

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С L^1 -ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© Ю.С. ГОРБАНЬ
Донецк, Украина

ABSTRACT. In present paper the existence of solutions of some degenerate anisotropic variational inequalities with L^1 - right-hand sides is proved.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время проведены интересные исследования о разрешимости нелинейных дивергентных уравнений с L^1 -данными, не укладывающимися в обычную схему теории монотонных операторов [8]. Среди этих исследований одной из самых значительных явилась работа [1]. В ней была построена теория существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правыми частями, принадлежащими классу L^1 .

В работах [4] – [6] происходит дальнейшее развитие упомянутой теории на случай уравнений высших порядков. А именно, в них изучаются вопросы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка с L^1 -правыми частями. Аналогичные вопросы для некоторого класса нелинейных вырождающихся анизотропных уравнений четвертого порядка исследованы в [7].

Изучению разрешимости задачи Дирихле для анизотропных уравнений второго порядка с L^1 -данными посвящена работа [2]. Авторы доказывают существование слабого решения такой задачи в соответствующих соболевских пространствах.

Одним из актуальных современных направлений в L^1 -теории нелинейных эллиптических уравнений второго порядка является исследование задач, связанных с вариационными неравенствами. Например, в работе [3] изучается односторонняя задача с препятствием, соответствующая дифференциальным монотонным операторам второго порядка, с L^1 -правыми частями, причем рассматривается изотропный случай без весовых функций.

В настоящей работе доказывается существование решений некоторых вариационных неравенств с L^1 -правыми частями, причем рассматривается вырождающийся анизотропный случай. Заметим, что в основе доказательства лежит подход, предложенный в [1], а также используются некоторые методы и результаты работы [5].

1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предположим, что Ω – некоторое открытое, ограниченное множество в \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Пусть при любом $i = 1, \dots, n$ заданы действительные числа q_i такие, что $1 < q_i < n$.

Будем использовать такие обозначения:

$$q = \{q_1, \dots, q_n\}, \quad q_- = \min_i \{q_i\}, \quad q_+ = \max_i \{q_i\}.$$

Пусть, далее, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $\nu_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – положительная функция, причем $\nu_i \in L^1(\Omega)$, $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$. Положим $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$.

Через $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций из $L^{q^-}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные первого порядка со свойством

$$\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega), i \in \{1, \dots, n\}.$$

Множество $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W^{1,q}(\nu, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^{q^-} dx \right)^{1/q^-} + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}.$$

Через $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Будем использовать следующий результат о вложении для случая весовых анизотропных пространств.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ такое, что $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Тогда существует постоянная C_* , зависящая только от величин $n, q_i, m_i, \|1/\nu_i\|_{L^{m_i}(\Omega)}, i = 1, \dots, n$, такая, что для любой $u \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ имеет место неравенство:

$$\|u\|_{L^{q_*}(\Omega)} \leq C_* \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i},$$

где

$$q_* = n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1 + m_i}{m_i q_i} - 1 \right\}^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы основано на применении одного результата о вложении для случая невесовых анизотропных пространств (см. [9]).

Пусть $C_1, C_2 > 0, g_1, g_2$ — неотрицательные функции на $\Omega, g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ — функции Каратеодори.

Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n [\nu_i(x)]^{-1/(q_i-1)} |a_i(x, \xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leq C_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq C_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \quad (1.2)$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta$, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta)) (\xi_i - \eta_i) > 0. \quad (1.3)$$

Определим для любого $k > 0$ функцию $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(s), & |s| > k. \end{cases}$$

Пусть V — выпуклое замкнутое множество в $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $0 \in V$;
- 2) если $u, w \in V$ и $k \geq 1$, то $u - T_k(u - w) \in V$.

