Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.89-99.

АСИМПТОТИКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© В.Е. Капустян, Л.А. Паник

Днепропетровск, Украина

Введение.

В работе приведены исследования по решению некоторых задач локально ограниченного оптимального распределенного управления для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с локальными фазовыми ограничениями. Наличие малого параметра в главной части дифференциального оператора позволяет применять для построения их решений методы асимптотического анализа и результаты работ [1-3] по решению аналогичных задач для ограниченных управлений.

Асимптотические решения в данной работе получены на основе необходимых условий оптимальности первого порядка в редакции [4]. Ценность указанных условий оптимальности состоит в том, что некоторые интегральные неравенства, характеризующие оптимальные управления и фазовое состояние, независимы между собой. Это позволяет получить набор поточечных неравенств, который "поддается" асимптотической обработке. Построены алгоритмы, позволяющие найти решения произвольного порядка асимптотической точности. Их особенность состоит в том, что асимптотика множителя Лагранжа, отвечающего за выполнение фазовых ограничений, определяется неединственным образом, а асимптотика управления разрывна на некотором многообразии при гладкости исходных данных.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности.

В области $\Omega \subset R^n$, которая имеет компактное замыкание и гладкую (класса C^∞) $(n-1)$ - мерную границу $\partial\Omega$, рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти $u(x) \in U$, доставляющее наименьшее значение функционалу

$$J(y^\varepsilon, v) = 0.5 \int\limits_\Omega [(y^\varepsilon(x) - z(x))^2 + v^2(x)]dx \tag{1.1}$$

на решениях сингулярно возмущенной краевой задачи

$$A^\varepsilon y^\varepsilon = -\varepsilon^2 \Delta y^\varepsilon + y^\varepsilon = v(x) + f(x) \ \textit{п. в. в}\ \Omega, \tag{1.2}$$

$$y^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.3}$$

стесненных ограничением $y^\varepsilon \in K$.

Здесь $z(x), f(x) \in L_2(\Omega)$ - фиксированные функции; $0 < \varepsilon \ll 1; \Delta$ - оператор Лапласа; U - непустое, замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(\Omega)$; K - непустое, замкнутое выпуклое подмножество пространства $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Предположение 1.1. *Пусть $\forall \varepsilon$ задача (1.1) - (1.3) регулярна, т. е. существует такое управление $v \in U$, что $y^\varepsilon \in K$.*

Тогда, как известно [4], задача (1.1) - (1.3) при выполнении предположения 1.1 и любом ε имеет единственное решение $u_*^\varepsilon \in U$, $y_*^\varepsilon \in K$. Оптимальное управление u_*^ε в рассматриваемой задаче может быть охарактеризовано условиями оптимальности различной "силы" [4] в зависимости от гладкости функций, с которыми сравнивается указанное управление. Перейдем к точным формулировкам этих результатов. Для сильного условия оптимальности нам понадобится

Предположение 1.2. *Пусть $\exists\, v_0 \in U$, $\exists\, \rho > 0$, $\exists\, R > 0$ такие, что $\forall\, k \in B^2(0,1)$, $\exists\, v_k \in B^2(v_0, R) \cap U$, $A^\varepsilon y_k^\varepsilon = f + v_k - \rho\, k$, $y_k^\varepsilon \in K$, где $B^2(v_0, R)$ - шар радиуса R с центром в v_0 пространства $L_2(\Omega)$.*

Теорема 1.1. *Пусть выполнены предположения 1.1 -1.2, а функция $p_*^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ определяется как решение уравнения*

$$A^\varepsilon p_*^\varepsilon = y_*^\varepsilon - z(x) \text{ п. в. в } \Omega. \tag{1.4}$$

Пара (y_*^ε), u_*^ε является оптимальным решением задачи (1.1) - (1.3) тогда и только тогда, когда существует такая функция $q_*^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, что имеют место неравенства

$$\int_\Omega (q_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x))[A^\varepsilon(y(x) - y_*^\varepsilon(x))]\, dx \geq 0 \;\forall\, y \in K, \tag{1.5}$$

$$\int_\Omega (u_*^\varepsilon(x) - q_*^\varepsilon(x))\, (v(x) - u_*^\varepsilon(x))\, dx \geq 0 \;\forall\, v \in U \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. *Предположение 1.2 представляет собой модификацию условия Слейтера для рассматриваемой задачи.*

