Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.133-140.

НЕКЛАССИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА СИНГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

© С.Е. Пастухова

Москва, Россия

Резюме. Получено неклассическое усреднение для нелинейного функционала теории упругости, рассмотренного на периодических структурах, имеющих вырождение по размерности.

1. Типичными примерами периодических структур, которые будут нас интересовать, являются такие объекты, как периодическая прямоугольная сетка на плоскости, или периодическая решетка в пространстве со взаимно перпендикулярными образующими, или периодическая ящичная структура в пространстве. При этом предполагается, что у всех этих объектов структурный период имеет линейный размер порядка ε, ε — малая величина, а другой их геометрический параметр h (это ширина полос, слагающих сетку на плоскости, или диаметр поперечных сечений у стержней, образующих пространственную решетку, или толщина стенок ящичной структуры) является бесконечно малой, существенно меньшей, чем ε, при $\varepsilon \to 0$. Поэтому можно считать, что величина h в этих примерах нулевая. Получается вырождение физического объекта в некоторую сингулярную структуру, на которой мы будем моделировать задачу о малых нелинейных деформациях упругой среды с периодической структурой указанного выше типа. Подобные сингулярные структуры периодического или общего характера приходится рассматривать при изучении различных физических процессов: электропроводимости, теплопроводимости, перколяции и т.д. В теории упругости сингулярный характер вырождения рассмотренных структур, проявляющийся в потере размерности, приводит к неклассическому принципу их усреднения. Для линейной задачи теории упругости на сингулярных периодических структурах неклассическое усреднение получено В.В. Жиковым (см., например, [1]). Далее будет показано, что подобное же неклассическое усреднение имеет место и для нелинейных задач теории упругости на периодических сингулярностях.

Для дальнейшего изучения введем на сингулярных объектах с 1-периодической структурой меру μ, пропорциональную линейной мере Лебега в случае плоской сетки или пространственной решетки, или пропорциональую плоской мере Лебега в случае ящичной структуры, при этом мера имеет единичную нормировку по периоду.

2. Введем обший сингулярный периодический объект как носитель некоторой периодической борелевской меры μ с ячейкой периодичности $Y = [0,1)^d$, $\int_Y d\mu = 1$. Носитель меры может быть объединением некоторых многообразий разной размерности, и на каждом из этих многообразий мера μ пропорциональна соответствующей мере Лебега. Далее определим меру μ_ε равенством

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелевского множества} \quad B \in \mathbf{R}^d.$$

Мера μ_ε имеет период ε и

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon Y) = \varepsilon^d \int_Y d\mu = \varepsilon^d,$$

поэтому при $\varepsilon \to 0$ она слабо сходится к мере Лебега в том смысле, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^d}\phi d\mu_\varepsilon=\int_{\mathbf{R}^d}\phi dx \quad \text{для любой} \quad \phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d).$$

Пусть Ω ограниченная липшицева область в $\mathbf{R}^d$ с замыканием $\bar\Omega$. Пусть также имеется лагранжиан $f(x,\xi)$, 1-периодический и $\mu-$измеримый по $x\in\mathbf{R}^d$, выпуклый по $\xi\in\mathbf{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$ и удовлетворяющий степенной оценке

$$|\xi|^p\le f(x,\xi)\le c|\xi|^p+1 \quad \text{с некоторым показателем} \quad p>1.$$

К примеру, можно взять не зависящий вообще от переменной x лагранжиан $|\xi|^p$.

Далее для гладкого вектора $u=(u^1,\dots,u^d)$ определим симметрический тензор деформации $e(u)$ с координатами

$$e_{ij}(u)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}+\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\Big).$$

Ввиду симметричности рассматриваем $e(u)$ как элемент из $\mathbf{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$.

3. Рассмотрим следующую вариационную задачу на отыскание инфимума функционала энергии нелинейной теории упругости

$$m_\varepsilon=\inf_{u\in C_0^\infty(\Omega)^d} I_\varepsilon(u), \tag{1}$$

где

$$I_\varepsilon(u)=\int_\Omega\big(f(x/\varepsilon,e(u))+|u|^p-gu\big)d\mu_\varepsilon, \quad g\in C^\infty(\bar\Omega)^d.$$

После "естественного" замыкания множества, о котором речь пойдет дальше, инфимум в (1) можно заменить на минимум, и тогда будет существовать и притом единственный минимизант этой задачи u^ε. Изучим поведение m_ε и u^ε при $\varepsilon\to 0$.

