u_0(x, t)$ следующее:

$$u_0''(x, y) - k(N^2(t)) (\Delta u_0(x, t) - \alpha_{ij} \partial_i \partial_j u_0(x, t)) =$$

$$\langle f(x, t, \cdot) \rangle_{Y \setminus \Theta}, \quad (x, t) \in Q, \quad (15)$$

в котором $\delta_i^j - \alpha_{ij} = \left\langle \nabla (y_i + N_i(y)) \cdot \nabla (y_j + N_j(y)) \right\rangle_{Y \setminus \Theta}$, так что матрица $\{\delta_i^j - \alpha_{ij}, i, j = \overline{1, n}\}$ вещественная, эллиптическая, симметрическая; с учетом (15) находим

$$u_2(x, t, y) = N_{ij}(y) \partial_i \partial_j u_0(x, t) + \tilde{u}_2(x, t, y),$$

где $N_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, — единственное решение задачи

$$-\Delta N_{ij}(y) = 2 \frac{\partial N_j(y)}{\partial y_i} + \alpha_{ij}, \quad y \in Y \setminus \Theta, \quad N_{ij} \in \Gamma(Y \setminus \Theta),$$

$$\left[\frac{\partial N_{ij}(y)}{\partial n} + N_j(y) \cos(n_y, y_i) \right]_{\partial\Theta} = 0, \quad \langle N_{ij} \rangle_{Y \setminus \Theta} = 0, \quad (16)$$

а $y \rightarrow \tilde{u}_2(x, t, y)$ — единственное решение следующей задачи:

$$-\Delta_y \tilde{u}_2(x, t, y) = \frac{1}{k(N^2(t))} \left[f(x, t, y) - \langle f(x, t, \cdot) \rangle_{Y \setminus \Theta} \right], \quad y \in Y \setminus \Theta,$$

$$\tilde{u}_2(x, t, \cdot) \in \Gamma(Y \setminus \Theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n_y} \Big|_{\partial\Theta} = 0, \quad \langle \tilde{u}_2(x, t, \cdot) \rangle_{Y \setminus \Theta} = 0.$$

Имея в виду (10)–(16) и обозначая $\widehat{\nabla N_k}(y)$ доопределенную нулем на Θ вектор-функцию $\nabla N_k(y) \in \Gamma(Y \setminus \Theta)$, $(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon(x) = \widehat{\nabla N_k}(\frac{x}{\varepsilon})$, а $\widehat{v}^\varepsilon(x)$ — доопределенную нулем на $\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1(\varepsilon)$ функцию $v^\varepsilon(x)$, заданную в Ω^ε , докажем следующее основное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, условия (7) и следующие:

$$f(x, t) \in L^1(0, T; H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}^1(\Omega)), \quad u_1(x) \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}^1(\Omega),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|f^\varepsilon - f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|u_1^\varepsilon - u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right) = 0. \quad (17)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|N_\varepsilon^2 - N^2\|_{C^0([0, T])} \rightarrow 0,$$

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|u_t^\varepsilon - u_0'\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon))} \rightarrow 0,$$

$$\|\nabla u^\varepsilon - \nabla u_0 - (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon))} \rightarrow 0, \quad (18)$$

$$\widehat{u}^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow (1 - |\Theta|) (\partial_i - \alpha_{ij} \partial_j) u_0(\cdot, t), \quad i = \overline{1, n},$$

слабо в $L^2(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$, т.е. сильно в $C_s^0(0, T; L^2(\Omega))$. где функция $u_0(x, t)$, для которой справедливы включения (2), является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} u_0''(x, t) - k(N^2(t))(\Delta - \alpha_{ij}\partial_i\partial_j)u_0(x, t) &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \\ u_0(\cdot, t)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u_0(x, 0) = 0, \quad u_0'(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что задача (19) совершенно аналогична задаче (1) и приводится к последней линейным ортогональным преобразованием с постоянными коэффициентами переменных x . Поэтому для (19) справедлива теорема 1 с очевидной заменой u на u_0 , $k(s)$ на $k((1 - |\Theta|)s)$, φ на 0, ψ на u_1 .

