Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.105-113.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА $\mathbb{S}$

© В.А. Литовченко
Черновцы, Украина

Резюме. Установлена корректная разрешимость в пространствах типа $\mathbb{S}$ одной задачи Коши для уравнения интегрального вида с оператором Бесселя дробного интегродифференцирования с положительным параметром, а также доказано свойство стабилизации к нулю решения этой задачи.

1. Пространства типа $\mathbb{S}$. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C^\infty(\mathbb{R})$ - пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}$, а $P(x) \equiv 2\dfrac{(a+x^2)^{\frac{\gamma}{2}}}{ln(a+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\gamma > 0$.

Для произвольных $\alpha > 0$, $\beta > 0$ положим:

$$S^\beta \equiv \{\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\, B > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_q > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R} :$$
$$\mid x^q D^k \varphi(x) \mid\ \leq\ c_q B^k k^{\beta k}\};$$
$$S_\alpha \equiv \{\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\, A > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_k > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R} :$$
$$\mid x^q D^k \varphi(x) \mid\ \leq\ c_k A^q q^{\alpha q}\};$$
$$S_\alpha^\beta \equiv \{\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\, c > 0\ \exists\, A > 0\ \exists\, B > 0\ \forall\, \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R} :$$
$$\mid x^q D_x^k \varphi(x) \mid\ \leq\ cA^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}\}.$$

Отметим, что $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Эти пространства были построены И.М.Гельфандом и Г.Е.Шиловым в [1] и названы ими пространствами типа $\mathbb{S}$, где $\mathbb{S}$ - известное пространство Л.Шварца [2].

Пространства S_α^β нетривиальны при $\alpha + \beta \geq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и состоят из тех и только тех $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, которые удовлетворяют неравенству

$$\mid D_x^k \varphi(x) \mid \leq cA^k k^{\beta k} e^{-\delta |x|^{1/\alpha}},\ k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},$$

с некоторыми положительными постоянными c, A и δ, зависящими только от функции φ, а $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{S_\alpha^\beta}{\to}} \varphi$, где $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_\alpha^\beta$, тогда и только тогда, когда [1]:

1) $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+ :\ D_x^k \varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} D_x^k \varphi(x)$, где $\mathbb{K}$- произвольное компактное множество из $\mathbb{R}$ (т. е. $D_x^k \varphi_\nu(x)$ стремится к $D_x^k \varphi(x)$ равномерно по x на каждом компакте $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, при $\nu \to \infty$);

2) $|x^q D_x^k \varphi_\nu(x)| \leq cA^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}$, $\{q; k\} \subset \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, где c, A, B — положительные константы, не зависящие от q, k, ν и x.

Имеют место следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для каждого $\eta \in (0;1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $P(x) \geq \varepsilon(a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}}$.

Доказательство. Отметим, что функции $y = \ln(a+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $y = (a+x^2)^{\frac{\eta}{2}}$, $0 < \eta < 1$ — четные, монотонно возрастающие на $(0;+\infty)$, выпуклые (вогнутые) соответственно на интервалах $(\sqrt{a};+\infty)$ $((0;\sqrt{a}))$, $\left(\sqrt{\frac{a}{1-\eta}};+\infty\right)$ $\left(\left(0;\sqrt{\frac{a}{1-\eta}}\right)\right)$ и

$$\lim_{x^2\to\infty}\frac{\ln(a+x^2)^{1/2}}{(a+x^2)^{\eta/2}} = 0.$$

Поэтому

$$\forall\, \eta \in (0;1)\ \exists\,\{\varepsilon_1;\varepsilon_2\} \subset [0;+\infty),\ \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 :$$
$$\begin{cases} \ln(a+x^2)^{1/2} \leq (a+x^2)^{\eta/2}, & x^2 \in [0;+\infty)/(\varepsilon_1;\varepsilon_2), \\ \ln(a+x^2)^{1/2} \geq (a+x^2)^{\eta/2}, & x^2 \in (\varepsilon_1;\varepsilon_2). \end{cases}$$