Пусть

$$f \in L^1(\Omega). \quad (1.4)$$

Положим

$$Q_1 = \min \left\{ n - \frac{n-1}{q_-}; \frac{n+q_+-1}{q_+} \right\},$$

$$Q_2 = \min \left\{ (q_- - 1)n + 1 - q_- \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}; \frac{n}{q_+ - 1} + 1 - \frac{q_+}{q_+ - 1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right\}.$$

Пусть

$$\hat{q} = q_* \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right),$$

и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$\hat{q}_i = \frac{q_i \hat{q}}{1 + \hat{q}}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть справедливы предположения (1.1) – (1.4) и выполнены условия:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} < Q_1; \quad (1.5)$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует $m_i > 0$ такое, что $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{m_i} \left(n - \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j q_j} < 1 + (q_i - 1)n - q_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}, \quad (1.6)$$

причем

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i q_i} < Q_2; \quad (1.7)$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует $t_i > 0$ такое, что $\nu_i \in L^{t_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{t_i} < 1 - (q_i - 1) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1+m_j}{m_j q_j} - 1 \right) \left(n - \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j} \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Тогда существует функция $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$ такая, что:

- 1) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u) \in V$;
- 2) для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено $T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$;
- 3) для любого $\lambda \in (1, \hat{q})$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 4) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и любого $\mu \in (1, \hat{q}_i)$ имеем $\nu_i^{1/q_i} D_i u \in L^\mu(\Omega)$;
- 5) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$;
- 6) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $p \in (0, \frac{\hat{q}_i}{q_i - 1})$ имеем $\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, Du) \in L^p(\Omega)$;
- 7) для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap V$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (1.9)$$

Заметим, что в изотропном случае (при $q_+ = q_- = q$) условие (1.5) принимает вид $q > 2 - (1/n)$. В анизотропном случае из ограничения (1.5) с необходимостью получаем $q_+ > 2 - (1/n)$ и $q_- > 1 + (n-1)/(n^2 + n - 1)$, причем из последнего неравенства следует, что числа q_i , $i = 1, \dots, n$, не могут быть сколь угодно близкими к единице.

Далее через C_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от величин n , C_1 , C_2 , q_i , m_i , t_i , $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$, $\|f\|_{L^1(\Omega)}$, $\|\nu_i\|_{L^{t_i}(\Omega)}$, $\|1/\nu_i\|_{L^{m_i}(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$, и $\text{meas } \Omega$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Всюду в дальнейшем будем считать, что все предположения теоремы 1.2 выполнены.

2.1. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЗАДАЧ.

Пусть $\{f_l\} \in C_0^\infty(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательность функций, сильно сходящаяся к f в $L^1(\Omega)$, причем

$$\|f_l\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Из (1.1) — (1.3) и результатов [8] о разрешимости вариационных неравенств с монотонными операторами получаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in V$ такая, что для любой $\varphi \in V$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_l) D_i(u_l - \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f_l(u_l - \varphi) dx. \quad (2.2)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольное число $k \geq 1$. Из условий 1) и 2) в определении множества V следует, что $u_l - T_k(u_l) \in V$. Выбирая в (2.2) в качестве пробной функции $u_l - T_k(u_l)$ и учитывая (2.1) и (1.2), получаем:

$$\int_{\{|u_l| \leq k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i u_l|^{q_i} \right\} dx \leq C_3 k. \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.1. Для любых $l \in \mathbb{N}$ при каждом $k \geq 1$ имеем

$$\text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq C_4 k^{-\hat{q}}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Выберем произвольные $l \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Поскольку $|T_k(u_l)| = k$ на множестве $\{|u_l| \geq k\}$, то

$$k^{\hat{q}} \text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u_l)|^{\hat{q}} dx. \quad (2.5)$$

Из условия (1.6) вытекает, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $m_i > 1/(q_i - 1)$, а из того факта, что $u_l \in V \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, следует, что $T_k(u_l) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, применяя для оценки правой части (2.5) теорему 1.1 к функции $T_k(u_l)$, получим

$$k^{\hat{q}} \text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq C_*^{\hat{q}} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\int_{\{|u_l| < k\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i} \right\}^{\hat{q}}.$$

В силу (2.3) из последнего неравенства будем иметь

$$k^{q_*} \text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq C_4 k^{(q_*/n) \sum_{i=1}^n 1/q_i},$$

откуда следует (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для любых $l \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ при каждом $k \geq 1$

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} | D_i u_l | \geq k\} \leq C_5 k^{-\hat{q}_i}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k \geq 1$, $k_1 \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Положим $B = \{\nu_i^{1/q_i} | D_i u_l | \geq k, |u_l| < k_1\}$. Используя (2.3), получаем

$$\text{meas } B \leq C_3 k_1 k^{-q_i}. \quad (2.7)$$

Поскольку

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} | D_i u_l | \geq k\} \leq \text{meas}\{|u_l| \geq k_1\} + \text{meas } B, \quad (2.8)$$

то отсюда, с учетом (2.4) и (2.7), выводим соотношение

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} | D_i u_l | \geq k\} \leq C_4 k_1^{-\hat{q}} + C_3 k_1 k^{-q_i}. \quad (2.9)$$

Полагая в (2.9) $k_1 = k^{q_i/(\hat{q}+1)}$, устанавливаем (2.6). Лемма доказана.