Замечание 1.2. *Слабые условия оптимальности из работы [4] здесь не приводятся, так как они, вообще говоря, не конструк тивны с точки зрения определения управления, "подозрительно го" на оптимальность. Дело в том, что эти условия содержат множества, которые сами зависят от оптимального элемента.*

Предположение 1.3. *Пусть*

$$K = \{y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : |y(x)| \leq \alpha(x) \text{ п. в. в } \Omega, \alpha(x) \in H^2(\Omega)\},$$

$$U = \{v \in L_2(\Omega) : |v(x)| \leq \beta(x) \text{ п. в. в } \Omega,\ \beta(x) \in L_2(\Omega)\}$$

Из теоремы 1.1 и предположения 1.3 следует существование такого числа ε_0, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ область Ω распадается на две тройки непересекающихся множеств

$i)$ $x \in \Omega_1^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x),\; u_*^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \Delta\alpha(x) - \alpha(x) - f(x),$$

$$p_*^\varepsilon(x) + q_*^\varepsilon(x) > 0,\; -\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x) - z(x); \tag{1.7}$$

$ii)$ $x \in \Omega_2^\varepsilon$:

$$|y_*^\varepsilon(x)| < \alpha(x),\; p_*^\varepsilon(x) = -q_*^\varepsilon(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = f(x) + u_*^\varepsilon(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x); \tag{1.8}$$

$iii)$ $x \in \Omega_3^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) = \alpha(x),\; u_*^\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 \Delta\alpha(x) + \alpha(x) - f(x),$$

$$p_*^\varepsilon(x) + q_*^\varepsilon(x) < 0,\; -\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = \alpha(x) - z(x), \tag{1.9}$$

где $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \Omega_i^\varepsilon,\; \Omega_k^\varepsilon \cap \Omega_l^\varepsilon = \emptyset,\; k \ne l;$

$j)$ $x \in \omega_1^\varepsilon$:

$$u_*^\varepsilon(x) = -\beta(x),\; \beta(x) + q_*^\varepsilon(x) < 0,$$
$$-\varepsilon^2 \Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = f(x) - \beta(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x); \tag{1.10}$$

$jj)$ $x \in \omega_2^\varepsilon$:

$$|u_*^\varepsilon(x)| < \beta(x),\; q_*^\varepsilon(x) = u_*^\varepsilon(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = f(x) - p_*^\varepsilon(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x); \tag{1.11}$$

$jjj)$ $x \in \omega_3^\varepsilon$:

$$u_*^\varepsilon(x) = \beta(x),\; \beta(x) - q_*^\varepsilon(x) < 0,$$
$$-\varepsilon^2 \Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = f(x) + \beta(x),$$
$$-\varepsilon^2 \Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x), \tag{1.12}$$

где $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \omega_i^\varepsilon,\; \omega_k^\varepsilon \cap \omega_l^\varepsilon = \emptyset,\; k \ne l;$

Все соотношения в (1.7) - (1.12) понимаются в смысле почти всюду.

Предположение 1.4. *Пусть* $f(x),\, z(x),\, \alpha(x),\, \beta(x) \in C^\infty(\bar\Omega)$; $\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$, $\Omega = \omega_1^\varepsilon \cup \omega_2^\varepsilon$; *области* $\Omega_1^\varepsilon,\, \omega_1^\varepsilon$ *являются односвязными, строго лежат* *внутри* Ω *и имеют соответственно границы* $\partial\Omega_1^\varepsilon$, $\partial\omega_1^\varepsilon$ *из того же класса, что и* $\partial\Omega$.

Возможны такие варианты взаимного расположения областей Ω_i^ε и ω_j^ε $(i, j = \overline{1,2})$: 1) область ω_i^ε (Ω_i^ε) имеет непустое пересечение только с одной областью Ω_j^ε (ω_j^ε); 2) область ω_i^ε (Ω_i^ε) имеет непустое пересечение с обеими областями Ω_j^ε (ω_j^ε).