Отсюда, если $\varepsilon_2 = 0$, то

$$P(x) \geq (a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \eta < 1.$$

Если же $\varepsilon_2 > 0$, тогда

$$\forall\, x \in (\sqrt{\varepsilon_1};\sqrt{\varepsilon_2}): \quad 1 \leq \frac{\ln(a+x^2)^{1/2}}{(a+x^2)^{\eta/2}} \leq \frac{\ln(a+\varepsilon_2)^{1/2}}{a^{\eta/2}},$$

т.е.

$$0 < \frac{a^{\eta/2}}{\ln(a+\varepsilon_2)^{1/2}} \leq 1, \quad 0 < \eta < 1.$$

Учитывая последнее неравенство, получаем, что

$$\forall\, x \in [0;+\infty) \setminus (\sqrt{\varepsilon_1};\sqrt{\varepsilon_2}):$$

$$P(x) = \tfrac{(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)^{1/2}} \geq (a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}} \geq \tfrac{a^{\eta/2}}{\ln(a+\varepsilon_2)^{1/2}}(a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}};$$

$$\forall\, x \in (\sqrt{\varepsilon_1};\sqrt{\varepsilon_2}):$$

$$P(x) = \tfrac{(a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}}(a+x^2)^{\frac{\eta}{2}}}{\ln(a+x^2)^{1/2}} \geq \tfrac{a^{\eta/2}}{\ln(a+\varepsilon_2)^{1/2}}(a+x^2)^{\frac{\gamma-\eta}{2}}.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для каждого фиксированного $\delta > 0$ функция $\Theta_\delta(\cdot) = e^{-\delta P(\cdot)}$ принадлежит пространству $S^1_{\frac{1}{\gamma-\eta}}$, где $0 < \eta < 1$ и $\eta < \gamma$.*

Доказательство. Убедимся сначала, что $\Theta_\delta(\cdot) \in S^1_{\frac{1}{\gamma-\eta}}$. Поскольку функция Θ_δ, $\delta > 0$ является бесконечно дифференцируемой, то для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\exists \delta_1 > 0\ \exists c > 0\ \exists A > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|D_x^k\Theta_\delta(x)| \leq cA^k e^{-\delta_1|x|^{\gamma-\eta}}k!, \quad 0 < \eta < 1, \quad \eta < \gamma. \tag{1}$$

Исходя из известной формулы Фаа де Бруно дифференцирования сложной функции

$$D_x^k f(\varphi(x)) = \sum_p^k \frac{k!}{i!j!..h!}\frac{d^p f(\varphi)}{d\varphi^p}\left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^i\left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^j..\left(\frac{d^L\varphi(x)}{L!dx^L}\right)^h,\ k\in\mathbb{Z}_+$$

(здесь знак суммы распространяется на все решения в целых неотрицательных числах уравнения $k = i + 2j + ... + Lh$, а число $p = i + j + ... + h$), получим, что

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}_+ :\ |D_x^k\Theta_\delta(x)| \le \sum_p^k \tfrac{k!}{i!j!...h!}\delta^p\Theta_\delta(x)\left|\tfrac{dP(x)}{1!dx}\right|^i\left|\tfrac{d^2P(x)}{2!dx^2}\right|^j\ldots\left|\tfrac{d^LP(x)}{L!dx^L}\right|^h,$$

где $\delta > 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Далее, с помощью той же формулы Фаа де Бруно, а также с тем, что

$$\frac{p!}{i!j!...h!} \le 2^k;\quad \sum_p^k 1 \le (2e)^k,$$

где $p = i + j + ... + h$, а знак суммы распространяется на все целые неотрицательные решения уравнения $k = i + 2j + ... + Lh$, убеждаемся в том, что

$$\left|D_x^l\left((ln(a+x^2))^{-1}\right)\right| \le l!(2^5e^2)^l(\ln a)^{-\nu(l)}(a+x^2)^{-\frac{l}{2}}(ln(a+x^2))^{-1},$$

$$\nu(l)\equiv\begin{cases} l,\ \ln a < 1,\\ 0,\ \ln a \ge 1\end{cases},$$

а

$$\left|D_x^l\left((a+x^2)^{\frac{\gamma}{2}}\right)\right| \le l!(4(\gamma+2)e)^l(a+x^2)^{\frac{\gamma-l}{2}}$$

(здесь $l\in\mathbb{Z}_+$).