Для любых $t > 0$, $l, j \in \mathbb{N}$ введем следующие обозначения:

$$M_t(l, j) = \text{meas}\{|u_l - u_j| \geq t\}, \quad (2.10)$$

$$N_t(l, j) = \text{meas}\left\{\sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} | D_i u_l - D_i u_j | \geq t\right\}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.3. Для любых $t > 0$, $k \geq 1$, $l, j \in \mathbb{N}$ имеет место оценка:

$$M_t(l, j) \leq 2C_4 k^{-\hat{q}} + t^{-q_-} \int_{\Omega} |T_k(u_l) - T_k(u_j)|^{q_-} dx. \quad (2.12)$$

Доказательство. Пусть $t > 0$, $k \geq 1$, $l, j \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\{|u_l - u_j| \geq t\} \subset \{|u_l| \geq k\} \cup \{|u_j| \geq k\} \cup \{|T_k(u_l) - T_k(u_j)| \geq t\},$$

то

$$M_t(l, j) \leq \text{meas}\{|u_l| \geq k\} + \text{meas}\{|u_j| \geq k\} + \text{meas}\{|T_k(u_l) - T_k(u_j)| \geq t\}. \quad (2.13)$$

Пусть $A = \{|T_k(u_l) - T_k(u_j)| \geq t\}$. Тогда $|T_k(u_l) - T_k(u_j)|^{q_-} \geq t^{q_-}$ на A . Следовательно,

$$\text{meas } A \leq t^{-q_-} \int_{\Omega} |T_k(u_l) - T_k(u_j)|^{q_-} dx. \quad (2.14)$$

Оценивая в (2.13) первые два слагаемых с помощью (2.4), а оставшееся – с помощью (2.14), получаем (2.12). Лемма доказана.

Введем следующее обозначение:

$$\hat{q}_- = \frac{\hat{q} q_-}{1 + \hat{q}_-}.$$

Кроме того, для любых $k \geq 1$, $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{t,m,k}(l, j) = \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l - D_i u_j| \geq t, \right. \\ \left. |u_l - u_j| \leq \frac{1}{k}, \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \leq m, \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_j| \leq m \right\}. \quad (2.15)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $k \geq 1$, $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $l, j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$N_t(l, j) \leq 2C_6 m^{-q^-} + M_{1/k}(l, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(l, j). \quad (2.16)$$

Доказательство. Поскольку

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l - D_i u_j| \geq t \right\} \subset \left\{ |u_l - u_j| > \frac{1}{k} \right\} \cup E_{t,m,k}(l, j) \cup \\ \cup \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| > m \right\} \cup \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_j| > m \right\},$$

то с учетом обозначений (2.10) и (2.11) будем иметь:

$$N_t(l, j) \leq M_{1/k}(l, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(l, j) + \\ + \text{meas} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| > m \right\} + \text{meas} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_j| > m \right\}. \quad (2.17)$$

Из леммы 2.2 следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\text{meas} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| > m \right\} \leq C_6 m^{-q^-}. \quad (2.18)$$

Аналогичную оценку имеем для функции u_j . Тогда из (2.17), с учетом (2.18), вытекает (2.16). Лемма доказана.

Определим для произвольной точки $x \in \Omega$ функцию $\Phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Phi_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n (a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta))(\xi_i - \eta_i). \quad (2.19)$$

Поскольку $a_i, i = 1, \dots, n$, — функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta$, имеет место неравенство (1.3), то существует множество $H \subset \Omega$ меры нуль такое, что:

- а) для любого $x \in \Omega \setminus H$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
- б) для любых $x \in \Omega \setminus H$ и $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta$, справедливо неравенство $\Phi_x(\xi, \eta) > 0$.