Оказывается, при $\varepsilon\to 0$ энергия m_ε сходится к значению m_0, которое есть минимум некоторого предельного функционала $I_0(v)$, рассматриваемого на функциях $v(x,y)$, определенных на $\Omega\times Y$, 1-периодических по y. Если его минимизант есть функция $u(x,y)$, то имеется двухмасштабная сходимость минимизантов

$$u^\varepsilon(x)\xrightarrow{2} u(x,y) \quad \text{в} \quad L^p(\Omega,d\mu_\varepsilon)^d \tag{2}$$

и, значит,

$$u^\varepsilon(x)\rightharpoonup\int_Y u(x,y)\,d\mu \quad \text{в} \quad L^p(\Omega,d\mu_\varepsilon)^d \text{ при } \quad \varepsilon\to 0 \tag{2'}$$

(по поводу двухмасштабной сходимости и ее свойств см. [2,3] для случая, когда $p=2$; для $p\ne 2$ и притом в "переменном" L^2 с мерой μ_ε соответствующие понятия и свойства переформулируются естественным образом и доказываются аналогично). В данной ситуации у решения u^ε не будет более сильной сходимости, чем указанная слабая сходимость, к пределу, зависящему только от медленной переменной x, то есть не будет классического усреднения. Заметим, что классическое усреднение возможно в случае, когда мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. К примеру, оно имеет место для упругих сред, относящихся к типу периодически перфорированных с одним геометрическим параметром ε, которые не вырождаются по размерности при $\varepsilon\to 0$ (линейный случай см., например, в [4,5]).

4. Определим соболевское пространство X_ε как замыкание множества пар $\{(u,e(u))$, где $u\in C_0^\infty(\Omega)^d\}$ в произведении $L^p(\Omega,d\mu_\varepsilon)^d\times L^p(\Omega,d\mu_\varepsilon)^{\frac{d(d+1)}{2}}$. Элементами X_ε оказываются пары (u,z), причем z будем называть упругим градиентом функции u, обозначая его через $e(u)$. При таком определении упругий градиент $e(u)$ определен для u неоднозначно, но этот факт для дальнейшего несущественнен. Совокупность первых компонент u из пар $(u,z)\in X_\varepsilon$ по определению образует пространство $H_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)^d = \mathcal{H}_\varepsilon$.

Переформулируем удобным образом исходную задачу (1). Очевидно, что

$$m_\varepsilon = \min_{(u,z)\in X_\varepsilon} J_\varepsilon(u,z), \tag{3}$$

$$\text{где} \quad J_\varepsilon(u,z) = \int_\Omega (f(x/\varepsilon, z) + |u|^p - gu)d\mu_\varepsilon.$$

В силу свойств лагранжиана $f(y,\xi)$ (см. п. 2) (выпуклость и степенная оценка) задача (3) имеет решение. Если минимум достигается на двух парах (u_1,z_1), (u_2,z_2), то из-за выпуклости составляющей $|u|^p$ в $J_\varepsilon(u,z)$ должно быть: $u_1 = u_2$. Далее первую компоненту в таких парах обозначаем через u^ε. Совпадение вторых компонент в этих парах не важно, важно лишь то, что $J_\varepsilon(u^\varepsilon, z_1) = J_\varepsilon(u^\varepsilon, z_2) = m_\varepsilon$. Таким образом, существует и притом единственное решение $u^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ исходной задачи (1). Легко вывести равномерную по ε оценку

$$\int_\Omega (f(x/\varepsilon, e(u^\varepsilon)) + |u^\varepsilon|^p)d\mu_\varepsilon \le C \le \infty,$$

из которой вытекает, что равномерно по ε

$$\int_\Omega (|e(u^\varepsilon)|^p + |u^\varepsilon|^p)d\mu_\varepsilon \le C. \tag{4}$$

Определим для любого $\xi \in \mathbf{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$ усредненный лагранжиан $f_0(\xi)$ как

$$f_0(\xi) = \inf_{u(y)\in C^\infty_{per}(Y)^d} \int_Y f(y, \xi + e(u(y)))d\mu(y), \tag{5}$$

где $C^\infty_{per}(Y)^d$ — множество всех бесконечно дифференцируемых периодических функций на Y. Тогда лагранжиан $f_0(\xi)$ выпуклый и имеет оценку

$$0 \le f_0(\xi) \le c(1+|\xi|^p), \quad \xi \in \mathbf{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}. \tag{6}$$

Для многих простых сингулярных структур имеется положительность лагранжиана $f_0(\xi)$, но в общем случае ее нет. Для упрощения изложения будем считать, что $f_0(\xi)$ коэрцитивный, хотя это делать необязательно. В [6] указано, как надо формулировать усредненную задачу, если выполнена лишь оценка (6).