Поэтому

$$\forall m\in\mathbb{Z}_+ :\ \left|\tfrac{d^mP(x)}{m!dx^m}\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^m (2^5e^2)^l(\ln a)^{-\nu(l)}(ln(a+x^2))^{-1}(4(\gamma+2)e)^{m-l}(a+x^2)^{\frac{\gamma-m}{2}} \le$$

$$\le (lna)^{-\nu(l)}(2^6(\gamma+2)e^2)^m(ln(a+x^2))^{-1}(a+x^2)^{\frac{\gamma-m}{2}}, x\in\mathbb{R}$$

и

$$\left|D_x^k\Theta_\delta(x)\right| \le k!\Theta_\delta(x)(\ln a)^{-\nu(k)}(2^6(\gamma+2)e^2)^k\sum_p^k \tfrac{1}{i!j!...h!}\left(\delta\tfrac{(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)}\right)^p \le$$

$$\le k!\Theta_{\frac{\delta}{2}}(x)(\ln a)^{-\nu(k)}(2^6(\gamma+2)e^2)^k\sum_p^k \frac{\sup\limits_{t>0}\{t^pe^{-t}\}}{i!j!...h!} \le \tag{2}$$

$$\le k!\Theta_{\frac{\delta}{2}}(x)(\ln a)^{-\nu(k)}(2^6(\gamma+2)e^2)^k\sum_p^k\tfrac{p!}{i!j!...h!} \le k!\Theta_{\frac{\delta}{2}}(x)(\ln a)^{-\nu(k)}(2^8(\gamma+2)e^3)^k,$$

$$k\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}.$$

Отсюда уже, учитывая утверждение леммы 1, приходим к неравенству (1).

Лемма доказана.

Далее пусть $\alpha > \dfrac{1}{\gamma}$, $\beta \geq 1$, $\Phi \in \{\mathbb{S}; S_\alpha; S_\alpha^\beta\}$ (т.е. Φ — одно из пространств $\mathbb{S}$, S_α или S_α^β), а $F[\Phi] \equiv \tilde{\Phi}$ — пространство Фурье-образов:

$$F[\Phi] = \left\{ F[\varphi](\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\sigma} dx,\ \varphi \in \Phi \right\}.$$

Через Φ' обозначим совокупность всех линейных непрерывных функционалов со слабой сходимостью, определенных на Φ.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \Phi'$ определим соотношением [1]:

$$< F[f], F[\varphi] >= 2\pi < f, \varphi >,\ \varphi \in \Phi.$$

2. Задача Коши. Пусть E - единичный оператор, а $b > 0$. Оператор $(bE - D_x^2)^{\frac{\tau}{2}}$, $\tau \in \mathbb{R}$, действие которого на элементах пространства $\mathbb{S}$ определяется так:

$$\forall f \in \mathbb{S} :\ (bE - D_x^2)^{\frac{\tau}{2}} f = F^{-1}\left[(b + \xi^2)^{\frac{\tau}{2}} F[f]\right],$$

назовем оператором Бесселя дробного интегродифференцирования в пространстве $\mathbb{S}$, с положительным параметром b. Отметим, что этот оператор при $b = 1$ совпадает с известным оператором Бесселя дробного интегродифференцирования в пространстве $\mathbb{S}$ (см. [3]).

Далее рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \left((aE - D_x^2)^{\frac{\tau}{2}} U\right)(t,x) d\tau = 0,\ (t,x) \in \Omega \equiv (0; +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $\gamma > 0$, $(aE - D_x^2)^{\frac{\tau}{2}}$ - оператор Бесселя дробного интегродифференцирования в пространстве $\mathbb{S}$, с параметром $a > 1$.

Если для уравнения (3) задать начальное условие

$$U(t,\cdot)\Big|_{t=0} = f, f \in (\tilde{\Phi})', \tag{4}$$

то под решением задачи Коши (3), (4) будем понимать гладкую функцию U, которая удовлетворяет уравнению (3) и начальному условию (4) в том смысле, что $U(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{(\tilde{\Phi})'}{\longrightarrow}} f$.