Определим для $\Omega_1(\varepsilon)$, как в [3], срезающую функцию

$$\varphi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_1(\varepsilon), \\ 1, & x \in \Omega_1(\varepsilon) : \text{dist}(x, \partial\Omega_1(\varepsilon)) \geq c\varepsilon, \end{cases}$$

где $c > 0$ не зависит от ε , причем $0 \leq \varphi^\varepsilon(x) \leq 1$, $\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon(x)| \leq c_1\forall\varepsilon$, $c_1 = \text{const}$. Рассмотрим, как в [3] (гл. II, § 2.2.2-2.4). усредненное решение с поправкой первого порядка

$$\tilde{u}^\varepsilon(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon\varphi^\varepsilon(x)N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_k u_0(x, t). \quad (20)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} Au_0 &= (\Delta - \alpha_{ij}\partial_i\partial_j)u_0, \quad V^\varepsilon(x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \\ (\nabla V)^\varepsilon(x) &= (\nabla_y V)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall V(y) \in \Gamma(Y \setminus \Theta), \end{aligned}$$

для разности $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ с использованием уравнений (12), (16), (19) запишем равенства в области Q^ε

$$\begin{aligned} (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon)'' - k(N_\varepsilon^2)\Delta(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon) &= f^\varepsilon - u_0'' - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0'' + k(N_\varepsilon^2) \left[Au_0 + \right. \\ & (1 - \varphi^\varepsilon)\alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0 + \varepsilon\Delta\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon^{-1}\varphi^\varepsilon(\Delta N_k)^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k \Delta u_0 + \\ & \left. 2\nabla\varphi^\varepsilon \cdot (\nabla N_k)^\varepsilon \partial_k u_0 + 2\varepsilon N_k^\varepsilon \nabla\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \partial_k u_0 + 2\varphi^\varepsilon(\nabla N_j)^\varepsilon \cdot \nabla \partial_j u_0 + \varphi^\varepsilon \alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0 \right] - \\ & f + u_0'' - k(N^2)Au_0 = f^\varepsilon - f - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k \left[u_0'' - k(N_\varepsilon^2)\Delta u_0 \right] + \\ & k(N_\varepsilon^2)(1 - \varphi^\varepsilon)\alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0 + \left[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2) \right] Au_0 + k(N_\varepsilon^2) \left[\varepsilon\Delta\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \right. \\ & \left. 2\nabla\varphi^\varepsilon \cdot (\nabla N_k)^\varepsilon \partial_k u_0 + 2\varepsilon N_k^\varepsilon \nabla\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \partial_k u_0 - \varphi^\varepsilon(\Delta N_{ij})^\varepsilon \partial_i\partial_j u_0 \right] = \\ & f^\varepsilon - f - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k \left[f + k(N^2)Au_0 - k(N_\varepsilon^2)\Delta u_0 \right] + \\ & k(N_\varepsilon^2) \left\{ \varepsilon\varphi^\varepsilon(\partial_{y_k} N_{ij})^\varepsilon \partial_k \partial_i \partial_j u_0 + \varepsilon \nabla\varphi^\varepsilon \cdot \left[(\nabla N_{ij})^\varepsilon \partial_i \partial_j u_0 + N_k^\varepsilon \nabla \partial_k u_0 \right] + \right. \\ & \left. (1 - \varphi^\varepsilon) \left[(\partial_{y_j} N_i)^\varepsilon + \alpha_{ij} \right] \partial_i \partial_j u_0 \right\} - k(N_\varepsilon^2) \text{div} \left[\varepsilon\varphi^\varepsilon(\nabla N_{ij})^\varepsilon \partial_i \partial_j u_0 - \right. \\ & \left. \varepsilon \nabla\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + (1 - \varphi^\varepsilon)(\nabla N_k)^\varepsilon \partial_k u_0 \right] + \left[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2) \right] Au_0 \equiv \\ & F^\varepsilon - k(N_\varepsilon^2) \text{div} \vec{F}^\varepsilon + \left[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2) \right] Au_0. \end{aligned} \quad (21)$$