Пусть реализовался вариант 1) $(\omega_1^\varepsilon \subset \Omega_1^\varepsilon)$. Тогда условия оптимальности (1.7) - (1.12) принимают вид

$k)$ $x \in \Omega_1^\varepsilon \cap \omega_1^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x),\ u_*^\varepsilon(x) = -\beta(x) = \varepsilon^2\alpha(x) - \alpha(x) - f(x),$$

$$p_*^\varepsilon(x) + q_*^\varepsilon(x) > 0,\ \beta(x) + q_*^\varepsilon(x) < 0,$$

$$-\varepsilon^2\Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x) - z(x); \tag{1.13}$$

$kk)$ $x \in \Omega_1^\varepsilon \cap \omega_2^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x),\ p_*^\varepsilon(x) + q_*^\varepsilon(x) > 0,$$

$$u_*^\varepsilon(x) = q_*^\varepsilon(x) = \varepsilon^2\alpha(x) - \alpha(x) - f(x),$$

$$-\varepsilon^2\Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = -\alpha(x) - z(x); \tag{1.14}$$

$kkk)$ $x \in \Omega_2^\varepsilon \cap \omega_2^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) > -\alpha(x),\ p_*^\varepsilon(x) = -q_*^\varepsilon(x),$$

$$u_*^\varepsilon(x) > -\beta(x),\ u_*^\varepsilon(x) = q_*^\varepsilon(x),$$

$$-\varepsilon^2\Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = -p_*^\varepsilon(x) + f(x),$$

$$-\varepsilon^2\Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x). \tag{1.15}$$

Вариант $k)$ имеет место, если

$$\Delta\alpha(x) = 0,\ \beta(x) = \alpha(x) + f(x),\ \forall x \in \Omega_1^\varepsilon \cap \omega_1^\varepsilon. \tag{1.16}$$

Пусть теперь $\Omega_1^\varepsilon \subset \omega_1^\varepsilon$. В этом случае вместо области $kk)$ следует рассмотреть область $k_1k_1)$ $x \in \Omega_2^\varepsilon \cap \omega_1^\varepsilon$:

$$y_*^\varepsilon(x) > -\alpha(x),\ p_*^\varepsilon(x) + q_*^\varepsilon(x) = 0,$$

$$u_*^\varepsilon(x) = -\beta(x),\ \beta(x) + q_*^\varepsilon(x) < 0,$$

$$-\varepsilon^2\Delta y_*^\varepsilon(x) + y_*^\varepsilon(x) = -\beta(x) + f(x),$$

$$-\varepsilon^2\Delta p_*^\varepsilon(x) + p_*^\varepsilon(x) = y_*^\varepsilon(x) - z(x).$$

Пусть реализовался вариант 2). Тогда условия оптимальности исчерпываются набором множеств $k) - kkk)$, $k_1k_1)$.

Таким образом, если условия (1.16) не выполняются нигде в области Ω, то $\Omega_1 \cap \omega_1 = \emptyset$. Далее рассмотрим случай, когда условия (1.16) выполняются во всех точках области Ω.

2. Формальные асимптотические решения.

1. Внешние асимптотические разложения. Рассмотрим задачу (1.13) - (1.15). В силу условий (1.16) будем иметь $\Omega_1^\varepsilon \equiv \omega_1^\varepsilon$. Внешнее разложение решения этой задачи ищем в виде рядов [1]

$$\bar{F}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{F}_i(x), \tag{2.1}$$

где символ F принимает значения из множества $y(x),\ u(x),\ p(x),\ q(x)$.