Сформулируем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. Для каждого $\varphi \in \Phi$ произведение $\Theta_t(\cdot)\varphi(\cdot)$ стремится к $\varphi(\cdot)$ при $t \to +0$ в смысле топологии пространства Φ.

Доказательство. Для доказательства леммы в случае, когда $\Phi = S_\alpha^\beta$, $\alpha > \frac{1}{\gamma}$ и $\beta \geq 1$, достаточно установить выполнение следующих условий:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ D_x^k(\Theta_t(x)\varphi(x)) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} D_x^k\varphi(x)$, где $\mathbb{K}$ — произвольное компактное множество из $\mathbb{R}$;

II) $\exists c_1 > 0\ \exists A_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall t \in (0;1)\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$|D_x^k(\Theta_t(x)\varphi(x))| \leq c_1 A_1^k k^{\beta k} e^{-\delta_1 |x|^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Отметим, что

$$D_x^k(\Theta_t(x)\varphi(x)) = \Theta_t(x) D_x^k\varphi(x) + \sum_{l=1}^{k} C_k^l D_x^l \Theta_t(x) D_x^{k-l}\varphi(x), \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

И, поскольку для каждого компактного множества $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}$:

$$D_x^l \Theta_t(x) D_x^{k-l}\varphi(x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0, \quad l \in \{1; 2; ...; k\};$$

$$\Theta_t(x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 1,$$

то

$$D_x^k(\Theta_t(x)\varphi(x)) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} D_x^k\varphi(x), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

т.е. условие I) — выполняется.

Докажем выполнение условия II).

Так как $\varphi \in \Phi$, то

$$\exists\, c > 0\ \exists\, A > 0\ \exists\, \delta_0 > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R}: \ |D_x^k\varphi(x)| \le cA^k k^{\beta k} e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Отсюда, учитывая неравенства (2) при $\delta = t$, получаем, что

$$|D_x^k(\Theta_t(x)\varphi(x))| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l |D_x^l\Theta_t(x)||D_x^{k-l}\varphi(x)| \le$$

$$\le 2^k \sum_{l=0}^{k} l!\Theta_{\frac{t}{2}}(x)(\ln a)^{-\nu(l)}(2^8(\gamma+2)e^3)^l cA^{k-l}(k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\alpha}}} \le$$

$$\le c(\ln a)^{-\nu(k)}(2^9(\gamma+2)e^3\hat{A})^k e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{l=0}^{k}(k^{\beta l}k^{\beta(k-l)}) \le$$

$$\le c(\ln a)^{-\nu(k)}(2^{10}(\gamma+2)e^3\hat{A})^k k^{\beta k} e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

где $\hat{A} \equiv \begin{cases} A, & A \ge 1, \\ 1, & 0 < A < 1. \end{cases}$ Таким образом, условие II) выполняется.

Если же $\Phi \in \{\mathbb{S}; S_\alpha, \alpha > \frac{1}{\gamma}\}$, то соответствующие условия I), II) доказываются аналогичным образом.

Лемма доказана.

Обозначим через $G_t(\cdot)$ обратное преобразование Фурье функции $\Theta_t(\cdot)$, т.е.

$$G_t(x) = F^{-1}\left[\Theta_t(\xi)\right](t,x), \ (t,x) \in \Omega.$$

В соответствии с леммой 2 $G_t(\cdot) \in S_\beta^\alpha$, где $\alpha > \frac{1}{\gamma}$, а $\beta \ge 1$.