При этом для (21) существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|F^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|\vec{F}^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|\vec{F}_t^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} \right) = 0 \quad (22)$$

в силу условия (17) для $f^\varepsilon - f$, включений (2) для $u_0(x, t)$, гладкости $\partial\Theta$ — так что решения задач (12) и (16) $N_k(y)$, $N_{ij}(y) \in C^{2+\alpha}(\overline{Y \setminus \Theta}) \quad \forall \alpha \in (0, 1)$ — а также свойств $\varphi^\varepsilon(x)$.

Учитывая граничные условия на $\partial\Theta$ в (12) и (16), запишем граничное условие Неймана для $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ на $\partial\Theta^\varepsilon \cap \overset{\circ}{\Omega}_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_x}(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon) &= -\partial_k u_0 \cos(n_y, y_k) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} - \varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial n_x} N_k^\varepsilon \partial_k u_0 - \\ &\varepsilon \varphi^\varepsilon N_j^\varepsilon \cos(n_y, y_j) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_i \partial_j u_0 - \varphi^\varepsilon \left(\frac{\partial N_k}{\partial n_y} \right)^\varepsilon \partial_k u_0 = \\ &-\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial n_x} N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon \varphi^\varepsilon \left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial n_y} \right)^\varepsilon \partial_i \partial_j u_0 + \\ &(1 - \varphi^\varepsilon) \left(\frac{\partial N_k}{\partial n_y} \right)^\varepsilon \partial_k u_0, \quad x \in \partial\Theta^\varepsilon \cap \overset{\circ}{\Omega}_1, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что это условие согласовано с дивергентными слагаемыми в равенстве (21). Граничное условие Дирихле на $\partial\Omega$ однородное:

$$u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (24)$$

а начальные условия имеют вид

$$(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon)_{t=0} = u_0^\varepsilon(x), \quad (25)$$

$$(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon)_{t=0} = u_1^\varepsilon(x) - u_1(x) - \varepsilon \varphi^\varepsilon(x) N_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_k u_1(x) \equiv \varphi_1^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon,$$

где ввиду (17)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = 0. \quad (26)$$

На основании (21), (23), (24), (25) заключаем, что функция $\omega^\varepsilon = u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \omega_{tt}^\varepsilon - k(N_\varepsilon^2) \Delta \omega^\varepsilon &= F^\varepsilon - k(N_\varepsilon^2) \operatorname{div} \vec{F}^\varepsilon + [k(N_\varepsilon^2) - k(N^2)] A u_0, \quad (x, t) \in Q^\varepsilon, \\ \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial n_x} &= \vec{F}^\varepsilon \cdot \vec{n}_x, \quad x \in \partial\Theta^\varepsilon \cap \overset{\circ}{\Omega}_1, \quad t \in (0, T), \quad \omega^\varepsilon \Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \\ \omega^\varepsilon \Big|_{t=0} &= u_0^\varepsilon(x), \quad \omega_t^\varepsilon \Big|_{t=0} = \varphi_1^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

при условиях (17) для u_0^ε , (22), (26).

Оценим теперь с учетом включений (2) для $u_0(x, t)$ и оценок (8) разности квадратов норм, обозначая $\|\cdot\|$ норму в $L^2(\Omega^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |N_\varepsilon^2(t) - \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|^2| &= (N_\varepsilon(t) + \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|) |N_\varepsilon(t) - \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|| \leq \\ &(K_2^{\frac{1}{2}} + c_2 \|\nabla u_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} + c_3 \|\Delta u_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}) \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\| \\ &\leq c_4 \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|, \quad c_4 = \text{const}, \\ \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\| &= \|\nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 - (1 - \varphi^\varepsilon) (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \\ &\varepsilon \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \nabla \partial_k u_0\| = \|\nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0\| + \omega_1^\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\|\omega_1^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} \leq c_5 \left[\varepsilon \|\Delta u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon| \nabla u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \left\| (1 - \varphi^\varepsilon) \nabla u_0 \right\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Следовательно, имеем