Коэффициенты разложений (2.1) определяются из соотношений

при $i = 0$

$$\bar{y}_0(x) = -\alpha(x),\ \bar{u}_0(x) = -\beta(x),$$
$$\beta(x) + \bar{q}_0(x) < 0,\ \bar{p}_0(x) = -\alpha(x) - z(x),\ x \in \Omega_1^0; \tag{2.2}$$

$$\bar{y}_0(x) > -\alpha(x),\ \bar{u}_0(x) > -\beta(x),\ \bar{u}_0(x) = \bar{q}_0(x) = -\bar{p}_0(x),$$
$$\bar{y}_0(x) + \bar{p}_0(x) = f(x),$$
$$\bar{p}_0(x) - \bar{y}_0(x) = -z(x),\ x \in \Omega_2^0; \tag{2.3}$$

при $i > 0$

$$\bar{y}_i(x) = \bar{u}_i(x)0 = \bar{q}_i(x) = 0,\ \bar{p}_i(x) = \Delta\bar{p}_{i-2}(x),\ x \in \Omega_1^0;$$
$$\bar{u}_i(x) = \bar{q}_i(x) = -\bar{p}_i(x),$$
$$\bar{y}_i(x) + \bar{p}_i(x) = \Delta\bar{y}_{i-2}(x),$$
$$\bar{p}_i(x) - \bar{y}_i(x) = \Delta\bar{p}_{i-2}(x),\ x \in \Omega_2^0, \tag{2.4}$$

где $\Omega = \Omega_1^0 \cup \Omega_2^0$, а области $\Omega_i^0,\ i = \overline{1,2}$ являются аппроксимациями областей Ω_i^ε соответственно.

Из системы (2.3) находим, что

$$\bar{y}_0 = \frac{f(x) + z(x)}{2},$$

$$\bar{p}_0 = \frac{f(x) - z(x)}{2}. \tag{2.5}$$

Тогда, согласно (2.2) - (2.3), граница $\partial\Omega_1^0$ определяется как решение уравнения

$$\gamma(x) = \frac{f(x) + z(x)}{2} + \alpha(x) = 0 \tag{2.6}$$

и при этом функции $\bar{y}_0(x)$, $\bar{p}_0(x)$, $\bar{u}_0(x)$ являются непрерывными на указанном множестве, а функция $\bar{q}_0(x)$ на нем может иметь конечный разрыв ($q_*^\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$). Кроме того, в области Ω_1^0 выполняются неравенства

$$\alpha_0(x) + z(x) < \bar{q}_0(x) < -\beta(x), \tag{2.7}$$

а в области Ω_2^0 - неравенство

$$\gamma(x) > 0. \tag{2.8}$$

В качестве $\bar{q}_0(x)$ в области Ω_1^0 возьмем гладкую функцию $q(x)$, удовлетворяющую неравенству (2.7).

Предположение 2.1. *Будем считать, что решения уравнения (2.6) составляют гладкое многообразие класса C^∞ размерности $n-1$ без края [5].*

Оставшиеся коэффициенты разложений (2.1) находим из соотношений (2.4).

Замечание 2.1. *Если соотношения kk) заменить соотношениями k_1k_1), то в этом случае получим асимптотическое равенство $\Omega_1^\varepsilon = \omega_1^\varepsilon$.*

Замечание 2.2. *Найденные формальные асимптотики внешних разложений (2.1), во-первых, не удовлетворяют условиям по гладкости для исходных решений (y_*^ε, $p_*^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$), во-вторых, не реализуют итерационный процесс уточнения границы области Ω_1^0 и не гарантируют выполнения неравенств условий оптимальности при этом.*

Поэтому найденные асимптотики в окрестности границы $\partial\Omega_1^0$ следует дополнить внутренними погранслойными разложениями.

С этой целью в окрестности Σ многообразия $\partial\Omega_1^0$ введем координаты (τ, σ), где $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_{n-1})$ - локальные координаты на $\partial\Omega_1^0$, τ - расстояние до $\partial\Omega_1^0$, взятое со знаком $''-''$ в Ω_1^0 и $''+''$ в Ω_2^0 [6]. Окрестность Σ есть область перехода от неравенств в kk) к равенствам. Аналогично [2,6], поверхность перехода будем искать в виде

$$\{x \in \Sigma : \tau = \varepsilon H(\varepsilon, \sigma),\ H(\varepsilon, \sigma) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_j(\sigma),\ H_j(\sigma) \in C^\infty(\partial\Omega_1^0)\}. \tag{2.9}$$