5. Рассмотрим $L^s_{per}(Y, d\mu)$, $s \ge 1$, соболевские пространства периодических функций на Y с мерой μ. Зададим их как замыкание множества $C^\infty_{per}(Y)$ по соответствующей норме. Для $b \in L^1_{per}(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ и $a \in L^1_{per}(Y, d\mu)^d$ будем говорить, что $a = div\, b$ (в смысле меры μ), если

$$\int_Y a\phi d\mu = -\int_Y be(\phi)d\mu \quad \text{для любой} \quad \phi \in C^\infty_{per}(Y)^d. \tag{7}$$

Если в этой паре a, b оказывается, что $a = 0$, то b называется соленоидальной матрицией. Далее V_{pot} — замыкание множества

$$\{e(\phi): \quad \phi \in C^\infty_{per}(Y)^d\} \quad \text{в} \quad L^p(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}.$$

Можно переформулировать определение $f_0(\xi)$, данное равенством (5). Ясно, что

$$f_0(\xi) = \min_{v\in V_{pot}} \int_Y f(y, \xi + v)d\mu.$$

Введем множество жестких периодических перемещений, связанных с задачей (1). Пусть

$$\mathcal{R} = \{u(y) \in L^p(Y, d\mu)^d : \text{ существует последовательность } \phi_n \in C^\infty_{per}(Y)^d, \text{такая, что}$$
$$\text{при } n \to \infty \quad \phi_n \to u(y) \quad \text{в} \quad L^p(Y, d\mu)^d, \quad e(\phi_n) \to 0 \quad \text{в} \quad L^p(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}\}.$$

В сопряженном пространстве $L^{p'}(Y, d\mu)^d, p' = \frac{p}{p-1}$, определим

$$\mathcal{R}^\perp = \{v \in L^{p'}(Y, d\mu)^d : \int_Y uv \, d\mu = 0 \quad \text{для любой} \quad u \in \mathcal{R}\}.$$

Структуру $\mathcal{R}^\perp$ проясняет следующее утверждение, которое является ключевым для последующего усреднения.

Лемма 1.*(Об аппроксимации). В пространстве $\mathcal{R}^\perp$ всюду плотно множество S, состоящее из векторов $a(y)$, допускающих представление: $a = div\, b$ (в смысле меры μ) для некоторой симметрической матрицы $b(y) \in L^{p'}(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$.*

6. В этом пункте приводятся свойства последовательности функций $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})^d$, удовлетворяющих равномерной оценке (4).

Лемма 2. *Пусть последовательность функций $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})^d$ имеет при $\varepsilon \to 0$ сходимости:*

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y) \quad в \quad L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^d, \qquad \varepsilon e(u^\varepsilon) \to 0 \quad в \quad L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^{\frac{d(d+1)}{2}}.$$

Тогда $u(x, y) \in L^p(\Omega, \mathcal{R})$.

Лемма 2 есть следствие леммы 1.

Дальнейшие утверждения справедливы при некотором предположении на множество жестких перемещений $\mathcal{R}$ (оно накладывает ограничения на меру μ, в частности на геометрию ее носителя).

Пусть далее любой вектор $u \in \mathcal{R}$ допускает единственное представление

$$u(y) = c + j(y), \qquad \text{где} \quad c - \text{постоянный вектор, а } j(y) \in \Gamma(0). \tag{9}$$

Здесь $\Gamma(0)$ — градиент нуля (см. о нем подробно в [2]). $\Gamma(0)$ — подпространство в $L^p(Y, d\mu)^d$, и по определению $j(y) \in \Gamma(0)$, если существует $\phi_n \in C^\infty_{per}(Y)$: при $n \to \infty$

$$\phi_n \to 0 \quad \text{в} \quad L^p(Y, d\mu), \quad \nabla\phi_n \to j(y) \quad \text{в} \quad L^p(Y, d\mu)^d.$$

Можно показать для примеров, разобранных в пункте 1, во-первых, что $\Gamma(0)$ состоит из "нормальных" перемещений, то есть из векторов ортогональных носителю меры μ, а, во-вторых, что разложение (9), действительно, имеет место.