Имеет место

Теорема 1. *Если обобщенная функция f такая, что ее преобразование Фурье $F[f]$ — мультипликатор в пространстве Φ, то задача Коши (3),(4) корректно разрешима (т.е. имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных данных) в этом пространстве, причем:*

1) ее решение $U(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t > 0$ принадлежит $\tilde{\Phi}$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial t}F[u] = F\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right]$, $t > 0$;

3) $U(t,x) = f * G_t(x)$, $(t,x) \in \Omega$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что

$$\forall f \in \mathbb{S}: \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \left((aE - D_x^2)^{\frac{\tau}{2}} f \right)(x) d\tau =$$

$$= F^{-1}[P(\xi) F[f](\xi)](x),\ \gamma > 0,\ a > 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} F^{-1}\left[(a+\xi^2)^{\frac{\tau}{2}} F[f](\xi)\right](x) d\tau = F^{-1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\gamma} (a+\xi^2)^{\frac{\tau}{2}} d\tau F[f](\xi)\right](x),\ f \in \mathbb{S}, \tag{5}$$

где $\gamma > 0,\ a > 1$ и $x \in \mathbb{R}$.

Но равенство (5) становится очевидным если взять во внимание то, что функция $(a+\xi^2)^{\frac{\tau}{2}} e^{-ix\xi} F[f](\xi)$ измерима (как непрерывная) по совокупности переменных $\tau \in (-\infty; \gamma],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}$, а интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (a+\xi^2)^{\frac{\tau}{2}} F[f](\xi) d\tau d\xi -$$

абсолютно сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{-ix\xi} (a+\xi^2)^{\frac{\tau}{2}} F[f](\xi) \right| d\tau d\xi \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\mathbb{R}} a^{\frac{\tau}{2}} \left| F[f](\xi) \right| d\tau d\xi +$$
$$+ \int\limits_{0}^{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} (a+\xi^2)^{\frac{\gamma}{2}} \left| F[f](\xi) \right| d\tau d\xi < +\infty,\ x \in \mathbb{R},\ a > 1,\ \gamma > 0,\ f \in \mathbb{S}.$$

Таком образом уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + F^{-1}[P(\xi) F[U](t,\xi)](t,x) = 0,\ (t,x) \in \Omega, \tag{6}$$

т.е. задача Коши (3),(4) эквивалентна задаче Коши (6),(4).

Далее, поскольку нас интересуют решения уравнения (6), которые при каждом фиксированном $t > 0$ являются элементами пространства $\tilde{\Phi}$ и по t удовлетворяют условие 2) данной теоремы, то учитывая, что отображения

$$F(F^{-1}) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, F(F^{-1}) :\ S_\beta^\alpha \to S_\alpha^\beta,\ F(F^{-1}) :\ S_\beta \to S^\beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

являются взаимоднозначными и непрерывными [1], получаем эквивалентность уравнения (6) уравнению

$$\frac{\partial \tilde{U}(t,\xi)}{\partial t} + P(\xi) \tilde{U}(t,\xi) = 0,\ (t,\xi) \in \Omega \tag{7}$$

(здесь и в дальнейшем $\tilde{V} \equiv F[V]$), причем начальное условие (4) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$\tilde{U}(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}} \tilde{f}. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\forall \varphi \in (\tilde{\Phi})' :\ 2\pi < \tilde{U}(t,\cdot), \tilde{\varphi} > = < U(t,\cdot), \varphi > \underset{t\to+0}{\to} < f, \varphi > = 2\pi < \tilde{f}, \tilde{\varphi} > .$$

Отсюда уже, приходим к тому, что вопрос о корректной разрешимости задачи Коши (3), (4) в пространстве $\tilde{\Phi}$ эквивалентен вопросу о корректной разрешимости задачи Коши (7), (8) в пространстве Φ.

Отметим, что уравнение (7) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяемыми переменными, общее решение которого

$$\tilde{U}(t,\xi) = c(\xi)\Theta_t(\xi),\ (t,\xi) \in \Omega. \tag{9}$$

Таким образом, учитывая условие (8), а также утверждение леммы 3, получаем решение задачи Коши (7),(8):

$$\tilde{U}(t,\xi) = \tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi),\ (t,\xi) \in \Omega$$

и поскольку $\tilde{f}$ – мультипликатор в Φ, то, на основании леммы 2, $\tilde{U}(t,\cdot) \in \Phi$ при каждом фиксированном $t > 0$.