В окрестности Σ выполним замену переменных $x \to (\eta, \sigma)$, где $\eta = \varepsilon^{-1}\tau - H(\varepsilon, \sigma)$. При этом оператор A^ε расщепляется в ряд

$$-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \Re_j(\eta, \sigma, \frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial\sigma}), \tag{2.10}$$

где операторные коэффициенты в (2.10) зависят от неизвестных к настоящему моменту коэффициентов разложения (2.10) функции $H(\varepsilon, \sigma)$, причем, операторы

$\Re_j$, $j = 1, 2, \ldots$ выражаются через функции $H_0, \ldots, H_{j-2}$; $\Re_j$ - дифференциальные операторы не выше второго порядка по переменной σ и не выше первого порядка по переменной η; их коэффициенты гладко зависят от координат на $\partial\Omega_1^0$ и полиномиально от η; структура операторов $\Re_j$ при $n = 2$ приведена, например, в [7].

2. Главные члены внутренних разложений. Старшие члены внутреннего пограничного слоя в рамках метода сращиваемых асимптотических разложений [6] будем искать в виде

$$\hat{F}(\eta, \sigma) = \bar{F}_0(0, \sigma) + \varepsilon\,(\bar{F}_1(0, \sigma) + \hat{F}_1(\eta, \sigma)), \tag{2.11}$$

причем $\bar{F}_i(0, \sigma) = \bar{F}_i(0+, \sigma)$, если $\eta > 0$; $\bar{F}_i(0, \sigma) = \bar{F}_i(0-, \sigma)$, если $\eta < 0$.

Функции $\hat{F}_1(\eta, \sigma)$ разложения (2.11) удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{\partial^2 \hat{y}_1}{\partial \eta^2} + \hat{y}_1 + \hat{p}_1 = (\eta + H_0)\,\frac{\partial f(0, \sigma)}{\partial \tau},$$

$$-\frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \eta^2} - \hat{y}_1 + \hat{p}_1 = -\,(\eta + H_0)\,\frac{\partial z(0, \sigma)}{\partial \tau},$$

$$\hat{u}_1(\eta, \sigma) = \hat{q}_1(\eta, \sigma) = -\,\hat{p}_1(\eta, \sigma), \ \eta > 0;$$

$$\hat{y}_1 = -\,(\eta + H_0)\,\frac{\partial \alpha(0, \sigma)}{\partial \tau},$$

$$\hat{u}_1 = -\,(\eta + H_0)\,\frac{\partial \beta(0, \sigma)}{\partial \tau},$$

$$\hat{q}_1 = (\eta + H_0)\,\frac{\partial q(0, \sigma)}{\partial \tau},$$

$$-\frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \eta^2} + \hat{p}_1 = -\,(\eta + H_0)\,\frac{\partial \alpha(0, \sigma)}{\partial \tau} -$$

$$= -\,(\eta + H_0)\,\frac{\partial z(0, \sigma)}{\partial \tau}, \ \eta < 0. \tag{2.12}$$

Общее решение системы из (2.12) имеет вид

$$\hat{y}_1(\eta, \sigma) = c_1(\sigma)\,\varphi_1(\eta, \sigma) + c_2(\sigma)\,\varphi_2(\eta, \sigma)) +$$

$$+\,\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f(0, \sigma)}{\partial \tau} + \frac{\partial z(0, \sigma)}{\partial \tau}\Big)(\eta + H_0(\sigma)),$$

$$\hat{p}_1(\eta, \sigma) = c_1(\sigma)\varphi_2(\eta, \sigma) - c_2(\sigma)\,\varphi_1(\eta, \sigma) +$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\Big(\frac{\partial f(0, \sigma)}{\partial \tau} - \frac{\partial z(0, \sigma)}{\partial \tau}\Big)(\eta + H_0(\sigma)), \ \eta > 0;$$

$$\hat{p}_1(\eta, \sigma) = \hat{c}_1(\sigma)\,\hat{\varphi}_1(\eta, \sigma) - (\eta + H_0)\times$$

$$\times\,\Big(\frac{\partial \alpha(0, \sigma)}{\partial \tau} + \frac{\partial z(0, \sigma)}{\partial \tau}\Big), \ \eta < 0, \tag{2.13}$$

где

$$\varphi_1(\eta,\sigma) = \exp(-r^{1/2} \cos(\phi/2)\eta) \cos(r^{1/2}\sin(\phi/2)\eta),$$

$$\varphi_2(\eta,\sigma) = \exp(-r^{1/2} \cos(\phi/2)\eta) \sin(r^{1/2}\sin(\phi/2)\eta),$$

$$\hat{\varphi}_1(\eta,\sigma) = \exp(\eta),$$

причем, $r = \sqrt{2}$, $\phi = \pi/4$.