Для любых $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $x \in \Omega$ положим

$$G_{t,m}(x) = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\xi_i - \eta_i| \geq t, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\xi_i| \leq m, \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\eta_i| \leq m \right\}. \quad (2.20)$$

Пусть $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$. Определим функцию $\mu_{t,m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min_{G_{t,m}(x)} \Phi_x, & x \in \Omega \setminus H, \\ 0, & x \in H. \end{cases} \quad (2.21)$$

Из определения (2.21), свойств а), б) функции Φ_x и условия (1.1) следует, что для всех $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$ имеем: $\mu_{t,m} \geq 0$ на Ω , $\mu_{t,m} > 0$ п.в. на Ω , $\mu_{t,m} \in L^1(\Omega)$.

Поскольку при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{T_k(u_l)\}$, $l \in \mathbb{N}$, ограничена в пространстве $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ (см. (2.3)), то из рефлексивности $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ вытекает, что существует возрастающая последовательность $\{l_j\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{h_k\} \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u_{l_j}) \rightarrow h_k \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Отсюда следует сильная сходимость $T_k(u_{l_j})$ к h_k в $L^q(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, а следовательно, и фундаментальность последовательности $\{T_k(u_{l_j})\}$ в $L^q(\Omega)$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 2.5. *Последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере.*

Доказательство. Пусть $t > 0$, $\varepsilon > 0$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $2C_4k^{-q} < \varepsilon/2$. Тогда, в силу фундаментальности последовательности $\{T_k(u_{l_j})\}$ в $L^q(\Omega)$, из (2.12) будем иметь:

$$M_t(l_i, l_j) < \varepsilon \quad \text{для всех } i, j \geq i_0(k, t).$$

Значит, подпоследовательность $\{u_{l_j}\}$ фундаментальна по мере в Ω . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. *Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ фундаментальна по мере.*

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное число $m \in \mathbb{N}$, $m > t$ так, чтобы первое слагаемое в правой части (2.16) стало меньше $\varepsilon/3$. Тогда для любых $k, l, j \in \mathbb{N}$ в силу (2.16) будем иметь:

$$N_t(l, j) < \frac{\varepsilon}{3} + M_{1/k}(l, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(l, j). \quad (2.23)$$

Из леммы 2.5 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$, выполнено соотношение

$$M_{1/k}(l_i, l_j) \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.24)$$

Положим для любого $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \sup_{i,j \geq n_k} N_t(l_i, l_j), \quad d_k = \sup_{i,j \geq n_k} \text{meas } E_{t,m,k}(l_i, l_j). \quad (2.25)$$

Принимая во внимание (2.24) и (2.25), из (2.23) получаем:

$$b_k \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} + d_k. \quad (2.26)$$

Можно показать, что $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что для любого $k \geq k_0$ имеем $d_k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда из (2.26) с учетом (2.25) вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$

$$\sup_{i,j \geq n_k} N_t(l_i, l_j) = b_k < \varepsilon,$$

откуда

$$N_t(l_i, l_j) < \varepsilon \quad \text{для всех } i, j \geq n_k. \quad (2.27)$$

Из (2.27), с учетом определения $N_t(l, j)$, выводим, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\nu_i^{1/q_i} D_i u_{i_j}$, $j \in \mathbb{N}$, фундаментальна по мере. Лемма доказана.

Отметим, что доказательство лемм 2.3 – 2.6 проводится с помощью метода, предложенного в работе [5].

В силу леммы 2.5 существует такая измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что последовательность $\{u_{i_j}\}$ сходится к u по мере, а из леммы 2.6 следует существование таких функций $v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что при каждом фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_{i_j}\}$ сходится к v_i по мере.