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 = \|\nabla u_0(\cdot, t) + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0(\cdot, t)\|^2 + \omega_2^\varepsilon(t) \equiv J^\varepsilon(t) + \omega_2^\varepsilon(t). \quad (29)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\omega_2^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} = 0,$$

$$J^\varepsilon(t) = \int_{\Omega} \left[|\nabla u_0(x, t)|^2 \chi^\varepsilon(x) + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon(x) \cdot 2 \operatorname{Re}(\partial_k u_0 \nabla \bar{u}_0) + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \cdot (\widehat{\nabla N_l})^\varepsilon \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 \right] dx,$$

здесь $\chi^\varepsilon(x)$ — характеристическая функция множества $\Omega \setminus (\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1)$. Оценка $J^\varepsilon(t)$ основана на таком утверждении.

ЛЕММА. Для функций $f(t, x) \in C^0([0, T]; L^1(\Omega))$ и $g(y) \in \Gamma(\bar{Y}) \cap L^\infty(Y)$, у которой $g|_{\Theta} = 0$, имеют место сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(t, x) dx \rightarrow \int_{Y \setminus \Theta} g(y) dy \int_{\Omega} f(t, x) dx,$$

$$\int_{\Omega} \chi^\varepsilon(x) f(t, x) dx \rightarrow (1 - |\Theta|) \int_{\Omega} f(t, x) dx,$$

равномерные относительно $t \in [0, T]$.

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ приблизим $f(t, x)$ функцией $\tilde{f}(t, x) \in C^0(\bar{Q})$ так, чтобы $\|\tilde{f} - f\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega))} \leq \delta M_1$, $M_1 = 6\|g\|_{L^\infty(Y)} > 0$. Для такой \tilde{f} , обозначая $\Omega_1(Z^n) = \{z \in Z^n : \varepsilon(z + \bar{Y}) \subset \Omega_1\}$, $\omega(\tilde{f}, h)$ — модуль непрерывности \tilde{f} на \bar{Q} , имеем

$$\int_{\Omega_1} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{f}(t, x) dx = \sum_{z \in \Omega_1(Z^n)} \varepsilon^n \int_{Y \setminus \Theta} g(y) \tilde{f}(t, \varepsilon z + \varepsilon y) dy =$$

$$\sum_{z \in \Omega_1(Z^n)} \varepsilon^n \int_{Y \setminus \Theta} g(y) [\tilde{f}(t, \varepsilon z + \varepsilon y) - \tilde{f}(t, \varepsilon z)] dy +$$

$$\int_{Y \setminus \Theta} g(y) dy \sum_{z \in \Omega_1(Z^n)} \int_{\varepsilon(z+Y)} [\tilde{f}(t, \varepsilon z) - \tilde{f}(t, x)] dx + \int_{Y \setminus \Theta} g(y) dy \int_{\Omega_1} \tilde{f}(t, x) dx,$$

$$J_1^\varepsilon(t) = \left| \int_{\Omega} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(t, x) dx - \int_{Y \setminus \Theta} g(y) dy \int_{\Omega} f(t, x) dx \right| \leq$$

$$\int_{\Omega} \left| g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| |f - \tilde{f}| dx + \int_{Y \setminus \Theta} |g(y)| dy \int_{\Omega} |\tilde{f} - f| dx +$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_1} \left| g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{f} \right| dx + \int_{Y \setminus \Theta} |g(y)| dy \int_{\Omega \setminus \Omega_1} |\tilde{f}| dx +$$

$$\left| \int_{\Omega_1} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{f}(t, x) dx - \int_{Y \setminus \Theta} g(y) dy \int_{\Omega_1} \tilde{f}(t, x) dx \right| \leq$$

$$\|g\|_{L^\infty(Y)} \left\{ (2 - |\Theta|) \|\tilde{f} - f\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega))} + (2 - |\Theta|) \|\tilde{f}\|_{C^0(\bar{Q})} |\Omega \setminus \Omega_1(\varepsilon)| + 2(1 - |\Theta|) |\Omega| \omega(\tilde{f}, \varepsilon\sqrt{n}) \right\}.$$