Докажем, что это решение единственно в Φ. Для этого предположим существование в этом простанстве еще одного решения $\tilde{U}_1$ задачи Коши (7),(8). Исходя из структуры общего решения (9) уравнения (7),

$$\tilde{U}_1(t,\xi) = c_1(\xi)\Theta_t(\xi),\ (t,\xi) \in \Omega.$$

И, так как $\tilde{U}_1(t,\cdot) \in \Phi,\ t > 0$, то функция $c_1(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим функцию $V(t,\cdot) = \tilde{U}(t,\cdot) - \tilde{U}_1(t,\cdot), t > 0$, которая также является решением уравнения (7), причем $\tilde{V}(t,\cdot) \in \Phi,\ t > 0$. Она удовлетворяет условию

$$V(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}} 0.$$

Из этого условия, поскольку $\overline{\left(\tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot)\right)}\Theta_1(\cdot) \in \Phi$, в соответствии с леммой 3, имеем:

$$\left\langle \left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)\Theta_t(\xi), \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)}\Theta_1(\xi) \right\rangle = \left\langle \left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)^2 \Theta_{\frac{1}{2}}(\xi),\right.$$

$$\left.\Theta_t(\xi)\Theta_{\frac{1}{2}}(\xi) \right\rangle \to_{t\to+0} \left\langle \left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)^2, \Theta_1(\xi) \right\rangle = \langle 0, \Theta_1(\xi)\rangle$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)^2}\Theta_1(\xi)d\xi = 0.$$

Отсюда $\tilde{f}(\xi) = c_1(\xi)$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Но поскольку $\tilde{f}(\cdot)$ и $c_1(\cdot)$ - бесконечно дифференцируемые функции, то это равенство верно всюду на $\mathbb{R}$, т.е. $\tilde{U}(t,\xi) \equiv \tilde{U}_1(t,\xi),\ (t,\xi) \in \Omega$.

Таким образом задача Коши имеет единственное решение в пространстве Φ.

Далее установим выполнение условия 2) этой теоремы для решения уравнения (7).

Поскольку

$$F\left[\frac{\partial}{\partial t}U\right] = F\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right]\right)\right],\ t > 0$$

то достаточно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right]\right) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right)\right],\ t > 0, \tag{10}$$

то есть, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right]\right) = -F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)P(\xi)\right],\ t > 0.$$

Для этого зафиксируем произвольным образом $t = t_0 > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что $t_0 > \delta$. Тогда

$$\forall t \geq \delta: \ \left| F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right)\right]\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(\xi)\right| \Theta_\delta(\xi) P(\xi) d\xi < +\infty$$

(за счет того, что $\Theta_\delta(\cdot) \in \Phi$).То есть интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right) e^{-ix\xi} d\xi$ равномерно сходится по $t \geq \delta$ и $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right) e^{-ix\xi}$ - непрерывная функция по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$ и $t \geq \delta$, то согласно известной теореме математического анализа, получаем выполнение равенства (10) для каждого $t \geq \delta$, а значит и для $t = t_0$. Произвольность выбора $t = t_0$ и доказывает выполнение условия 2) данной теоремы для решения уравнения (6).

Наконец, приняв во внимание то, что

$$U(t, \cdot) = F^{-1}[\tilde{U}(t, \xi)] = F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\Theta_t(\xi)\right], \ t > 0$$

и учитывая утверждение теоремы 1 из [4], приходим к выводу, что $U(t, \cdot) = f * G_t(\cdot), \ t > 0$.

Решение U задачи Коши (3),(4) непрерывно зависит от начальных данных этой задачи, поскольку соответствующее решение $\tilde{U}$ владеет таким свойством, а F^{-1} является непрерывным оператором из Φ в $\tilde{\Phi}$. Теорема доказана.

Следующее утверждение характеризует свойство стабилизации решения задачи Коши (3), (4).