Тогда по теореме Ф.Рисса из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду в Ω . Без ограничения общности можно считать, что

$$u_{i_j} \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad (2.28)$$

$$\text{при любом } i \in \{1, \dots, n\} \quad \nu_i^{1/q_i} D_i u_{i_j} \rightarrow v_i \quad \text{почти всюду в } \Omega. \quad (2.29)$$

ЛЕММА 2.7. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u) \in V$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Из утверждений (2.28), (2.22) и непрерывности функции T_k вытекает, что

$$T_k(u) = h_k \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (2.30)$$

Обратимся к свойствам множества V , а именно, положим в 2) $u = 0$, $w = u_{i_j}$, а затем воспользуемся нечетностью функции T_k . Тогда

$$T_k(u_{i_j}) \in V, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

В силу (2.22), (2.30), (2.31) и свойства слабой замкнутости множества V получаем, что $T_k(u) \in V$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем $T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Из (2.28) и непрерывности срезки T_k следует, что

$$T_k(u_{i_j} - \varphi) \rightarrow T_k(u - \varphi) \quad \text{почти всюду в } \Omega. \quad (2.32)$$

Из (2.3) имеем равномерную ограниченность по $j \in \mathbb{N}$ норм функций $T_k(u_{i_j} - \varphi)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, откуда, в силу рефлексивности $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ вытекает существование некоторой подпоследовательности последовательности $\{T_k(u_{i_j} - \varphi)\}$, сходящейся в пространстве $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ слабо к функции $w_k \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$T_k(u_{i_j} - \varphi) \rightarrow w_k \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (2.33)$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$T_k(u - \varphi) = w_k \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (2.34)$$

Лемма доказана.

Чтобы сделать вывод об определенной суммируемости предельных функций из (2.28) и (2.29), воспользуемся следующим результатом из [5].

ЛЕММА 2.9. Пусть g – измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\gamma > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|g| \geq k\} \leq Mk^{-\gamma}. \quad (2.35)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $g \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L^\lambda(\Omega)} \leq 4^{1/(\gamma-\lambda)}[\text{meas } \Omega + 2^\gamma M]^{1/\lambda}. \quad (2.36)$$

Из условия (1.7), учитывая определения чисел q_* и \hat{q} , получим:

$$1 < \hat{q}. \quad (2.37)$$

ЛЕММА 2.10. Для любого $\lambda \in (1, \hat{q})$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\lambda \in (1, \hat{q})$. Из леммы 2.1 вытекает, что для любых $j, k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u_{i_j}| \geq k\} \leq C_4 k^{-\hat{q}}.$$

Отсюда, в силу леммы 2.9 и (2.37), следует, что $u_{i_j} \in L^\lambda(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, причем выполнена равномерная оценка

$$\|u_{i_j}\|_{L^\lambda(\Omega)} \leq C', \quad (2.38)$$

где постоянная C' зависит только от известных параметров и λ . Теперь (2.28) и лемма Фату позволяют утверждать, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Лемма доказана.

Далее, в силу условия (1.7), с учетом определений q_* и \hat{q} , получим, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\hat{q} > 1/(q_i - 1)$, откуда

$$1 < \hat{q}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.39)$$

ЛЕММА 2.11. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $\mu \in (1, \hat{q}_i)$ имеем $v_i \in L^\mu(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu \in (1, \hat{q}_i)$. В силу леммы 2.2 для любых $k, j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |D_i u_{i_j}| \geq k\} \leq C_5 k^{-\hat{q}_i}.$$

Тогда лемма 2.9 и (2.39) позволяют сделать вывод о том, что функция $\nu_i^{1/q_i} D_i u_{i_j}$ при любом $j \in \mathbb{N}$ суммируема с показателем μ и выполняется следующая равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка:

$$\|\nu_i^{1/q_i} D_i u_{i_j}\|_{L^\mu(\Omega)} \leq C'', \quad (2.40)$$

где постоянная C'' зависит только от известных параметров и μ . В силу (2.29) и леммы Фату имеем $v_i \in L^\mu(\Omega)$. Лемма доказана.

Положим

$$w_i = (1/\nu_i)^{1/q_i} v_i. \quad (2.41)$$

ЛЕММА 2.12. $w_i \in L^1(\Omega)$ при любом $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Из условия (1.6), принимая во внимание определения чисел q_* , \hat{q} и \hat{q}_i , имеем

$$\frac{m_i q_i}{m_i q_i - 1} < \hat{q}_i. \quad (2.42)$$

Используя неравенство Юнга и учитывая определение (2.41), получаем

$$|w_i| \leq (1/\nu_i)^{m_i} + |v_i|^{m_i q_i / (m_i q_i - 1)}. \quad (2.43)$$

Поскольку $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, а вследствие (2.42) и леммы 2.11 имеем $v_i \in L^\mu(\Omega)$, где $\mu = m_i q_i / (m_i q_i - 1)$, то из (2.43) вытекает, что $w_i \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.13. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция u имеет обобщенную производную $D_i u$, причем $D_i u = w_i$ почти всюду на Ω .