Функции $\hat{y}$, $\hat{p}$ разложения (2.11) должны удовлетворять условиям

$$\hat{y}(\eta,\sigma),\ \hat{p}(\eta,\sigma) \in C^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Из (2.13) - (2.14) получим систему для определения неизвестных постоянных

$$c_1(\sigma) = -\, H_0(\sigma)\, \frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau},$$

$$r^{1/2} \cos(\phi/2)\, c_1(\sigma) = r^{1/2} \sin(\phi/2)\, c_2(\sigma) + \frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau},$$

$$c_2(\sigma) = -\, \hat{c}_1(\sigma) + H_0(\sigma)\, \frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau}, \tag{2.15}$$

$$r^{1/2} \sin(\phi/2)\, c_1(\sigma) = \hat{c}_1(\sigma) - r^{1/2} \cos(\phi/2)\, c_2(\sigma) - \frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau},$$

где

$$\frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau} \neq 0,\ \forall\sigma \in \partial\Omega_1^0. \tag{2.16}$$

Из (2.15) с учетом (2.16) находим, что

$$H_0(\sigma) = \frac{r^{1/2} \sin(\phi/2) - r^{1/2} \cos(\phi/2) - 1}{r^{1/2} \sin(\phi/2) + r^{1/2} \cos(\phi/2) + r} < 0. \tag{2.17}$$

В окрестности $\partial\Omega$ разложения (2.1) следует дополнить стандар тными разложениями типа погранфункций [2,7], которые обеспечивают выполнение граничных условий. Это и завершает пост роение главных членов разложения. Отметим, что разложение для u_*^ε терпит разрыв при $\eta = 0$, а разложение для q_*^ε содержит неустранимый произвол. Выясним теперь "качество" разложений (2.11), т. е. точность удовлетворения соотношений условий оптимальности.

В окрестности Σ $(\tau - \varepsilon H_0(\sigma) = O(\varepsilon))$ дифференциальные уравнения условий оптимальности выполняются с точностью $O(\varepsilon^2)$. Проверим выполнение неравенств из (1.13). Первое неравенство принимает вид

$$\delta_{y_1}(\eta,\sigma) = \hat{y}_1(\eta,\sigma) + (\eta + H_0(\sigma))\, \frac{\partial\alpha(0,\sigma)}{\partial\tau} > 0. \tag{2.18}$$

В силу (2.14) $\delta_{y_1}(0,\sigma) = \delta'_{y_1}(0,\sigma) = 0$. Вычислим $\delta''_{y_1}(0,\sigma)$. Из системы (2.12) и соотношений (2.13), (2.15) находим, что

$$\delta''_{y_1}(0,\sigma) = c_1(\sigma) - c_2(\sigma) =$$

$$= 2\frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau}\;\frac{1\;+\;r^{1/2}\;\cos(\phi/2)}{r\;+\;r^{1/2}\;(\cos(\phi/2)\;+\;\sin(\phi/2))}. \tag{2.19}$$

Тогда если $\partial\gamma(0,\sigma)/\partial\tau\;>\;0$, *то* функция $\delta_{y_1}(\eta,\sigma)$ принимает в точке локальный минимум и наоборот. Второе неравенство принимает вид

$$\delta_{u_1}(\eta,\sigma)\;=\;\hat{p}_1(\eta,\sigma)\;-\;(\eta\;+\;H_0(\sigma))\;\frac{\partial\beta(0,\sigma)}{\partial\tau}\;<\;0. \tag{2.20}$$