Существует $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что $\|\tilde{f}\|_{C^0(\bar{Q})} |\Omega \setminus \Omega_1(\varepsilon)| \leq \delta/M_1$, $|\Omega| \omega(\tilde{f}, \varepsilon\sqrt{n}) \leq \delta/M_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta))$. Для таких ε получаем $J_1^\varepsilon(t) < \delta \quad \forall t \in [0, T]$. Учитывая, что $\chi^\varepsilon(x) = \chi_{Y \setminus \Theta}(x/\varepsilon)$ для $x \in \Omega_1$, где $\chi_{Y \setminus \Theta}(y) \in \Gamma(\bar{Y})$ — характеристическая функция множества $Y \setminus \Theta$, аналогично убеждаемся во второй равномерной сходимости. Лемма доказана.

С учетом леммы запишем

$$J^\varepsilon(t) = (1 - |\Theta|) \int_{\Omega} |\nabla u_0(x, t)|^2 dx + \int_{Y \setminus \Theta} \nabla N_k(y) dy \cdot \int_{\Omega} 2Re(\partial_k u_0 \nabla \bar{u}_0) dx + \int_{Y \setminus \Theta} \nabla N_k \cdot \nabla N_l dy \int_{\Omega} \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 dx + \omega_3^\varepsilon(t) \equiv J(t) + \omega_3^\varepsilon(t). \quad (30)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} = 0.$$

С учетом (14) третье слагаемое в $J(t)$ имеет вид

$$(1 - |\Theta|) \int_{\Omega} \alpha_{kl} \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 dx,$$

а второе перепишем так

$$(1 - |\Theta|) 2Re \{ \langle \partial_{y_l} N_k \rangle_{Y \setminus \Theta} \int_{\Omega} \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 dx \} =$$

$$-(1 - |\Theta|) 2Re \int_{\Omega} \alpha_{xl} \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 dx = -2(1 - |\Theta|) \int_{\Omega} \alpha_{kl} \partial_k u_0 \partial_l \bar{u}_0 dx.$$

Так что, ввиду (13) имеем $J(t) = N^2(t)$ и, следовательно,

$$\left| \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 - N^2(t) \right| \leq |\omega_2^\varepsilon(t) + \omega_3^\varepsilon(t)| \quad \forall t \in [0, T], \quad (31)$$

причем справедливы сходимости (29), (30).

Учитывая, что $\omega_t^\varepsilon(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0$, а также граничное условие на $\partial\Theta^\varepsilon$ в (27), после умножения уравнения (27) на $\bar{\omega}_t^\varepsilon$ и интегрирования равенства по Ω^ε имеем

$$\frac{d}{dt} \|\omega_t^\varepsilon\|^2 + k(N_\varepsilon^2(t)) \frac{d}{dt} \|\nabla \omega^\varepsilon\|^2 = 2Re(F^\varepsilon, \omega_t^\varepsilon) + 2k(N_\varepsilon^2) Re(\bar{F}^\varepsilon, \nabla \omega_t^\varepsilon) + 2 \left\{ \left[k(N_\varepsilon^2) - k(\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|^2) \right] + \left[k(\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|^2) - k(N^2) \right] \right\} Re(Au_0, \omega_t^\varepsilon). \quad (32)$$

Здесь обозначено

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \quad (u, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} u(x) \bar{v}(x) dx, \quad (\vec{u}, \vec{v}) = (u_i, v_i),$$

$$\vec{u} = (u_i), \quad \vec{v} = (v_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