Множество вторых компонент из разложения (9) будем обозначать через $\mathcal{R}_1$.

Лемма 3. *Пусть $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})^d$ удовлетворяет равномерной оценке (4). Тогда по некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon'\}$ (обозначаемой далее тем же символом $\{\varepsilon\}$) имеются сходимости: при $\varepsilon \to 0$*

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y) = u_0(x) + \chi(x, y) \quad в \quad L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^d,$$
$$u_0 \in H^{1,p}(\Omega)^d, \quad \chi \in L^p(\Omega, \mathcal{R}_1),$$

$$e(u^\varepsilon(x)) \xrightarrow{2} e(u_0(x)) + v(x, y) \quad где \quad v(x, y) \in L^p(\Omega, V_{pot});$$

если же $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^d$, то $u_0 \in H_0^{1,p}(\Omega)^d$.

Для доказательства леммы 3 используется техника усреднения из [6], а также общие свойства двухмасштабной сходимости.

7. После лемм 2 и 3 естественно ввести в качестве усредненной задачи следующую вариационную задачу на отыскание минимума

$$m_0 = \min_{v \in \mathcal{V}} I(v), \quad \text{где} \tag{10}$$

$$I(v) = \int_\Omega \int_Y (f_0(e(v_0)) + |v|^p - gv) dx d\mu.$$

Здесь $\mathcal{V} = \{v \in L^p(\Omega, \mathcal{R}) : \quad v(x,y) = v_0(x) + v_1(x,y)$, где $v_0(x) \in H_0^{1,p}(\Omega), v_1(x,y) \in L^p(\Omega, \mathcal{R}_1)\}$ — пространство функций, полное относительно нормы $|\,|_\mathcal{V}$, определенной равенством

$$|v|_\mathcal{V}^2 = \int_\Omega |e(v_0)|^p dx + \int_\Omega \int_Y |v|^p dx d\mu.$$

Задача (10) имеет и при том единственное решение $u(x,y) = u_0(x) + \chi(x,y)$ в силу свойств усредненного лагранжиана $f_0(\xi)$.

Из леммы 3 можно вывести оценку $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon \geq m_0$. Конструкция приближенного решения для задачи (1) с любой степенью точности, использующая минимизант задачи (10), позволяет доказать аналогичную оценку сверху и вслед за тем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $u^\varepsilon, u(x,y)$ — минимизанты задач (1) и (10) . Тогда имеет место сходимость (2), а также при $\varepsilon \to 0 \quad m_\varepsilon \to m_0$,*

$$\int_\Omega f(\frac{x}{\varepsilon}, e(u^\varepsilon)) d\mu_\varepsilon \to \int_\Omega f_0(e(u_0)) dx, \quad \int_\Omega |u^\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \to \int_\Omega \int_Y |u|^p dx d\mu.$$

8. Пусть $p = 2$ и лагранжиан $f(y,\xi)$ дифференцируем по ξ, при этом $\frac{\partial f}{\partial \xi}(y,\xi) = \sigma(y,\xi)$. Тогда можно сформулировать свойство неклассического усреднения изучаемой нелинейной задачи теории упругости в иной более наглядной форме, огрубив в некоторой степени результат теоремы 1, при этом можно избежать упоминания о сложном пространстве $\mathcal{V}$.

Во-первых, заметим, что исходная задача (1) эквивалентна краевой задаче:

$$-div\,(\sigma_\varepsilon(e(u^\varepsilon))) + u^\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon.$$

Здесь $\sigma_\varepsilon(\xi) = \sigma(x/\varepsilon, \xi)$, а решение u^ε по определению удовлетворяет интегральному равенству для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega (\sigma_\varepsilon(e(u^\varepsilon)) e(\psi) + u^\varepsilon \psi) d\mu_\varepsilon = \int_\Omega g\psi d\mu_\varepsilon. \tag{11}$$

Во-вторых, имеется слабая сходимость в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ решений u^ε к решению похожей задачи, но только в области Ω с заданной на ней мерой Лебега:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup Tu_0 + (I - T)f \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