Доказательство. Зафиксируем любое $i \in \{1, \dots, n\}$. Возьмем произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Имеем

$$\int_{\Omega} u D_i \psi dx = \int_{\Omega} (u - u_{i_j}) D_i \psi dx - \int_{\Omega} (D_i u_{i_j} - w_i) \psi dx - \int_{\Omega} w_i \psi dx. \quad (2.44)$$

В силу (2.28), оценки (2.38), теоремы Егорова и леммы 2.10 получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u - u_{i_j}) D_i \psi dx = 0. \quad (2.45)$$

Из (2.29), (2.41), теоремы Егорова, леммы 2.12 и оценки (2.40) с $\mu = m_i q_i / (m_i q_i - 1)$, которое в силу (2.42) является допустимым, делаем вывод, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D_i u_{i_j} - w_i) \psi dx = 0. \quad (2.46)$$

Учитывая (2.45) и (2.46) и переходя в (2.44) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega} u D_i \psi dx = - \int_{\Omega} w_i \psi dx \quad \text{для любой } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Значит, существует $D_i u$, причем $D_i u = w_i$ почти всюду на Ω . В силу леммы 2.12 имеем $D_i u \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Из лемм 2.10 и 2.13 получаем $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

При сделанных предположениях на $q_i, \nu_i, i \in \{1, \dots, n\}$, имеем $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, в силу чего из леммы 2.7 вытекает, что при любом $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u) \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega). \quad (2.47)$$

Нетрудно показать, что $T_k(u)$ сильно сходится к u в $W^{1,1}(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$, откуда, вследствие (2.47), выводим, что $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$.

Поскольку из (2.29), (2.41) и леммы 2.13 следует, что при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ $D_i u_{i_j} \rightarrow D_i u$ почти всюду на Ω , то

$$a_i(x, D u_{i_j}) \rightarrow a_i(x, D u) \quad \text{почти всюду на } \Omega. \quad (2.48)$$

ЛЕММА 2.14. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого p такого, что

$$0 < p < \frac{\hat{q}_i}{q_i - 1}, \quad (2.49)$$

имеем $\{\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, D u_{i_j})\} \subset L^p(\Omega)$ и выполнена равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка

$$\|\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, D u_{i_j})\|_{L^p(\Omega)} \leq \hat{C}, \quad (2.50)$$

где постоянная \hat{C} зависит только от известных параметров и C'' .

Доказательство. Зафиксируем произвольное p , удовлетворяющее (2.49). В силу условия роста (1.1) имеем

$$\left[\nu_i^{-1/q_i} |a_i(x, Du_{i,j})| \right]^p \leq C_7 \sum_{k=1}^n \left(\nu_k^{1/q_k} |D_k u_{i,j}| \right)^{q_k \frac{q_i-1}{q_i} p} + C_8 g_1^{\frac{q_i-1}{q_i} p}. \quad (2.51)$$

Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$. Из лемм 2.2 и 2.9 следует, что достаточным для суммируемости функции $\nu_k^{1/q_k} D_k u_{i,j}$ является условие $0 < q_k \frac{q_i-1}{q_i} p < \hat{q}_k$, которое выполнено в силу соотношения (2.49). Суммируемость функции $g_1^{\frac{q_i-1}{q_i} p}$ очевидна вследствие (2.49) и того факта, что $g_1 \in L^1(\Omega)$. Из (2.51) с учетом последних рассуждений вытекает, что

$$\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, Du_{i,j}) \in L^p(\Omega),$$