Вычислим

$$\delta_{u_1}(0,\sigma)\;=\;-\;c_2(\sigma)\;-\;H_0(\sigma)\;\frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau}\;=$$

$$= 2\frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau}\;\frac{1\;+\;r^{1/2}\;\cos(\phi/2)}{r\;+\;r^{1/2}\;(\cos(\phi/2)\;+\;\sin(\phi/2))}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что функция $\hat{u}_1(\eta,\sigma)$ терпит разрыв в точке $\eta\;=\;0$. Совпадение правых частей выражений (2.19), (2.21) свидетельствует о том, что неравенства (2.18), (2.20) не могут выполняться одновременно. Поэтому положим

$$\frac{\partial\gamma(0,\sigma)}{\partial\tau}\;<\;0. \tag{2.22}$$

Тогда неравенство (2.20) выполняется в указанной окрестности. Для выполнения же неравенства (2.18), аналогично [6], вместо функции $\hat{y}_1(\eta,\sigma)$ возьмем функцию $\hat{y}_1(\eta,\sigma)+\varepsilon\,Q_{y_1}$, где Q_{y_1} - достаточно большое положительное число. При такой замене точность выполнение уравнений условий оптимальности не нарушается. Вместо функции $\hat{u}_1(\eta,\sigma)$ возьмем функцию $\hat{u}_1(\eta,\sigma)\;+\;\varepsilon\;Q_{u_1}$, где Q_{u_1} - достаточно большое положительное число. При этом неравенство (2.20) выполняется.

При $\tau\;-\;\varepsilon\,H_0\;<\;0$ будем считать выполненными указанные выше замены. Тогда в этой окрестности выполняются требования $\bar{y}_0(0,\sigma)\;+\;\varepsilon\;\hat{y}_1(\varepsilon^{-1}\;\tau\;-\;H_0,\sigma)\;+\;\varepsilon^2\;Q_{y_1}\;\geq\;-\;\alpha(x)$, $\bar{u}_0(0,\sigma)\;+\;\varepsilon\;\hat{u}_1(\varepsilon^{-1}\;\tau\;-\;H_0,\sigma)\;+\;\varepsilon^2\;Q_{u_1}\;\geq\;-\;\beta(x)$, уравнение из (1.15) выполняется с точностью $O(\varepsilon^2)$, а соответствующие неравенства не нарушаются при добавлении старших членов.

Тем самым для данного варианта нами найдены и проанализи рованы старшие члены внутреннего переходного слоя в окрест ности многообразия $\partial\Omega_1^0$.

3. Полные асимптотические разложения.

Пусть граница $\partial\Omega_1^0$ представляет собой решение уравнения (2.6), удовлетворяющее предположению 2.1. Асимптотическое решение в задаче k), kkk) с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ (метод составных разложений) будем искать в виде [2,6]

$$W^{(N)}(\varepsilon,x)=X^{(N)}(\varepsilon,x)\;\sum_{i=0}^{N}\;\varepsilon^i\;\bar{w}_i(x)\;+\;X_1(x)\;\times$$

$$\times\;\sum_{i=0}^{N}\;\varepsilon^i\;\tilde{w}_i(\varepsilon^{-1}\;\tau\;-\;H^{(N)}(\varepsilon,\sigma),\sigma)\;+$$

$$+ \ X_2(x) \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \ \tilde{w}_i(t,s), \qquad (3.1)$$

где

$$H^{(N)}(\varepsilon,\sigma) \ = \ \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \ H_i(\sigma); \qquad (3.2)$$

переменная W принимает значения Y, P, U, Q; функции $\tilde{y}_N(\eta,\sigma)$, $\tilde{u}_N(\eta,\sigma)$ замещаются функциями

$$\tilde{y}_N(\eta,\sigma) + \varepsilon Q_y^N, \tilde{u}_N(\eta,\sigma) + \varepsilon \ Q_u^N$$