Здесь I — тождественный оператор, а T есть некоторый линейный неотрицательный оператор, связанный с наличием нетривиального (т.е. не сводящегося к постоянным векторам) множества $\mathcal{R}$. Точно оператор T будет определен чуть позже. Заметим пока, что T легко найти для структур, описанных в пункте 1. Например, для квадратной сетки $T = \frac{1}{2} I$. Стоящая в правой части (12) функция u_0 — решение следующей краевой задачи (понимаемое в смысле интегрального тождества, аналогичного (11)):

$$-div\,(\sigma_0(e(u_0))) + Tu_0 = Tf \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega)^d, \tag{10'}$$

где $\sigma_0(\xi) = \frac{\partial f_0(\xi)}{\partial \xi}$. Конечно же, u_0 и вся правая часть в (12) совпадают соответственно с первой компонентой минимизанта $u(x,y)$ задачи (10) и его средним $\int_Y u(x,y)d\mu$, то есть (12) совпадает с (2').

Естественно, что для решения u_ε задачи (1) имеется слабая двухмасштабная сходимость (2) к функции $u(x,y) = u_0(x) + \chi(x,y)$, доказанная в теореме 1 (кстати, слабую двухмасштабную сходимость можно усилить до сильной двухмасштабной сходимости ввиду сходимости норм, указанной в теореме 1). Но в отличие от общего случая, в рассматриваемом случае ($p = 2$ и лагранжиан $f(y,\xi)$ дифференцируем) слагаемые $u_0(x)$, $\chi(x,y)$ у предельной функции $u(x,y)$, завязанные между собой в усредненной вариационной задаче, могут быть найдены последовательно одно за другим: сначала находится $u_0(x)$ как решение задачи (10'), затем

$$\chi(x,y) = P_1 f - P_1 u_0, \tag{10''}$$

где $P_1 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_1$ — ортогональный проектор.

Поясним, как получаются уравнения (10'), (10"). Прежде всего, рассматривая различные вариации усредненного функционала в задаче (10), можно получить следующие уравнения:

$$u_0 \in H_0^1(\Omega)^d, \quad -div\sigma_0(e(u_0)) + < u > = f, \tag{10'''}$$

$$u(x,\cdot) - f(x) \perp \mathcal{R}_1, \tag{10''''}$$

где $< u > = \int_Y u(x,y)d\mu(y) = u_0(x) + \int_Y \chi(x,y)d\mu(y)$, а ортогональность понимается в смысле L^2. Эту систему уравнений можно преобразовать, используя ортогональные проекторы

$$P_1 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_1, \quad P_2 = I - P_1.$$

Очевидно, что из (10"") следует равенство $P_1u_0 + \chi = P_1 f$ (и, значит, получено (10')). Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$u = u_0 + \chi = P_1u_0 + P_2u_0 + \chi = P_2u_0 + P_1f,$$

из которой в частности выводим:

$$< u > = < P_2u_0 > + < P_1 f > .$$

Если оператор $T : \mathbf{R^d} \to \mathbf{R^d}$ ввести формулой

$$Tc = < P_2 c >, \quad c \in \mathbf{R^d},$$

то в силу последних двух равенств выводим из (10"') уравнение (10').

9. Рассмотрим простейший лагранжиан порядка $p \neq 2$, удовлетворяющий рассмотренным выше предположениям,

$$f(y,\xi) = |\xi|^p, \quad p > 1, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2, |\xi|^2 = (\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2). \tag{13}$$

Пусть и сингулярная структура простейшего типа, а именно, $F \cap Y = I_1$ — единичный отрезок на оси Ox_1. Тогда нетрудно найти усредненный лагранжиан

$$f_0(\xi) = \min_{v \in V_{pot}} \int_Y |\xi + v(y)|^p d\mu(y),$$

если иметь в виду, что пространство V_{pot} состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad u_1 \in H^1_{per}(I_1), \beta, \alpha \in L^2(I_1).$$

Получаем в этом случае $f_0(\xi) = |\xi_1|^p$, и, значит, учитывая то, что для отрезка на плоскости $\mathcal{R}_1 = \{(0, c_2)\}$, усредненная краевая задача для предельной функции $u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y)$ получается следующей:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -D_1(|D_1|^{p-2}D_1u_1^0) + |u|^{p-2}u_1^0 & = & f_1 \\ |u|^{p-2}u_2 & = & f_2. \end{array} \right. \tag{14}$$

Для $p = 2$ (линейный случай) эта система распадается на два независимых уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -D_1^2u_1^0 + u_1^0 & = & f_1 \\ u_2 & = & f_2. \end{array} \right.$$

Отсюда видно, что в этой простейшей ситуации усреднение оказывается классическим, то есть $u(x,y) = u_0(x)$.