причем в силу (2.40) выполнена равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка (2.50). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.15. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$. Из (1.5), (1.7) и (1.8), с учетом определений чисел q_* , \hat{q} и \hat{q}_i , следует, что

$$1 < \frac{t_i q_i}{t_i q_i - 1} < \frac{\hat{q}_i}{q_i - 1}. \quad (2.52)$$

Полагая, в силу (2.49) и (2.52), $p = \frac{t_i q_i}{t_i q_i - 1}$ и используя неравенство Гельдера, получим

$$\int_{\Omega} |a_i(x, Du_{i,j})| dx \leq \left(\int_{\Omega} \nu_i^{t_i} dx \right)^{1/t_i} \left(\int_{\Omega} \left(\nu_i^{-1/q_i} |a_i(x, Du_{i,j})| \right)^{t_i q_i / (t_i q_i - 1)} dx \right)^{(t_i q_i - 1) / t_i q_i},$$

откуда, с учетом условия $\nu_i \in L^{t_i}(\Omega)$ и леммы 2.14, можно сделать вывод о том, что

$$a_i(x, Du_{i,j}) \in L^1(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.53)$$

а также имеет место равномерная оценка

$$\| a_i(x, Du_{i,j}) \|_{L^1(\Omega)} \leq C, \quad (2.54)$$

где постоянная C зависит только от известных параметров и \hat{C} . Теперь (2.48) и теорема Фату позволяют утверждать, что $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.16. $a_i(x, Du_{i,j})$ сильно сходится к $a_i(x, Du)$ в $L^1(\Omega)$ при любом фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из (2.48), (2.53), теоремы Егорова и леммы 2.15.

2.2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap V$ – произвольная функция.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$E_0 = \{ |u - \varphi| = k \}, \quad E = \{ |u - \varphi| < k \},$$

а также для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_j = \{ |u_{i,j} - \varphi| < k \} \setminus E_0, \quad H_j = \{ |u_{i,j} - \varphi| < k \} \cap E_0.$$

Можно показать, что имеет место следующий результат.

ЛЕММА 2.17. Пусть $\Phi \in L^1(\Omega)$. Тогда

$$\int_{E_j} \Phi dx \rightarrow \int_E \Phi dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

Фиксируя произвольное $j \in \mathbb{N}$ и подставляя в (2.2) в качестве пробной функции $u_{l_j} - T_k(u_{l_j} - \varphi)$, получим неравенство:

$$\int_{\{|u_{l_j} - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi) dx. \quad (2.55)$$

С учетом определения множеств E , E_j и H_j левую часть (2.55) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx = \\ & = \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx + \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.56). Поскольку для $i \in \{1, \dots, n\}$ $D_i u = D_i \varphi$ почти всюду на множестве E_0 , то

$$\begin{aligned} \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx &= \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx + \\ &+ \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, Du_{l_j}) - a_i(x, Du)] D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь условием монотонности (1.3), выводим

$$\int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx \geq \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx. \quad (2.57)$$

Из (2.55) с учетом (2.56) и (2.57) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx + \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx &\leq \\ &\leq \int_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi) dx. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Из (2.33) и (2.34) следует слабая сходимость $T_k(u_{l_j} - \varphi)$ к $T_k(u - \varphi)$ в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, пользуясь которой нетрудно показать, что

$$\int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Докажем, что при $j \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i \varphi \right\} dx \rightarrow \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx. \quad (2.60)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} & \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{i_j}) D_i \varphi \right\} dx - \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx = \\ & = \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, Du_{i_j}) - a_i(x, Du)] D_i \varphi \right\} dx + \\ & + \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx - \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.61)$$

В силу выбора φ и леммы 2.15 имеем $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \in L^1(\Omega)$. Тогда в силу леммы 2.17 будем иметь:

$$\int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx \rightarrow \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (2.62)$$

Из леммы 2.16 вытекает, что

$$\int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, Du_{i_j}) - a_i(x, Du)] D_i \varphi \right\} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Тогда из (2.61) с учетом (2.62) и (2.63) выводим, что (2.60) имеет место. Запишем неравенство (2.58) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{i_j}) D_i u_{i_j} + g_2 \right\} dx \leq \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{i_j}) D_i \varphi \right\} dx + \\ & \int_{\Omega} f_{i_j} T_k(u_{i_j} - \varphi) dx - \int_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i (u_{i_j} - u) \right\} dx + \int_{E_j} g_2 dx. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Здесь

$$\int_{E_j} g_2 dx \rightarrow \int_E g_2 dx, \quad j \rightarrow \infty, \quad (2.65)$$

в силу леммы 2.17, а

$$\int_{\Omega} f_{i_j} T_k(u_{i_j} - \varphi) dx \rightarrow \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx, \quad j \rightarrow \infty, \quad (2.66)$$

в силу сходимости $T_k(u_{i_j} - \varphi)$ к $T_k(u - \varphi)$ почти всюду в Ω , сильной сходимости f_{i_j} к f в $L^1(\Omega)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества E , и для любого $j \in \mathbb{N}$ $\chi_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества E_j .