с тем же смысловым значением постоянных $Q^N_{\cdot}$, что и в конце предыдущего параграфа; функции $\bar{w}_i(x)$ определяются из соотношений (2.2) - (2.4); $X^{(N)}(\varepsilon,x)$, $X_i(x)$ - срезающие функции, определенные следующим образом:

$$X^{(N)}(\varepsilon,x) \ = \begin{cases} 1, & \text{вне} \quad \Omega/(\Sigma \ \cup \ \Sigma_{\partial\Omega}); \\ 1 \ - \ \chi(\varepsilon^{-1} \ \tau \ - \ H^{(N)}(\varepsilon,\sigma)), & \text{в} \quad \Sigma; \end{cases}$$

$$X_1(x) \ = \ \chi(\tau), \qquad X_2(x) \ = \ \chi(- \ \nu);$$

здесь χ - функция из $C_0^\infty(R)$, равная единице вблизи нуля и имеющая малый носитель, принадлежащий Σ (соответственно $\Sigma_{\partial\Omega}$ - окрестность $\partial\Omega$); решения типа погранслоя в Σ удовлетворяют условиям:

1) $\tilde{w}_i(\eta,\sigma) = 0, \eta \ll -1$,

2) $\tilde{w}_i(\eta,\sigma) = O(\exp(-\delta \ \eta))$ при $\eta \to \infty, \delta \in (0,1)$;

а в области $\Sigma_{\partial\Omega}$ указанные функции в переменных (t,s) должны удовлетворять только условию 2).

Тогда функции $\tilde{w}_i(\eta,\sigma)$ из (3.1) в окрестности Σ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, аналогичным (2.12). По индукции убеждаемся, что функции с $\tilde{w}_i(\eta,\sigma)$ с заданными свойствами как и коэффициенты разложения (3.2) определяются однозначно. Связь между переменными $\tilde{w}_i(\eta,\sigma)$ и $\hat{F}_i(\eta,\sigma)$ при $i = 1$ имеет вид

$$\tilde{w}_1(\eta,\sigma) \ = \ \hat{F}_1(\eta,\sigma) \ - \ (1 \ - \ \chi(\eta)) \ (\eta \ + \ H_0) \ \frac{\partial \bar{F}_0(0,\sigma)}{\partial \tau}.$$

Теорема 3.1.*Пусть выполнены предположения предыдущих параграфов. Тогда разложения (3.1) представляют собой решение задачи (1.1) - (1.3) и имеют место неравенства*

$$||\Delta(y_*^\varepsilon) - Y^{(N)})|| + ||\Delta(p_*^\varepsilon) - P^{(N)})|| \ \leq \ C \ \varepsilon^N,$$

$$||y_*^\varepsilon) - Y^{(N)}|| + ||p_*^\varepsilon) - P^{(N)}|| \ \leq \ C \ \varepsilon^{N+1},$$

$$||u_*^\varepsilon) - U^{(N)}|| \ \leq \ C \ \varepsilon^{N+1},$$

$$|J(y_*^\varepsilon, y_*^\varepsilon) - J(Y^{(N)}, U^{(N)})| \ \leq \ C \ \varepsilon^{2(N+1)},$$

где $||.||$ *- норма в* $L_2(\Omega)$.

Список литературы

1. Капустян В. Е., *Глобальные ограниченные управления в оптимальных сингулярно возмущенных эллиптических задачах*, ДАН Украины **12** (1993), 79 - 83.
2. Капустян В. Е., *Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах*, Укр. мат. журнал **45** (1993), no. 8, 1072 - 1083.
3. Капустян В. Е., Шаповал И. В., *Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных нелинейных эллиптических задачах*, Проблемы управления и информатики **5-6** (1994), 61-70.
4. Bergounioux M., *Penalization method for optimal control of elliptic problems with state constraints*, Control and optimization, **3** (1992), 305 - 323.
5. Обен Ж.-П., Экланд И., *Прикладной нелинейный анализ*, М.: Мир, 1988.
6. Назаров С. А., *Асимптотическое решение вариационных неравенств для линейного оператора с малым параметром при старших производных*, Изв. АН СССР. Серия матем. **54** (1990), no. 4, 754 - 773.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, М.: Высшая школа, 1990.

ул. Писаржевского 8-а, кв. 43,
40005, Днепропетровск, Украина
E-mail address: evm @ diit.dp.ua