Теорема 2. *Пусть $F[f]$ — мультипликатор в Φ, тогда соответствующее решение задачи Коши (3), (4) стабилизируется к нулю в пространстве $\tilde{\Phi}$ (т.е. $u(t, \cdot) \underset{t \to +\infty}{\overset{\tilde{\Phi}}{\to}} 0$).*

Доказательство. Поскольку отображения

$$F(F^{-1}): \ \Phi \to \tilde{\Phi},$$

взаимнооднозначны и непрерывны [1], то достаточно доказать, что

$$\tilde{f}(\cdot)\Theta_t(\cdot) \underset{t \to +\infty}{\overset{\Phi}{\to}} 0,$$

т.е., что:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $D_x^k(\tilde{f}(x)\Theta_t(x)) \underset{t \to +\infty}{\overset{x \in \mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0$, где $\mathbb{K}$ — произвольное компактное множество из $\mathbb{R}$;

II) $\exists c_1 > 0 \ \exists A_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \forall t \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$|D_x^k(\tilde{f}(x)\Theta_t(x))| \leq c_1 A_1^k k^{\beta k} e^{-\delta_1 |x|^{\frac{1}{\alpha}}},$$

в случае, если $\Phi = S_\alpha^\beta$, $\alpha > \frac{1}{\gamma}, \beta \geq 1$.

Из неравенств (2) при $\delta = t$, утверждения леммы 1, а также из того, что $\tilde{f}(\cdot)$ — мультипликатор в пространстве Φ, приходим к неравенствам:

$$|D_x^k \Theta_t(x)| \leq k!(\ln a)^{-\nu(k)}(2^8(\gamma + 2)e^3)^k \Theta_{\frac{t}{2}}(x) \leq$$

$$\leq k!(\ln a)^{-\nu(k)}(2^8(\gamma + 2)e^3)^k e^{-\frac{t}{2}\varepsilon a^{\frac{\gamma - \eta}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \eta \in (0; 1);$$

$$\sup_{x\in\mathbb{K}} |D_x^k \tilde{f}(x)| < +\infty,$$

где $\mathbb{K}$ — произвольное компактное множество из $\mathbb{R}$, а $k \in \mathbb{Z}_+$.

Отсюда уже вытекает условие I).

Далее отметим, что

$$|D_x^k(\tilde{f}(x)\Theta_t(x))| = |D_x^k((\tilde{f}(x)\Theta_{\frac{1}{2}}(x))\Theta_{t-\frac{1}{2}}(x))| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l |D_x^l \Theta_{(t-\frac{1}{2})}(x)||D_x^{k-l}(\tilde{f}(x)\Theta_{\frac{1}{2}}(x))|, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, t \ge 1$$

и так как

$$\exists c > 0 \; \exists A > 0 \; \exists \delta_0 > 0 \; \forall l \in \mathbb{Z}_+ \; \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|D_x^l(\tilde{f}(x)\Theta_{\frac{1}{2}}(x))| \le cA^l l^{\beta l} e^{-\delta_0 |x|^{\frac{1}{\alpha}}},$$

так как $\tilde{f}(\cdot)\Theta_{\frac{1}{2}}(\cdot) \in \Phi$, то учитывая неравенства (2) при $\delta = t - \frac{1}{2}$, получаем, что

$$|D_x^k(\tilde{f}(x)\Theta_t(x))| \le c(\ln a)^{-\nu(k)}(2^{10}(\gamma+2)e^3\hat{A})^k k^{\beta k} e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\alpha}}},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, t \ge 1,$$

где $\hat{A} \equiv \begin{cases} A, & A \ge 1, \\ 1, & 0 < A < 1. \end{cases}$

Таким образом, условие II) выполняется.

Если же $\Phi \in \{\mathbb{S}; S_\alpha, \alpha > \frac{1}{\gamma}\}$, то соответствующие условия I), II) доказываются аналогичным образом. Теорема доказана.

В завершение отметим, что все приведенные здесь утверждения имеют место и в случае n - мерного эвклидового пространства, если вместо D_x^2 в уравнении (3) рассматривать оператор Лапласа.

Список литературы

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций.* М.: Физматгиз, 1958. 307 с.

[2] Schwartz L. *Theorie des distributions.* Act. Sc. en industr, N 1091 (t.1), 1950. Paris: Hermann et C-ie.

[3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

[4] Борок В.М. *Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных* Докл. АН СССР. 1954. Т.XCVII. N 6.С. 949 - 952.

ул.Толстого 3, кв.5

58002, Черновцы, Украина

E-mail address: vladlitchdu.cv.ua