Покажем, что для почти всех $x \in \Omega$

$$\chi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \chi_j(x). \quad (2.67)$$

Если $x \notin E$, то (2.67) очевидно. В силу (2.28) существует множество $\hat{E} \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas } \hat{E} = 0, \quad u_{i_j} \not\rightarrow u \text{ на } E. \quad (2.68)$$

Пусть $x \in E \setminus \hat{E}$. В этом случае $\chi(x) = 1$. Из определения множества E

$$|u(x) - \varphi(x)| < k. \quad (2.69)$$

В силу (2.68) имеет место сходимость последовательности $u_{l_j}(x)$ к $u(x)$ при $j \rightarrow \infty$. Значит, существует номер J_0 такой, что для любых $j \geq J_0$

$$|u_{l_j}(x) - u(x)| < k - |u(x) - \varphi(x)|, \quad (2.70)$$

где правая часть положительна вследствие (2.69).

В силу (2.69) и (2.70) получаем для любого $j \geq J_0$

$$\begin{aligned} |u_{l_j}(x) - \varphi(x)| &\leq |u_{l_j}(x) - u(x)| + |u(x) - \varphi(x)| < \\ &< k - |u(x) - \varphi(x)| + |u(x) - \varphi(x)| < k, \end{aligned}$$

что означает принадлежность точки x любому из множеств E_j при $j \geq J_0$. Следовательно, $x \in \lim_{j \rightarrow \infty} E_j$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j(x) = 1$, и (2.67) имеет место.

Неравенство (2.67) может нарушаться только в точках множества $E \cap \hat{E}$, которое, в силу (2.68), имеет нулевую меру. Итак, (2.67) справедливо для почти всех $x \in \Omega$.

Лемма Фату, с учетом условия коэрцитивности (1.2), а также сходимости последовательности Du_{l_j} к Du , $j \rightarrow \infty$, почти всюду в Ω , и леммы 2.16, позволяет утверждать, что

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i u_{l_j} + g_2 \right\} \chi_j(x) dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} \lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j(x) dx. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Из (2.71) на основании (2.67) следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_{l_j}) D_i u_{l_j} + g_2 \right\} dx \geq \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} dx. \quad (2.72)$$

В (2.64) переходим к пределу по $j \rightarrow \infty$, используя (2.72), (2.60), (2.66), (2.59) и (2.65). В итоге получим

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} dx \leq \\ &\leq \int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx + \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx + \int_{\{|u-\varphi|<k\}} g_2 dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx.$$

Таким образом, неравенство (1.9) имеет место. Теорема 1.2 доказана.

Автор благодарит д. ф.-м. н. А. А. Ковалевского за постановку задачи и содержательные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L., *An L^1 - theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci 22 (1995), 241–273.
- [2] Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P., *Anisotropic equations in L^1* , Differential and Integral Equations 9 (1996), 209–212.
- [3] Boccardo L., Cirmi G. R., *Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 - data*, Journal of Convex Analysis 6 (1999), 195–206.
- [4] Kovalevsky A., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1 - data*, Nonlinear Boundary Value Problems 9 (1999), 46–54.
- [5] Ковалевский А.А., *Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 - правыми частями*, Известия Российской АН, Сер.Матем. 65 (2001), 27–80.
- [6] Kovalevsky A., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1 - data*, Нелинейные граничные задачи 12 (2002), 119–127.
- [7] Kovalevsky A., Nicolosi F., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth-order equations with L^1 - right-hand sides*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 50 (2002), 581–619.
- [8] Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М., Мир, (1972), 587 с.
- [9] Troisi M., *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat. 18 (1969), 3–24.

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ НАН УКРАИНЫ
83114, ДОНЕЦК 114, УЛ. РОЗЫ ЛЮКСЕМБУРГ, 74.