На основании (8), (9) имеем также оценку

$$\left| \frac{d}{dt} k(N_\varepsilon^2) \right| = \left| k'(N_\varepsilon^2) 2Re(\nabla u^\varepsilon, \nabla u_t^\varepsilon) \right| \leq c_6 =$$

$$2 \max_{0 \leq s \leq K_2} |k'(s)| (K_2 K_4)^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \varepsilon. \quad (33)$$

Проинтегрировав равенство (32) по t с учетом начальных условий (27) и оценок (9), (28), (31), (33), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& \|\omega_t^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + k(N_\varepsilon^2(t)) \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 = \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k(\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2) \|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + \\
& \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 \frac{d}{d\tau} k(N_\varepsilon^2(\tau)) d\tau + 2Re \left\{ \int_0^t (F^\varepsilon, \omega_\tau^\varepsilon) d\tau + \right. \\
& k(N_\varepsilon^2(t)) (\bar{F}^\varepsilon(\cdot, t), \nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)) - k(\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2) (\bar{F}^\varepsilon(\cdot, 0), \nabla u_0^\varepsilon) - \\
& \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} [k(N_\varepsilon^2(\tau)) \bar{F}^\varepsilon(\cdot, \tau)], \nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau) \right) d\tau + \int_0^t \left[(k(N_\varepsilon^2(\tau)) - \right. \\
& k(\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2)) + (k(\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2) - k(N^2(\tau))) \left. \right] (Au_0, \omega_\tau^\varepsilon) d\tau \left. \right\} \leq \\
& \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k_1 \|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + c_6 \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \nu_1 \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 + \\
& \nu_1^{-1} \|F^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \nu_2 \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \nu_2^{-1} k_1^2 \|\bar{F}^\varepsilon\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \\
& 2k_1 \|\bar{F}^\varepsilon(\cdot, 0)\| \|\nabla u_0^\varepsilon\| + \nu_3 \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 + \\
& \nu_3^{-1} \left[c_6 \|\bar{F}^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1 \|\bar{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))} \right]^2 + c_4 \max_{0 \leq s \leq N_2} |k'(s)| \times \\
& \|Au_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} \left[\nu_1 T \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1} \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \right] + \quad (34) \\
& \max_{0 \leq s \leq N_1} |k'(s)| \|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0, T])} \left[T^2 \|Au_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \right. \\
& \left. \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 \right], \quad t \in [0, T]
\end{aligned}$$

с любыми постоянными $\nu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, где использованы обозначения: $N_1 = \max_{0 \leq t \leq T} N^2(t) + 1$, $N_2 = \max(N_1, K_2)$. Ввиду (29), (30), при некотором фиксированном ν_1 и $\forall \varepsilon$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& 1 - \nu_1 \left(1 + T c_4 \max_{0 \leq s \leq N_2} |k'(s)| \|Au_0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} \right) - \\
& \|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0, T])} \max_{0 \leq s \leq N_1} |k'(s)| \geq \frac{1}{2}. \quad (35)
\end{aligned}$$

При справедливости (35) из (34) вытекает

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 \leq \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k_1 \|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1} \|F^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \\
& \nu_2 \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \nu_2^{-1} k_1^2 \|\bar{F}^\varepsilon\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + 2k_1 \|\bar{F}^\varepsilon(\cdot, 0)\| \|\nabla u_0^\varepsilon\| + \\
& \nu_3 \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 + \nu_3^{-1} \left[c_6 \|\bar{F}^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1 \|\bar{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))} \right]^2 + \\
& c_7 \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \omega(\varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad (36)
\end{aligned}$$

где обозначено

$$c_7 = c_6 + \nu_1^{-1} c_4 \max_{0 \leq s \leq N_2} |k'(s)| \|Au_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))},$$

$$\omega(\varepsilon) = \|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} T^2 \max_{0 \leq s \leq N_1} |k'(s)| \|Au_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}^2.$$

Теперь из (9), (34) и (36), положив сперва $\nu_2 = k_0/4$, затем $\nu_3 = k_0/8$, выводим