Если $p \neq 2$, то второе уравнение в системе (14) можно представить в следующей форме: $G(u_1, u_2) = f_2$, где $G(u_1, u_2)$ — нелинейная функция, но монотонная и непрерывная по u_2, а также стремящаяся к $\mp\infty$ при $u_2 \to \mp\infty$. Поэтому можно переписать это уравнение в следующей форме: $u_2 = U_2(u_1^0, f_2)$. Подставляя это выражение для функции u_2 в первое уравнение системы (14), получаем усредненную систему в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -D_1(|D_1|^{p-2}D_1u_1^0) + U_1(u_1^0, f_2) & = & f_1 \\ |u|^{p-2}u_2 & = & f_2. \end{array} \right. \tag{14$'$}$$

Видно, что первое уравнение в системе (14') автономно относительно функции u_1^0 и оно дает решение, не зависящее от переменной y, значит, таким же будет решение второго уравнения из системы (14'). Таким образом, для лагранжиана (13) на простейшей сингулярной структуре, заданной на ячейке периодичности в виде отрезка, ожидаемое по общей теореме неклассическое усреднение оборачивается классическим. Но это единственное исключение из-за специфики отрезка.

Для квадратной сингулярной сетки, заданной на ячейке периодичности как объединение двух взаимно перпендикулярных отрезков I_1, I_2, усреднение оказывается, в самом деле, неклассическим. Нетривиальность осциллирующей компоненты $\chi(x,y)$ выводится из следующих соображений. Согласно принципу расщепления, справедливому в этом случае, можно вычислить усредненный лагранжиан, и усредненная краевая задача получается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -D_1|D_1|^{p-2}D_1u_1^0 + \int_Y |u|^{p-2}u_1 d\mu(y) & = & f_1 \\ -D_2|D_2|^{p-2}D_2u_2^0 + \int_Y |u|^{p-2}u_2 d\mu(y) & = & f_2 \\ |u|^{p-2}u - f & \perp & \zeta, \end{array} \right. \tag{14$''$}$$

где $\zeta(y)$ — любое периодическое поперечное жесткое перемещение. Так как $\zeta(y)$ непостоянно и, действительно, осциллирует на ячейке периодичности Y (очевидно изменение направления ζ на отрезках I_1, I_2), то из последнего уравнения (14") видно, что функция $u(x,y)$ не может не осциллировать. Значит, компонента $\chi(x,y)$ нетривиальна, а усреднение неклассическое.

10. В заключение заметим, что рассмотренные здесь нелинейные сингулярные структуры оказываются естественным и обоснованным приближением для очень тонких структур аналогичной геометрии. Толщина последних ненулевая, хотя очень мала: $h(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, $h(\varepsilon)$ — толщина структуры F. Точная формулировка этого результата дана в работе автора [7]. Здесь мы только скажем, что обе структуры приводят к одной и той же усредненной задаче.

Результаты по сингулярным структурам опубликованы в работе автора [8].

Список литературы

[1] Жиков В.В. *Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах.* Доклады РАН, **380**, (2001),вып.6.

[2] Жиков В.В. *Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости.* Мат.сборник, **191**, (2000), вып.7, с.31-72.

[3] Allaire G. *Homogenization and two-scale convergence* SIAM J. Math. Anal., **23**, (1992), No.6, pp.1482-1518.

[4] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* М.: Наука, 1984.

[5] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математические задачи теории сильно неоднородных сред.* М.: Изд-во МГУ, 1990.

[6] Жиков В.В. *К технике усреднения вариационных задач* Функц. анализ, **33**, (1999), вып.1, с.14-29.

[7] Пастухова С.Е. *Усреднение для нелинейных задач теории упругости на тонких периодических структурах* Доклады РАН, 2002.

[8] Пастухова С.Е. *Усреднение для нелинейных задач теории упругости на сингулярных периодических структурах* Доклады РАН, **382** 2002, вып. 1.

ул.Бутлерова 12, кв.21
117485, Москва, Россия
E-mail address: `leonowmw@cs.msu.su`