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{4} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 &\leq 2 \left\{ \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k_1 \|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1} \|F^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + \right. \\ &\quad \frac{4k_1^2}{k_0} \|\bar{F}^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 + 2k_1 \|\bar{F}^\varepsilon(\cdot, 0)\| \|\nabla u_0^\varepsilon\| + \\ &\quad \left. \frac{8}{k_0} [c_6 \|\bar{F}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1 \|\bar{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}]^2 + \right. \\ &\quad \left. c_7 \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \omega(\varepsilon) \right\} \equiv 2\{\dots\}, \\ \frac{k_0}{2} \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 &\leq 2\{\dots\} + \frac{k_0}{4} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 \leq 4\{\dots\} = \\ &4S^\varepsilon + 4c_7 \int_0^t \|\nabla \omega^\varepsilon(\cdot, \tau)\|^2 d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla \omega^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 &\leq e^{8Tk_0^{-1}c_7} \frac{8}{k_0} S^\varepsilon, \\ \|\omega_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 &\leq 2S^\varepsilon + 2\left(\frac{3}{8}k_0 + c_7T\right) \|\nabla \omega^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}^2 \leq \\ &2\left[1 + (3 + 8Tk_0^{-1}c_7)e^{8Tk_0^{-1}c_7}\right] S^\varepsilon \quad \forall \varepsilon. \end{aligned} \quad (37)$$

Из сходимостей (17), (22), (26), (29), (30) следует существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S^\varepsilon = 0. \quad (38)$$

Таким образом, ввиду (28)–(31) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|N_\varepsilon^2 - N^2\|_{C^0([0,T])} = 0.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= u_0 + \varepsilon \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \omega^\varepsilon, \quad (x, t) \in Q^\varepsilon, \\ \|\omega^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} &\leq T \|\omega_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}; \\ \nabla u^\varepsilon &= \nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \nabla \partial_k u_0 - \\ (1 - \varphi^\varepsilon) (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \nabla \omega^\varepsilon &= \nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \bar{r}^\varepsilon, \quad (x, t) \in Q^\varepsilon, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{r}^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (37)–(39) вытекает существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} = 0.$$

Кроме того, на основании (2), (37), (38) заключаем, что

$$\|u_t^\varepsilon - u_0'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} = \|\varepsilon \varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0' + \omega_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Из (40) следует равенство

$$\begin{aligned} (\widehat{\partial_i u^\varepsilon}(\cdot, t), \varphi)_\Omega &= (\chi^\varepsilon \partial_i u_0(\cdot, t), \varphi)_\Omega + ((\widehat{\partial_{y_i} N_k})^\varepsilon, \varphi \partial_k \bar{u}_0(\cdot, t))_\Omega + \\ (\widehat{r_i^\varepsilon}(\cdot, t), \varphi)_\Omega, \quad t \in [0, T], \quad \forall \varphi(x) \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, n}, \quad (u, v)_\Omega &= \int_\Omega u \bar{v} dx. \end{aligned}$$

В нем правая часть — ввиду сходимости (40), леммы и равенств (14) — при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к выражению

$$\begin{aligned} (1 - |\Theta|) (\partial_i u_0(\cdot, t), \varphi)_\Omega + \int_{Y \setminus \Theta} \frac{\partial N_k}{\partial y_i} dy (\partial_k u_0(\cdot, t), \varphi)_\Omega = \\ (1 - |\Theta|) (\partial_i u_0(\cdot, t) - \alpha_{ik} \partial_k u_0(\cdot, t), \varphi)_\Omega \end{aligned}$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$.

Таким образом, обоснованы все сходимости (18). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Похожаев С.И. *Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений* // Матем. сб. — 1975, т. 96 (138), N1, 152–166.
- [2] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
- [3] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 311 с.
- [4] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. — М.: Наука, 1984. — 352 с.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАИНЫ
01601, КИЕВ 4, УЛ. ТЕРЕЩЕНКІВСКА, 3.
E-mail address: sidenko@imath.kiev.ua